

<i>ANNEXE 1 : SYSTÈME BIELLE-MANIVELLE</i>	<i>- A1.1 -</i>
<i>1. Dynamique</i>	<i>- A1.1 -</i>
<i>1.1. Bielle équivalente</i>	<i>- A1.1 -</i>
<i>1.2. Forces externes et forces d'inerties</i>	<i>- A1.3 -</i>
<i>1.3. Transmissions des efforts</i>	<i>- A1.5 -</i>

ANNEXE 1 : SYSTÈME BIELLE-MANIVELLE

(Version du 5 janvier 2021 (15h16))

Remarque :

La partie concernant la cinématique de la bielle-manivelle est développée dans le **chapitre 9 Mouvement du solide - Applications**.

1. Dynamique

1.1. Bielle équivalente

Tout équilibrage fait intervenir les forces d'inertie que développent les organes mobiles. Pour simplifier le problème, on est conduit, dans le cas d'un système bielle-manivelle, à lui substituer un système dynamiquement équivalent, constitué par deux masses ponctuelles, situées l'une m_A au pied de bielle, animée d'un mouvement alternatif, l'autre, m_B à la tête de bielle, animé d'un mouvement de rotation.

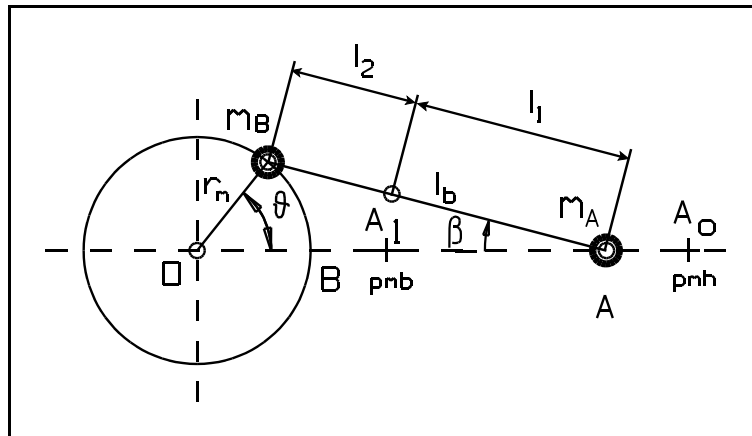


fig. An1.1. - Principe du système bielle-manivelle.

D'après les théorèmes de la dynamique, la bielle réelle et la bielle de remplacement ont *même centre de gravité, même masse totale et même moment d'inertie J_G* par rapport à G. Nous pouvons écrire :

- ▶ *même masse :*

$$m_{bielle} = m_A + m_B \quad (\text{éq. An1.1.})$$

- ▶ *même centre de gravité :*

$$(m_A g) l_1 = (m_B g) l_2 \quad (\text{éq. An1.2.})$$

- ▶ *même moment d'inertie :*

La rotation de la bielle autour de son centre de gravité fait naître un couple d'inertie (i_g étant le rayon de giration) :

$$\begin{aligned} C_{in} &= -J_G \ddot{\beta} = -m_{bielle} i_g^2 \ddot{\beta} \\ &= -\left(m_A l_1^2 + m_B l_2^2\right) \ddot{\beta} + q \quad (\text{éq. An1.3.}) \end{aligned}$$

- ▶ *On impose les masses en A et B :*

$$l_b = l_1 + l_2 \quad (\text{éq. An1.4.})$$

Les deux premières équations déterminent m_A et m_B mais le moment d'inertie formée par m_A et m_B autour de G n'est pas nécessairement égal à J_G et pour avoir un *système de remplacement équivalent* il faut ajouter *un couple correcteur* q .

Recherchons la valeur du couple correcteur q :

Nous avons par l'équation des moments :

$$\begin{cases} m_A = m_{bielle} \frac{l_2}{l_b} \\ m_B = m_{bielle} \frac{l_1}{l_b} \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{aligned} m_A l_1^2 + m_B l_2^2 &= m_{bielle} \frac{l_2}{l_b} l_1^2 + m_{bielle} \frac{l_1}{l_b} l_2^2 \\ &= m_{bielle} \frac{l_1 l_2}{l_b} (l_1 + l_2) \\ &= m_{bielle} l_1 l_2 \end{aligned}$$

et q vaut en partant de l'équation l' **éq. An1.3** :

$$\begin{aligned} C_{in} &= -m_{bielle} i_g^2 \ddot{\beta} \\ &= -(m_A l_1^2 + m_B l_2^2) \ddot{\beta} + q \\ &= -(m_{bielle} l_1 l_2) \ddot{\beta} + q \end{aligned}$$

d'où, en égalant la première expression et la dernière ci-dessus, on trouve :

$$\boxed{q = m_{bielle} (l_1 l_2 - i_g^2) \ddot{\beta}} \text{ (éq. An1.8.)}$$

Le couple q engendre deux forces perpendiculaires à la bielle et appliquées respectivement en A et en B. En général q est négligeable (les bielles sont construites en ayant : $l_1 l_2 \approx i_g^2$) dans ce cas la bielle équivalente est constituée uniquement par deux masses, l'une en A, l'autre en B et rien de plus.

En général on a pour un :

$$\text{moteur lent : } \begin{cases} m_A = \frac{1}{3} m_{bielle} \\ m_B = \frac{2}{3} m_{bielle} \\ l_2 = \frac{l_b}{3} \end{cases} \quad \text{moteur rapide : } \begin{cases} m_A = \frac{1}{4} m_{bielle} \\ m_B = \frac{3}{4} m_{bielle} \\ l_2 = \frac{l_b}{4} \end{cases}$$

1.2. Forces externes et forces d'inerties

Le système bielle - manivelle pris dans son ensemble, de même que chaque organe isolé sont en équilibre dynamique sous l'action :

- ▶ des forces agissantes externes
- ▶ des forces d'inertie

Les forces intérieures deux à deux égales et opposées se feront équilibre et ne seront pas à considérer.

Nous pourrons négliger l'action des forces de pesanteur. De plus nous pourrons remplacer la bielle par les masses fictives m_A et m_B , mais nous négligerons le couple correcteur q . Ajoutons que m_A et m_B ne pourront être ajoutés respectivement au piston et à la manivelle, lorsque l'on recherche l'action de la bielle sur ces organes.

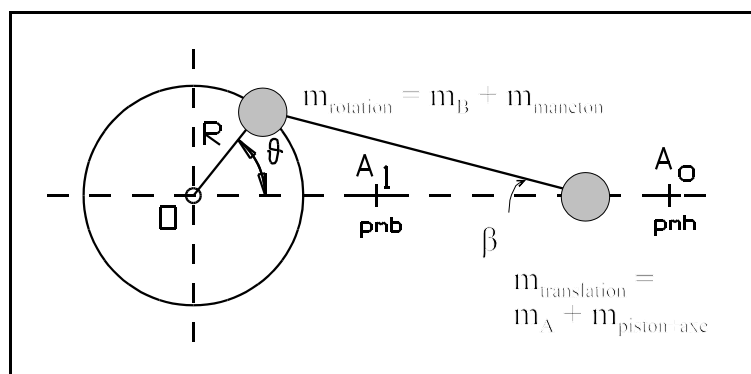


fig. An1.2. - Schéma équivalent

masse totale en translation :

$$m_{translation} = m_A + m_{piston + axe}$$

masse totale en rotation :

$$m_{rotation} = m_B + m_{maneton}$$

Le problème à résoudre est de déterminer les efforts dynamiques de chaque organe dans le but d'en déduire son dimensionnement ou de le vérifier.

Les forces agissantes externes sont de deux types :

- ▶ les forces de pressions
- ▶ les forces de frottement

Les forces de pressions sont dues à la combustion des gaz et se calcule par :

$$\vec{F}_{pression} = \vec{p} A$$

Notations : \vec{p} pression relative s'exerçant sur le fond du piston N/mm^2
 A surface du fond du piston mm^2

Ces forces de pressions sont évidemment variables non seulement en fonction de la course du piston mais aussi en fonction de la phase pendant laquelle nous nous trouvons.

Les *forces de frottement* proviennent de deux genres de frottement à savoir :

- ▶ frottement plan, caractérisé par un angle φ de frottement (exemple : piston - cylindre)
- ▶ frottement dans les articulations cylindres, caractérisé par un cercle fictif de frottement de rayon $r' = r \mu_s$; avec r le rayon de l'articulation et $f = tg\varphi$.

Quant aux forces d'inerties, elles se déterminent par :

$$\boxed{\vec{F}_{inertie} = - m \vec{a}}$$

(Le sens de la force d'inertie est contraire à celui de l'accélération !)

Notations :

m	masse de l'objet	kg
\vec{a}	accélération totale de cet objet	m/s^2

1.3. Transmissions des efforts

Examinons la transmission des efforts, sans tenir compte des divers frottements, notamment ceux entre le piston et le cylindre, ni les frottements dans les articulations.

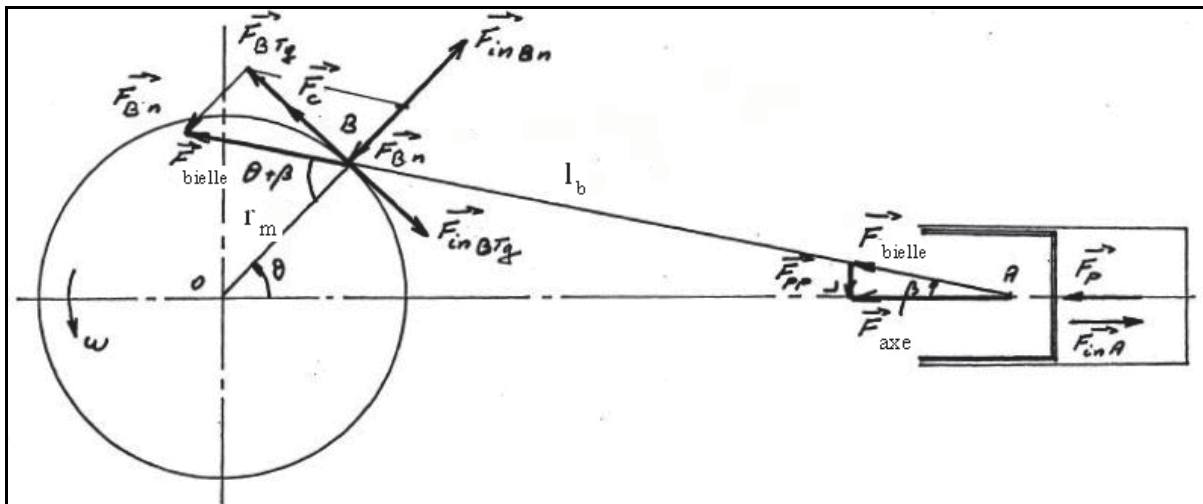


fig. An1.3. - Transmissions des effort sans frottement.

<u>Notations :</u>	\vec{F}_p	force de pression s'exerçant sur le fond du piston	
	$\vec{F}_{in A}$	force d'inertie en A	$\vec{F}_{in A} = -m_{translation} \vec{a}_A$
	\vec{F}_{axe}	force résultante sur l'axe du piston	$\vec{F}_{axe} = \vec{F}_p + \vec{F}_{in}$
	\vec{F}_{bielle}	force transmise par la bielle	$F_{bielle} = F_{axe} / \cos \beta$
	\vec{F}_{pp}	force de pression piston-cylindre	$F_{pp} = F_{axe} \tan \beta$
	\vec{F}_{Btg}	force tang. transmise par le maneton	$F_{Btg} = F_{bielle} \sin(\theta + \beta)$
	\vec{F}_{Bn}	force normale transmise par le maneton	$F_{Bn} = F_{bielle} \cos(\theta + \beta)$
	$\vec{F}_{in Btg}$	force d'inertie tangentielle appliquée en B	$F_{in Btg} = m_B a_{Btg}$
	$\vec{F}_{in Bn}$	force d'inertie normale appliquée en B	$F_{in Bn} = m_B a_{Bn}$
	\vec{F}_C	force créant le couple	$\vec{F}_C = \vec{F}_{Btg} + \vec{F}_{in Btg}$

Si la vitesse angulaire ω est constante, le couple transmis vaut :

$$C = F_C r_m = F_{bielle} \sin(\theta + \beta) r_m \quad \Rightarrow \quad C = F_{axe} r_m \frac{\sin(\theta + \beta)}{\cos \beta} \quad (\text{éq. An1.40.})$$

Remarque :

θ : varie de 0 à 360°

β : + si θ varie de 0 à 180°

- si θ varie de 180 à 360°