ANNEXE 1 : SYSTÈME BIELLE-MANIVELLE

Remarque :
La partie concernant la cinématique de la bielle-manivelle est développée dans le ***chapitre 9 Mouvement du solide - Applications***.

1. *Dynamique*

1.1. Bielle équivalente

Tout équilibrage fait intervenir les forces d'inertie que développent les organes mobiles. Pour simplifier le problème, on est conduit, dans le cas d'un système bielle-manivelle, à lui substituer un système dynamiquement équivalent, constitué par deux masses ponctuelles, situées l'une m_A au pied de bielle, animée d'un mouvement alternatif, l'autre, m_B à la tête de bielle, animé d'un mouvement de rotation.

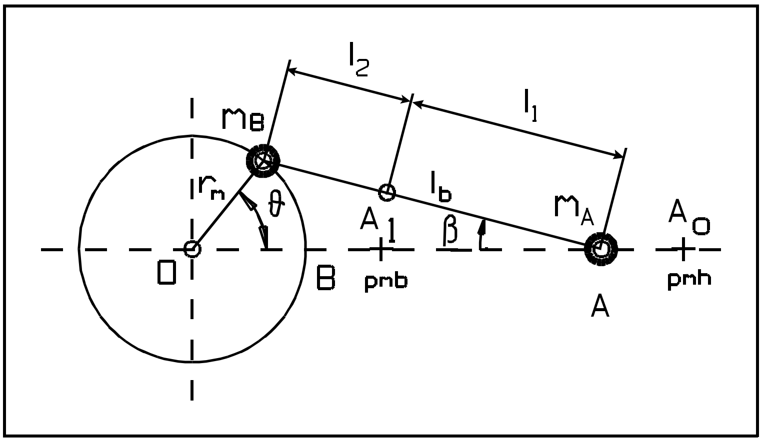

fig. An1.1. *- Principe du système bielle-manivelle.*

D'après les théorèmes de la dynamique, la bielle réelle et la bielle de remplacement ont *même centre de gravité*, *même masse totale* et *même moment d'inertie* J_G par rapport à G. Nous pouvons écrire :

- *même masse* :

$$m_{bielle} = m_A + m_B \quad \textbf{(éq. An1.1.)}$$

- *même centre de gravité* :

$$(m_A\ g)\ l_1 = (m_B\ g)\ l_2 \quad \textbf{(éq. An1.2.)}$$

- *même moment d'inertie* :
La rotation de la bielle autour de son centre de gravité fait naître un couple d'inertie (i_g étant le rayon de giration) :

$$\begin{aligned} C_{in} &= -\, J_G\ \ddot{\beta} = -\, m_{bielle}\ i_g^2\ \ddot{\beta} \\ &= -\left(m_A\ l_1^2 + m_B\ l_2^2\right)\ddot{\beta} + q \end{aligned} \quad \textbf{(éq. An1.3.)}$$

- *On impose les masses en A et B* :

$$l_b = l_1 + l_2 \qquad \textbf{(éq. An1.4.)}$$

Les deux premières équations déterminent m_A et m_B mais le moment d'inertie formée par m_A et m_B autour de G n'est pas nécessairement égal à J_G et pour avoir un *système de remplacement équivalant* il faut ajouter *un couple correcteur q*.

Recherchons la valeur du couple correcteur q :

Nous avons par l'équation des moments :

$$\begin{cases} m_A = m_{bielle} \dfrac{l_2}{l_b} \\ m_B = m_{bielle} \dfrac{l_1}{l_b} \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{aligned} m_A\, l_1^2 + m_B\, l_2^2 &= m_{bielle} \frac{l_2}{l_b} l_1^2 + m_{bielle} \frac{l_1}{l_b} l_2^2 \\ &= m_{bielle} \frac{l_1\, l_2}{l_b} \left(l_1 + l_2\right) \\ &= m_{bielle}\, l_1\, l_2 \end{aligned}$$

et q vaut en partant de l'équation l' ***éq. An1.3.*** :

$$\begin{aligned} C_{in} &= -\, m_{bielle}\, i_g^2\, \ddot{\beta} \\ &= -\left(m_A\, l_1^2 + m_B\, l_2^2\right) \ddot{\beta} + q \\ &= -\left(m_{bielle}\, l_1\, l_2\right) \ddot{\beta} + q \end{aligned}$$

d'où, en égalant la première expression et la dernière ci-dessus, on trouve :

$$\boxed{q = m_{bielle} \left(l_1\, l_2 - i_g^2\right) \ddot{\beta}} \; \textbf{\textit{(éq. An1.8.)}}$$

Le couple q engendre deux forces perpendiculaires à la bielle et appliquées respectivement en A et en B. En général q est négligeable (les bielles sont construites en ayant : $l_1\, l_2 \approx i_g^2$) dans ce cas la bielle équivalente est constituée uniquement par deux masses, l'une en A, l'autre en B et rien de plus.

En général on a pour un :

moteur lent : $\begin{cases} m_A = \frac{1}{3}\, m_{bielle} \\ m_B = \frac{2}{3}\, m_{bielle} \\ l_2 = \frac{l_b}{3} \end{cases}$ moteur rapide : $\begin{cases} m_A = \frac{1}{4}\, m_{bielle} \\ m_B = \frac{3}{4}\, m_{bielle} \\ l_2 = \frac{l_b}{4} \end{cases}$

1.2. Forces externes et forces d'inerties

Le système bielle - manivelle pris dans son ensemble, de même que chaque organe isolé sont en équilibre dynamique sous l'action :

- des forces agissantes externes
- des forces d inertie

Les forces intérieures deux à deux égales et opposées se feront équilibre et ne seront pas à considérer.

Nous pourrons négliger l'action des forces de pesanteur. De plus nous pourrons remplacer la bielle par les masses fictives m_A et m_B, mais nous négligerons le couple correcteur q. Ajoutons que m_A et m_B ne pourront être ajoutés respectivement au piston et à la manivelle, lorsque l'on recherche l'action de la bielle sur ces organes.

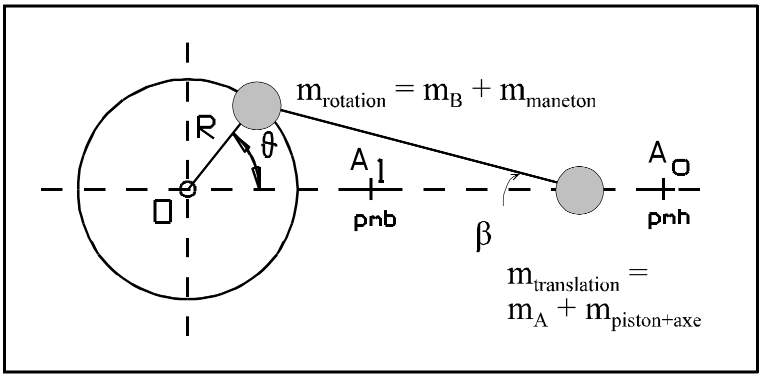

***fig. An1.2.** - Schéma équivalent*

masse totale en translation :

$$m_{translation} = m_A + m_{piston + axe}$$

masse totale en rotation :

$$m_{rotation} = m_B + m_{maneton}$$

Le problème à résoudre est de déterminer les efforts dynamiques de chaque organe dans le but d'en déduire son dimensionnement ou de le vérifier.

Les forces agissantes externes sont de deux types :

- les forces de pressions
- les forces de frottement

Les *forces de pressions* sont dues à la combustion des gaz et se calcule par :

$$\boxed{\vec{F}_{pression} = \vec{p}\ A}$$

<u>*Notations*</u> :

$\vec{p}$	pression *relative* s'exerçant sur le fond du piston	*N/mm²*
A	surface du fond du piston	*mm²*

Ces forces de pressions sont évidement variables non seulement en fonction de la course du piston mais aussi en fonction de la phase pendant laquelle nous nous trouvons.

Les *forces de frottement* proviennent de deux genres de frottement à savoir :

- frottement plan, caractérisé par un angle φ de frottement (exemple : piston - cylindre)
- frottement dans les articulations cylindres, caractérisé par un cercle fictif de frottement de rayon $r' = r\ \mu_s$; avec r le rayon de l'articulation et $f = tg\varphi$.

Quant aux forces d'inerties, elles se déterminent par :

$\boxed{\vec{F}_{inertie} = -\, m\, \vec{a}}$ (Le sens de la force d'inertie est contraire à celui de l'accélération **!**)

<u>*Notations*</u> :	m	masse de l'objet	*kg*
	$\vec{a}$	accélération totale de cet objet	m/s^2

1.3. **Transmissions des efforts**

Examinons la transmission des efforts, sans tenir compte des divers frottements, notamment ceux entre le piston et le cylindre, ni les frottements dans les articulations.

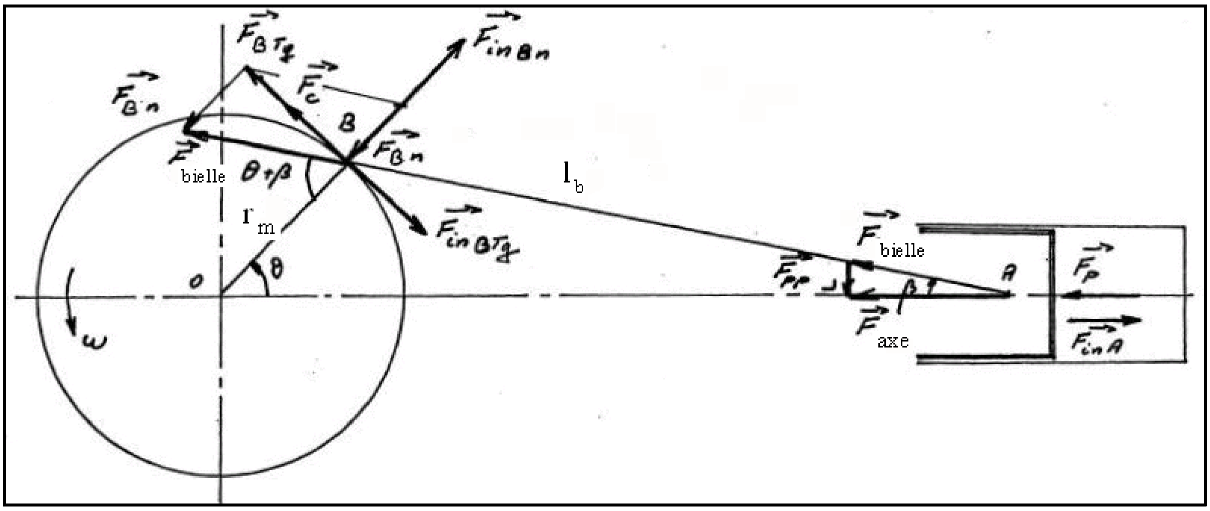

fig. An1.3. - Transmissions des effort sans frottement.

Notations :	$\vec{F}_p$	force de pression s'exerçant sur le fond du piston	
	$\vec{F}_{in\,A}$	force d'inertie en A	$\vec{F}_{in\,A} = -\,m_{translation}\,\vec{a}_A$
	$\vec{F}_{axe}$	force résultante sur l'axe du piston	$\vec{F}_{axe} = \vec{F}_p + \vec{F}_{in}$
	$\vec{F}_{bielle}$	force transmise par la bielle	$F_{bielle} = F_{axe} / \cos\beta$
	$\vec{F}_{pp}$	force de pression piston-cylindre	$F_{PP} = F_{axe} / \tan\beta$
	$\vec{F}_{B\,tg}$	force tang. transmise par le maneton	$F_{B\,tg} = F_{bielle}\,\sin(\theta+\beta)$
	$\vec{F}_{B\,n}$	force normale transmise par le maneton	$F_{B\,n} = F_{bielle}\,\cos(\theta+\beta)$
	$\vec{F}_{in\,B\,tg}$	force d'inertie tangentielle appliquée en B	$F_{in\,B\,tg} = m_B\,a_{B\,tg}$
	$\vec{F}_{in\,B\,n}$	force d'inertie normale appliquée en B	$F_{in\,B\,n} = m_B\,a_{B\,n}$
	$\vec{F}_C$	force créant le couple	$\vec{F}_C = \vec{F}_{B\,tg} + \vec{F}_{in\,B\,tg}$

Si la vitesse angulaire ω est constante, le couple transmis vaut :

$$C = F_C\,r_m = F_{bielle}\,\sin(\theta+\beta)\,r_m \qquad \boxed{\Rightarrow \quad C = F_{axe}\,r_m\,\frac{\sin(\theta+\beta)}{\cos\beta}} \quad \textbf{\textit{(éq. An1.40.)}}$$

Remarque :

θ : varie de 0 à 360°

β : + si θ varie de 0 à 180° − si θ varie de 180 à 360°