

AVERTISSEMENT

Les notes ci-après, relatives à la modélisation des différents organes sont données à titre exemplatif, et ne constituent nullement un mode de calcul obligé.

<i>CHAPITRE 1. CONCEPTION ET VÉRIFICATION DES CONTRAINTES DU PISTON</i>	<i>- P1.1 -</i>
<i>FICHE PISTON 1 : FOND du PISTON</i>	<i>- P1.1 -</i>
<i>1.1. Modélisation du fond du piston</i>	<i>- P1.1 -</i>
<i>1.1.1. Recherche des contraintes mécaniques</i>	<i>- P1.1 -</i>
<i>1.1.2. Recherche des contraintes thermiques.</i>	<i>- P1.5 -</i>
<i>1.1.2.1. Chaleur transmise par le fond du piston</i>	<i>- P1.5 -</i>
<i>1.1.2.2. Théorie générale</i>	<i>- P1.10 -</i>
<i>1.1.2.3. Notes sur les théories simplifiées</i>	<i>- P1.17 -</i>
<i>1.1.2.4. Notes sur le tracé des isothermes.</i>	<i>- P1.17 -</i>
<i>1.1.3. Combinaison des effets de pression et de tensions thermiques</i>	<i>- P1.19 -</i>
<i>1.1.3.1. Interférence</i>	<i>- P1.19 -</i>
<i>1.1.3.2. Combinaison de contraintes</i>	<i>- P1.20 -</i>
<i>1.1.4. Dilatation du fond du piston</i>	<i>- P1.22 -</i>
<i>1.1.4.1. Dilatation due à l'élévation globale de température</i>	<i>- P1.22 -</i>
<i>1.1.4.2. Dilatation due à la variation parabolique de la température</i>	<i>- P1.22 -</i>
<i>1.1.4.3. Dilatation totale et jeux</i>	<i>- P1.23 -</i>
<i>1.1.4. Effet pelliculaire thermoélastique</i>	<i>- P1.25 -</i>

CHAPITRE 1. CONCEPTION ET VÉRIFICATION DES CONTRAINTES DU PISTON

FICHE PISTON 1 : FOND du PISTON

1.1. Modélisation du fond du piston

Pour les moteurs Diesel, les tensions thermiques peuvent devenir très importantes pour les grands diamètres.

Le fond du piston est généralement calculé en admettant un encastrement suivant le pourtour. Mais en réalité, il s'agit d'une situation intermédiaire entre l'encastrement et l'appui.

Pour certains pistons de moteurs Otto, le fond du piston est nervurés, celles-ci permettent de réduire l'épaisseur nécessaire d'un facteur 2 ... 3.

1.1.1. Recherche des contraintes mécaniques

{Réf. 4 et 8}

Hypothèses : plaques minces; ce qui implique :

[H1] la flèche est petite par rapport aux autres dimensions;

[H2] la contrainte transversale σ_t peut être négligée.

<u>Notations</u> :	p	pression maximale dans la chambre de combustion	Pa
	e	épaisseur de la plaque	m
	R	demi diamètre de la plaque	m
	r	variable ($0 \leq r \leq R$)	m
	E	module de Young	N/m ²
	ν	coefficient de Poisson	-
	f	flèche	m

Si le système considéré possède une symétrie de révolution, en désignant par :

$$D_r = \frac{E e^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{éq. P1.2.}) \quad Nm$$

la rigidité à la flexion de la plaque on a, pour une plaque d'épaisseur uniforme (constante) e , les équations constitutives suivantes (en Nm/m) :

$$\begin{cases} M_1 = -D_r \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{\nu}{\rho_2} \right) \\ M_2 = -D_r \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{\nu}{\rho_1} \right) \end{cases} \quad (\text{éq. P1.3.})$$

où ρ_1 et ρ_2 représentent, au point considéré sur la surface moyenne de la plaque, les rayons de courbures principaux de la plaque déformée et M_1 et M_2 les moments fléchissants par unité de longueur autour des lignes de courbure réciproques.

Pour une plaque circulaire déformée symétriquement on a :

$$\begin{cases} \rho_1^{-1} = \rho_r^{-1} = -\frac{d\theta}{dr} \\ \rho_2^{-1} = \rho_c^{-1} = -\frac{r}{\sin \theta} \approx -\frac{r}{\theta} \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} M_r = D_r \left(\frac{d\theta}{dr} + \nu \frac{\theta}{r} \right) \\ M_c = D_r \left(\frac{\theta}{r} + \nu \frac{d\theta}{dr} \right) \end{cases} \quad (\text{éq. PI.5.})$$

θ étant l'inclinaison de la normale à la surface moyenne de la plaque déformée par rapport à l'axe de symétrie (de révolution) (**fig. PI.1.**); par hypothèse, θ ne dépend que de r . Si V est l'effort tranchant (par unité de longueur), les conditions d'équilibre des forces agissant sur un élément $(dr, r d\theta)$, de la plaque se réduisant à la seule équation :

$$\left(\frac{d}{dr} (V r d\theta) \right) dr = p r d\theta dr \quad (\text{éq. PI.6.})$$

dans le cas de la symétrie de révolution, ce qui implique l'absence d'efforts tranchants dans toute section méridienne.

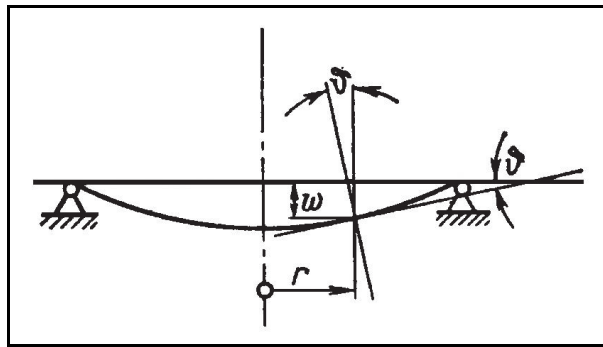


fig. PI.1. - {Réf. 8}

Toujours à cause de la symétrie, la seule équation d'équilibre des moments à considérer est :

$$\left(\frac{d}{dr} (M_r r d\theta) \right) dr + V r d\theta dr - M_c d\theta dr = 0 \quad (\text{éq. PI.7.})$$

où le dernier terme représente la somme vectorielle des M_c adjacents. En simplifiant par $d\theta dr$, on obtient :

$$\frac{d}{dr} (M_r r) + V r - M_c = 0 \quad (\text{éq. PI.8.})$$

et en substituant (**éq. PI.5.**) dans (**éq. PI.7.**), on obtient :

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{1}{r^2} \theta = - \frac{V}{D_r} \quad (\text{éq. PI.9.})$$

Si la plaque est chargée uniformément (p constante), ce que l'on peut admettre dans le cas actuel, on obtient à partir de (**éq. PI.6.**) :

$$\frac{d}{dr} (V r) = p r \Rightarrow V r = \int p r dr = \frac{p r^2}{2} + C$$

$$V = \frac{p r}{2} + \frac{C}{r} \quad (\text{éq. PI.11.})$$

la constante d'intégration $C = 0$ si la plaque est pleine (cas du fond du piston).

Si on substitue cette expression de V dans (**éq. PI.9.**), l'équation en θ a pour solution (par deux intégrations faciles qui introduisent deux nouvelles constantes A et B) :

$$\theta = A r + \frac{B}{r} - \frac{p r^3}{16 D_r} \quad (\text{éq. PI.13.})$$

où les constantes d'intégration A et B se déduisent des conditions aux limites.

Pour les encastremets $\phi = 0$ en $r = r_0$ (moyeu central) et en $r = R$ (périphérie), on trouve :

$$\begin{cases} A = \frac{p (r_0^2 + R^2)}{16 D_r} \\ B = -\frac{p r_0^2 R^2}{16 D_r} \end{cases} \quad (\text{éq. P1.17.})$$

et pour le fond du piston nous avons en plus : $r_0 = 0$. D'où :

$$\begin{cases} A = \frac{p R^2}{16 D_r} \\ B = 0 \end{cases} \quad (\text{éq. P1.19.})$$

En remplaçant dans (éq. P1.13.) on obtient :

$$\theta = \frac{p}{16 D_r} (R^2 r - r^3) \quad (\text{éq. P1.20.})$$

Et donc (éq.1.5.) Nous donne les moments fléchissants radial M_r et circonférentiel M_c :

$$\begin{cases} M_r = \frac{p}{16} (R^2 (1 + \nu) - r^2 (3 + \nu)) \\ M_c = \frac{p}{16} (R^2 (1 + \nu) - r^2 (1 + 3 \nu)) \end{cases} \quad (\text{éq. P1.21.})$$

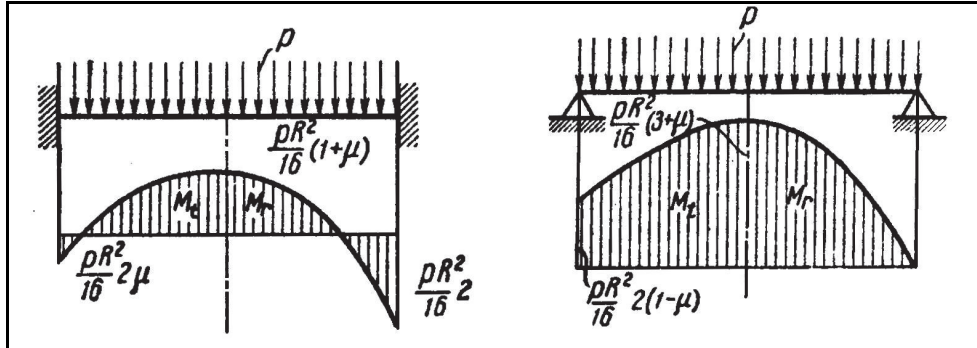


fig. P1.2. - Plaque encadré et sur appuis : moments fléchissants. {Réf. 8}

Pour les composantes de contraintes σ_r et σ_c maximales dans une section à la distance r de l'axe, on a, e étant l'épaisseur de la plaque :

$$\begin{cases} \sigma_{r \max} = \pm \frac{6 M_r}{e^2} \\ \sigma_{c \max} = \pm \frac{6 M_c}{e^2} \end{cases} \quad (\text{éq. P1.22.})$$

Les différentes contraintes deviennent dès lors :

$$\begin{cases} \sigma_r = \pm \frac{3p}{8e^2} (R^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)) \\ \sigma_c = \pm \frac{3p}{8e^2} (R^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)) \end{cases} \quad (\text{éq. P1.23.})$$

Lorsque le contour est encastré, les contraintes extensives maximales σ_r ont lieu à la surface supérieure pour $r = R$.

$$\begin{cases} \sigma_{r \max} = \frac{3p}{4e^2} R^2 \\ |\sigma_{c \max}| = \frac{3p}{4e^2} \nu R^2 \end{cases} \quad (\text{éq. P1.25.})$$

Dès lors la condition de résistance à l'égard de la pression maximale d'explosion p_{\max} devient (en ne considérant que les contraintes radiales maximales) :

$$\sigma_{r \max} < \sigma_{adm} \quad \Rightarrow \quad \frac{e}{R} \geq \sqrt{\frac{3 p_{\max}}{4 \sigma_{adm}}} \quad (\text{éq. P1.27.})$$

La valeur attribuée à la contrainte admissible doit tenir compte de la variation des efforts.

Notons que la déformation du fond du piston s'obtient en intégrant :

$$\frac{df}{dr} = -\theta \quad (\text{éq. P1.28.})$$

ce qui à partir de (éq. P1.20.) donne la flèche (dans le cas du disque plein) :

$$f = -\frac{p R^2 r^2}{32 D_r} + \frac{p r^4}{64 D_r} + C_1 \quad (\text{éq. P1.29.})$$

et on trouve dans l'hypothèse de l'encastrement au pourtour :

$$f = 0 \text{ pour } r = R \text{ ce qui implique que } C_1 = \frac{p R^4}{64 D_r}$$

$$f = \frac{p}{64 D_r} (R^2 - r^2)^2 \quad (\text{éq. P1.33.})$$

Dans tous les cas, que ce soit les cas *encastré* ou *appuyé*, il s'agit de vérifier que :

$$\begin{cases} \sigma_{\max} \leq \sigma_{adm} \text{ avec } S \approx 1.5 \\ f_{\max} \leq f_{adm} \approx D/800 \end{cases} \quad (\text{éq. P1.34.})$$

Dans le cas du disque plein simplement appuyé sur le pourtour on obtient :

$$f = \frac{p}{64 D_r} (R^2 - r^2) \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} R^2 - r^2 \right) \quad (\text{éq. P1.35.})$$

Tandis que :

$$\begin{cases} M_r = \frac{p}{16} \left((3 + \nu) (R^2 - r^2) \right) \\ M_c = \frac{p}{16} \left(R^2 (3 + \nu) - r^2 (1 + 3 \nu) \right) \end{cases} \quad (\text{éq. P1.36.})$$

avec un maximum au centre ($r = 0$) :

$$M_{r \max} = M_{c \max} = \frac{p R^2}{16} (3 + \nu) \quad (\text{éq. P1.38.})$$

Lorsque le contour est appuyé, les contraintes extensives maximales σ_r ont lieu à la surface inférieure pour $r = 0$:

$$\sigma_{r \max} = \sigma_{c \max} = \frac{3(3 + \nu) p R^2}{8 e^2} \quad (\text{éq. P1.40.})$$

1.2.2. Recherche des contraintes thermiques

{Réf. 4}

Dans les moteurs à combustion interne les tensions d'origine thermique jouent un rôle extrêmement important. Elles sont d'ailleurs du même ordre de grandeur que les contraintes mécaniques.

1.2.2.1. Chaleur transmise par le fond du piston

Il s'agit de déterminer la quantité de chaleur transmise en moyenne dans un cycle par unité de surface du fond du piston. Cette densité de flux sera notée \dot{q} . Nous pouvons l'évaluer si nous connaissons la quantité de chaleur perdue (du point de vue rendement thermodynamique) par conduction. Celle-ci en général peut-être estimée à environ 25 à 30 % de la chaleur totale Q de combustion et s'écoule en partie directement par la culasse et les parois du cylindre. Comme elle est du même ordre de grandeur que la partie utile de Q , nous pouvons admettre pour \dot{q} transmise du gaz au piston l'expression suivante :

$$\dot{q} = \xi P_e \frac{4}{\pi D^2} \quad (\text{éq. P1.43.}) \quad W/m^2$$

Notations :

P_e	puissance effective pour le cylindre	W
ξ	facteur exprimant la proportion de quantité de chaleur évacuée par conduction dans le fond du piston	-

Toute la théorie qui sera développée ultérieurement repose sur la notion de densité de flux au travers de la surface du fond du piston. Il est donc d'une grande importance de connaître avec le plus de précision possible cette quantité \dot{q} et donc déterminer avec le plus grand soin le facteur ξ .

Pour la variation de ce facteur ζ , nous avons deux sources possibles d'informations :

- a) Soit via la **fig. P1.3**, qui nous montre la variation de ce facteur ζ en fonction de la pression moyenne effective pour *un moteur Diesel*. Cependant ce facteur dépend aussi de la température moyenne du fond du piston.

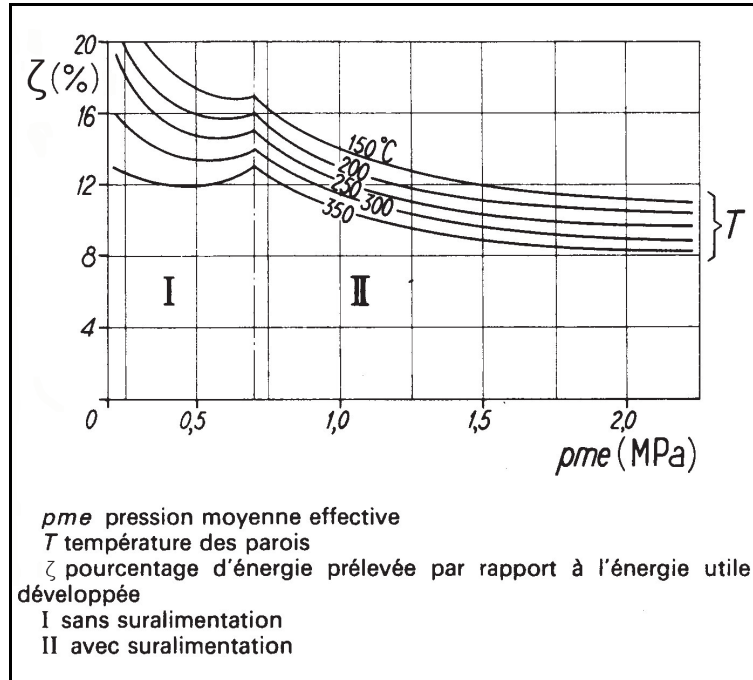


fig. P1.3. - Variation du taux de quantité de chaleur évacuée par la tête du piston avec la pression moyenne effective et la température de parois de tête. (Valable pour un moteur Diesel). {Réf. 26}

- b) Soit le calcul du flux de chaleur à travers du piston via la relation (empirique) de Ditchenko {Réf. 27} (semble bien fonctionner pour les *moteurs Otto*):

$$\dot{Q} = b \sqrt{\bar{u}_p} \left(\frac{D/10}{\tau_r p_a} \right)^{0.38} \left(p_{me} c_{sp} \frac{T_a}{293} \right)^{0.88} \quad (\text{éq. P1.45.}) \quad W$$

Notations :

b	coefficient	-
$2T$	$\Rightarrow b = 1$	
$4T$	$\Rightarrow b = 1.78$	
$2T$	chambre de combustion séparé :	$b = 1.1$
$4T$	chambre de combustion séparé :	$b = 1.96$

D	diamètre du piston	m
τ_r	taux de remplissage ($\tau_r \approx 0.9$)	-
p_a	pression d'admission	bar
p_{me}	pression moyenne effective	bar
c_{sp}	consommation spécifique	$g/ch/h$
T_a	température d'admission	K
\bar{u}_p	vitesse moyenne du piston	m/s
	$\bar{u}_p = \frac{2 C n}{60}$	
	C : course (m)	
	n : vitesse de rotation (tr/min)	

Concernant la consommation spécifique :

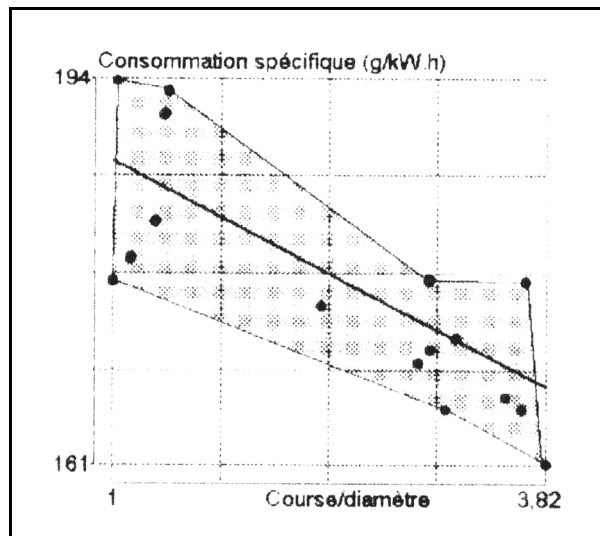


fig. P1.4. - Evolution de la consommation spécifique (g/kWh) avec le rapport entre la course et le diamètre du cylindre. {Réf. 27}

Equation de la droite moyenne, de la figure **fig.P1.4.**, calculée sur 15 moteurs :

$$c_{sp} = 194.2 - 7 \frac{C}{D} \quad (\text{éq. P1.49.})$$

Au total, le flux thermique évacué par des pistons en alliages d'aluminium (donc à température de paroi limitée par la nature du matériau) s'avère être {Réf. 1} :

- ▶ de 8 à 10 % de la puissance développée en moteur Otto
- ▶ de 15 à 20 % de la puissance développée en moteur Diesel.

La différence majeure de cette différence réside dans le fait que, la pression et la turbulence des gaz Diesel étant plus élevées, le coefficient de transfert thermique entre gaz et surface de fond du piston est plus important dans de cas des Diesel.

En conséquence, les températures des fonds de pistons aluminium sont sensiblement les mêmes dans un Diesel et dans un moteur Otto de même alésage développant une puissance double, que cette sur puissance soit obtenue par l'accroissement du couple moteur ou de la vitesse de rotation.

On perçoit donc l'intérêt d'augmenter la température de paroi de la tête de piston Diesel afin de diminuer l'écart de température entre gaz chauds et parois (donc les pertes de chaleur) améliorant ainsi la consommation de combustible, et, pour cela, d'adopter pour les "gros Diesel" des têtes de piston en acier.

Remarque :

Nous pouvons aussi écrire l'équation (éq. 1.43.) en fonction de la pression moyenne effective p_{me} . En effet, la relation liant P_e à p_{me} étant :

$$P_e = p_{me} \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) C \frac{n}{60} \frac{2}{nbs(t)} \quad (\text{éq. P1.50.})$$

<u>Notations :</u>	C	course du piston	m
	n	vitesse de rotation	t/min
	$nbs(t)$	nombre de temps (2 ou 4)	-

l'expression de \dot{q} devient :

$$\dot{q} = \xi \frac{p_{me} C n}{30 nbs(t)} \quad (\text{éq. P1.52.}) \quad W/m^2$$

Ayant connaissance de la densité de flux thermique \dot{q} , il nous sera possible de calculer, non seulement les différentes contraintes thermiques, mais encore, connaissant la répartition de la température sur la surface externe du fond du piston, de calculer la différence de température existant entre les deux faces du fond du piston ainsi que le coefficient de convection thermique superficiel h régnant à la surface extérieure du fond du piston.

Lors du lancement du moteur, \bar{T}_{paroi} est la même en tous points et la quantité d'énergie calorifique transférée est uniforme. Mais cette quantité d'énergie s'évacue par la surface cylindrique de rayon r et de hauteur e (e étant l'épaisseur du fond du piston à la distance r du centre). Voir fig. P1.5..

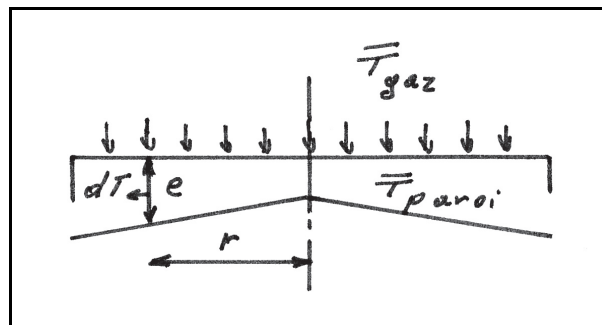


fig. P1.5. - Echange thermique dans une tête de piston.

Nous avons donc la relation suivante {Réf. 1} :

$$\left. \begin{aligned} \dot{Q} &= h (\pi r^2) (\bar{T}_{gaz} - \bar{T}_{paroi}) \\ &= - \lambda (2 \pi r e) \frac{dT}{dr} \end{aligned} \right\} (\text{éq. P1.55.}) \quad W$$

<u>Notations</u> :	h	coefficient de convection thermique superficielle	W/m^2K
	λ	coefficient de conductibilité thermique du fond du piston	W/mK
	e	épaisseur du fond du piston à la distance r du centre	m
	\dot{Q}	flux de chaleur	W
	\bar{T}_{paroi}	température moyenne du fond du piston	$^{\circ}C$ ou K
	\bar{T}_{gaz}	température moyenne des gaz au voisinage du fond du piston	$^{\circ}C$ ou K

D'où :

$$dT = - \frac{h(\bar{T}_{gaz} - \bar{T}_{paroi})}{2 \lambda e} r dr \quad (\text{éq. P1.59.})$$

qui concrétise, dans le domaine température, que l'énergie calorifique entrante est proportionnelle à r^2 et l'énergie sortante à r (en supposant e constant).

Si on suppose le coefficient de convection thermique superficielle h , le coefficient de conductibilité thermique du fond du piston λ et l'épaisseur du fond du piston e comme constant, on trouve, en intégrant :

$$T_r = - \frac{h(\bar{T}_{gaz} - \bar{T}_{paroi}) r^2}{4 \lambda e} + C_1$$

Si au point $r = 0$, on a $T_{paroi} = T_{centre} = T_c \Rightarrow C_1 = T_c$, la température en un point de rayon r est :

$$T_r = T_c - \frac{h(\bar{T}_{gaz} - \bar{T}_{paroi}) r^2}{4 \lambda e} = T_c - \frac{\dot{q} r^2}{4 \lambda e} \quad (\text{éq. P1.63.})$$

La température maximale d'une surface de tête de piston (supposée plane) se situe donc en son centre, la température des gaz et le coefficient de coefficient de convection thermique étant supposé constant.

La température de ce centre est d'autant plus élevée que :

- ▶ la conductivité λ du matériau est faible;
- ▶ l'épaisseur e est faible.

Le coefficient de convection thermique superficielle h croît avec la pression et la vitesse du fluide. Il varie avec un nombre considérable d'autres paramètres (forme, nature et rugosité de la paroi, chaleur spécifique et masse spécifique du fluide, etc ...). Il peut atteindre $580 W/m^2K$ pour des gaz de combustion turbulents et sous pression supérieure à $100 bars$.

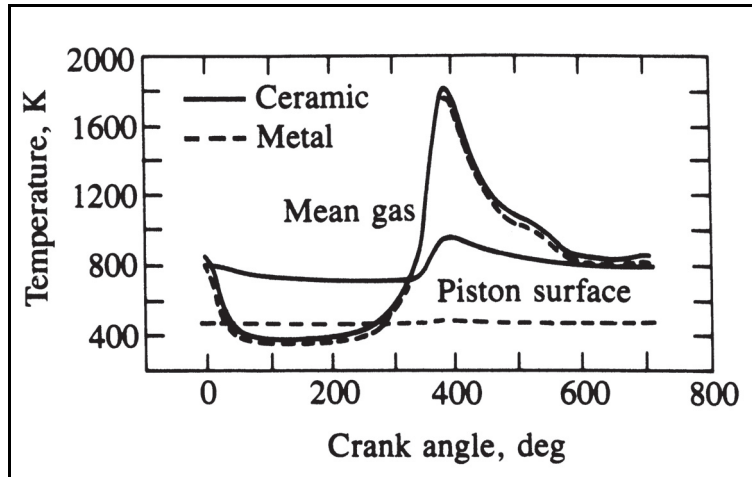


fig. P1.6. - Température des gaz en fonction de l'angle du vilebrequin (moteur Otto).

En première approximation, on peut prendre :

- ▶ Pour un moteur Diesel : $h = \dots 500 \dots 550 \text{ W/m}^2 \text{ K}$
- ▶ Pour un moteur Otto : $h \approx 865 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ {Réf. 28}

Quant la température moyenne du fluide au voisinage de la paroi \bar{T}_f :

$$\bar{T}_{\text{gaz}} = \dots 800 \text{ K} \dots$$

On peut extraire de l'équation (éq. 1.55.), la relation entre h et \bar{T}_{gaz} :

$$h = \frac{\dot{q}}{(\bar{T}_{\text{gaz}} - \bar{T}_{\text{paroi}})} \quad (\text{éq. P1.69.}) \quad \text{W/m}^2 \text{K}$$

1.1.2.2. Théorie générale

{Réf. 4 et 9}

Hypothèse :

Le fond du piston est considéré comme un disque porté à une certaine température, non uniforme, mais dont la répartition comporte une symétrie de révolution par rapport à l'axe du piston.

<u>Notations</u> :	E	module de Young	N/mm^2
	e	épaisseur de la plaque	mm
	R	demi diamètre	mm
	r	variable ($0 \leq r \leq R$)	mm
	T	température	K
	α	coefficient de dilatation linéaire	K^{-1}
	ε	allongement relatif	-
	λ	coefficient de conductibilité thermique	W/mK
	ν	coefficient de Poisson	-
	\dot{q}	flux thermique	W/m^2

Remarque :

Les diverses valeurs de E, λ, \dots seront prises pour la température considérée !

Un peu de théorie...

Si la température T ne varie pas le long de l'épaisseur du disque (*à vérifier a posteriori !*), on peut supposer qu'il en est de même de la contrainte et du déplacement dus à l'échauffement ($\sigma_z = 0$; $\varepsilon_z = 0$).

Les relations ordinaires entre contraintes et déformations (Loi de Hooke généralisée) doivent être modifiées, du fait que la déformation est due en partie à la dilatation thermique et en partie à la contrainte mécanique σ .

Si ε_r est la dilatation radiale réelle, la part $(\varepsilon_r - \alpha T)$ est due à la contrainte, et nous avons donc :

$$\varepsilon_r - \alpha T = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_c) \quad \text{et de même :} \quad \varepsilon_c - \alpha T = \frac{1}{E} (\sigma_c - \nu \sigma_r)$$

d'où :

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} ((\varepsilon_r + \nu \varepsilon_c) - (1+\nu) \alpha T) \\ \sigma_c = \frac{E}{1-\nu^2} ((\varepsilon_c + \nu \varepsilon_r) - (1+\nu) \alpha T) \end{cases} \quad (\text{éq. P1.76.})$$

De part la symétrie de révolution nous avons : $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$.

Si u est le déplacement radial, et en sachant que : $\varepsilon_r = \frac{du}{dr}$ et $\varepsilon_c = \frac{u}{r}$ nous obtenons ainsi :

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) - (1+\nu) \alpha T \right) \\ \sigma_c = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) - (1+\nu) \alpha T \right) \end{cases} \quad (\text{éq. P1.80.})$$

La condition d'équilibre d'un élément du disque (voir cours de résistance des matériaux), s'écrit :

$$\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} r - \sigma_c = \frac{d}{dr} (\sigma_r r) - \sigma_c = 0$$

Par substitution des deux équations des contraintes (*éq. P1.80.*) dans l'équation d'équilibre ci-dessus nous obtenons :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{1}{r^2} u = (1+\nu) \frac{\partial}{\partial r} (\alpha T)$$

Cette équation mise sous la forme :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r u) \right) = (1+\nu) \frac{\partial}{\partial r} (\alpha T)$$

fournit, par intégrations successives :

$$u = (1+\nu) \frac{1}{r} \int \alpha T r dr + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r} \quad (\text{éq. P1.84.})$$

En introduisant u dans l'équation (*éq. P1.80.*) :

$$\begin{cases} \sigma_r = E \left(\frac{C_1}{2(1-\nu)} - \frac{C_2}{r^2(1+\nu)} - \frac{1}{r^2} \int \alpha T r dr \right) \\ \sigma_c = E \left(\frac{C_1}{2(1-\nu)} + \frac{C_2}{r^2(1+\nu)} + \frac{1}{r^2} \int \alpha T r dr \right) \end{cases} \quad (\text{éq. P1.85.})$$

Les constantes C_1 et C_2 sont à déterminer par les conditions aux limites pour $r = a$ et $r = R$. Si la plaque est pleine : $a = 0 \Rightarrow u = 0$ pour $r = 0$ et $C_2 = 0$.

A) Dilatation périphérique libre : plaque libre ($\sigma_r = 0$ pour $r = R$)

$$C_1 = \frac{2(1-\nu)}{R^2} \int_0^R \alpha T r dr$$

Remarque :

Avant d'effectuer l'intégrale il convient de connaître $T = f(r)$.

éq. P1.84. devient alors :

$$u = \frac{(1+\nu)}{r} \int \alpha T r dr + \frac{(1-\nu)r}{R^2} \int_0^R \alpha T r dr \quad (\text{éq. P1.95.})$$

En remplaçant C_1 et C_2 dans l'équation (éq. P1.85.) on trouve :

$$\begin{cases} \sigma_r = E \left(\frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha T r dr - \frac{1}{r^2} \int \alpha T r dr \right) \\ \sigma_c = E \left(\frac{1}{R^2} \int_0^R \alpha T r dr + \frac{1}{r^2} \int \alpha T r dr - \alpha T \right) \end{cases} \quad (\text{éq. P1.96.})$$

B) Dilatation périphérique nulle : plaque encadrée ($u = 0$ pour $r = R$)

Via éq. P1.84. ($C_2 = 0$) :

$$0 = (1+\nu) \frac{1}{R} \int_0^R \alpha T r dr + \frac{C_1 R}{2} \Rightarrow C_1 = - \frac{2(1+\nu)}{R^2} \int_0^R \alpha T r dr$$

En remplaçant C_1 et C_2 dans l'équation (éq. P1.85.) on trouve :

$$\begin{cases} \sigma_r = -E \left(\frac{1}{R^2} \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_0^R \alpha T r dr + \frac{1}{r^2} \int \alpha T r dr \right) \\ \sigma_c = -E \left(\frac{1}{R^2} \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_0^R \alpha T r dr - \frac{1}{r^2} \int \alpha T r dr + \alpha T \right) \end{cases} \quad (\text{éq. P1.101.})$$

Nous savons que dans la théorie de la transmission de la chaleur, nous avons la conservation du flux de chaleur \dot{q} . De manière générale cette équation s'écrit, en coordonnée polaire (r, θ) :

$$\boxed{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda e r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\lambda e}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = e \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \dot{Q}_{(r,t)}} \quad (\text{éq. P1.103.})$$

Hypothèses :

- [H1] λ et ρc sont constants (matériau homogène);
- [H2] λ et ρc sont indépendants de la température T ;
- [H3] e est indépendant du rayon r (e constant);
- [H4] variation lente de \dot{q} et de T en fonction du temps t ;

<u>Notations :</u>	λ	conductibilité thermique du matériau	W/mK
	c	chaleur massique du matériau	J/kgK
	ρ	masse volumique	kg/m^3
	ρc	chaleur massique par unité de volume	J/m^3K
	\dot{q}	flux thermique traversant la plaque	W/m^2

En tenant compte des diverses hypothèses émises, sans oublier que : $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$, l'équation de continuité du flux s'écrit désormais :

$$\frac{\lambda e}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = e \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \dot{q}_{(r,t)}$$

Calculons concrètement les différentes contraintes

Hypothèses :

- [H1] Flux constant (en régime) (\dot{q} n'est pas fonction du temps t)
- [H2] Flux réparti uniformément (\dot{q} n'est pas fonction du rayon r)

Et dans ce cas, prenons le flux moyen $\dot{\bar{q}}$, ainsi que la température moyenne \bar{T} (sur l'épaisseur de la plaque), et dans ce cas, l'équation de continuité du flux devient :

$$\boxed{\frac{\lambda e}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) = -\dot{\bar{q}}} \text{ (éq. P1.112.)}$$

et, en intégrant deux fois l'équation ci-dessus, nous obtenons :

$$\bar{T} = -\frac{\dot{\bar{q}}}{4 \lambda e} r^2 - \frac{C_1}{r^2} + C_2$$

La plaque étant pleine et \bar{T} finie à l'origine (en $r = 0$) : $C_1 = 0$

Quant à C_2 il est défini par : $\bar{T} = \bar{T}_R$ pour $r = R$, d'où : $C_2 = \bar{T}_R + \frac{\dot{\bar{q}}}{4 \lambda e} R^2$

<u>Notations :</u>	\bar{T}_r	température moyenne en r , sur l'épaisseur de la plaque	K
	\bar{T}_R	température moyenne en R , sur l'épaisseur de la plaque	K

et ainsi nous obtenons :

$$\bar{T}_r = \bar{T}_R + \frac{\dot{\bar{q}}}{4 \lambda e} (R^2 - r^2) \quad (1)$$

Pour $r = 0$, c'est-à-dire au centre de la plaque, $\bar{T}_{r=0} = \bar{T}_{\max}$.

$$\bar{T}_{\max} = \bar{T}_R + \frac{\dot{q}}{4 \lambda e} R^2 \quad (2)$$

D'où, en combinant les équations (1) et (2) ci-dessus, nous obtenons :

$$\bar{T}_r = \bar{T}_{\max} - \frac{\dot{q}}{4 \lambda e} r^2 \quad (\text{éq. PI.126.})$$

Remarque :

On retrouve la formule éq. PI.63.

En connaissant, soit la valeur de la température maximum au centre de la plaque \bar{T}_{\max} , soit la température à l'extrémité de la plaque (en $r = R$), nous pouvons en déduire, au moyen de l'équation ci-dessus, la variation de la température sur la surface de la plaque et comparer celle-ci avec l'évolution donnée à la figure fig. PI.7..

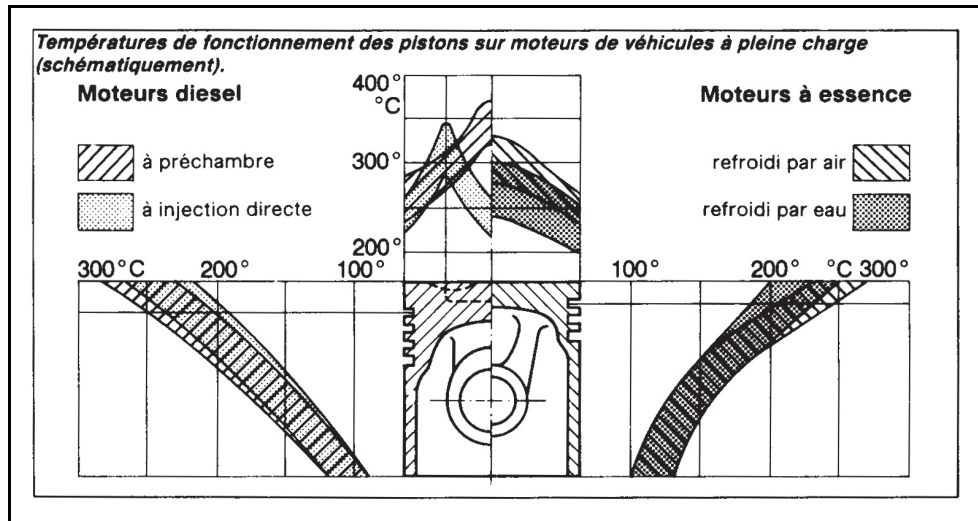


fig. PI.7. - Répartition des températures sur les faces d'un piston. {Réf. 7}

Par ailleurs on pourrait aussi se référer aux 2 figures ci-dessous.

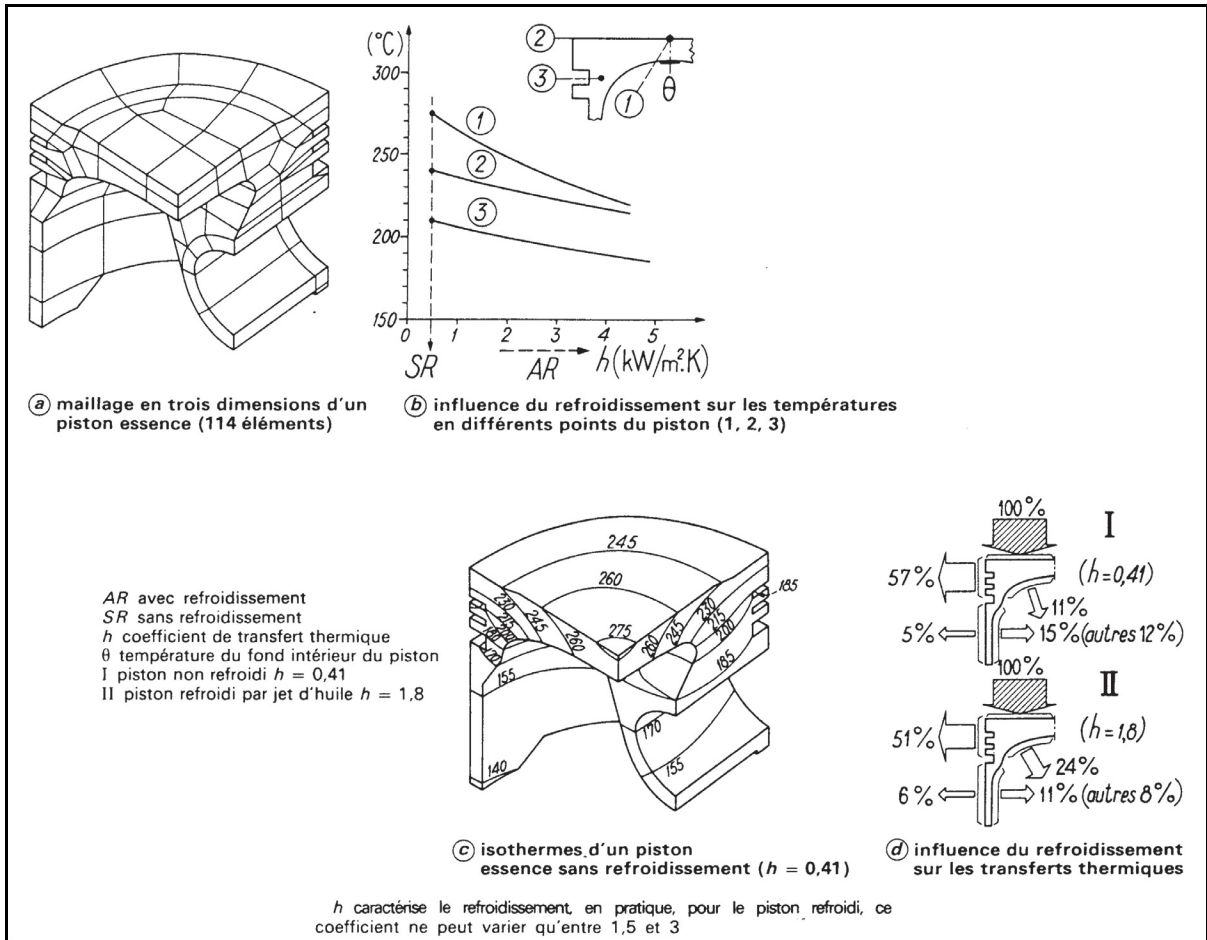


fig. P1.8. - Etude thermique conduite sur un piston Otto (1980) {Réf. 26}.

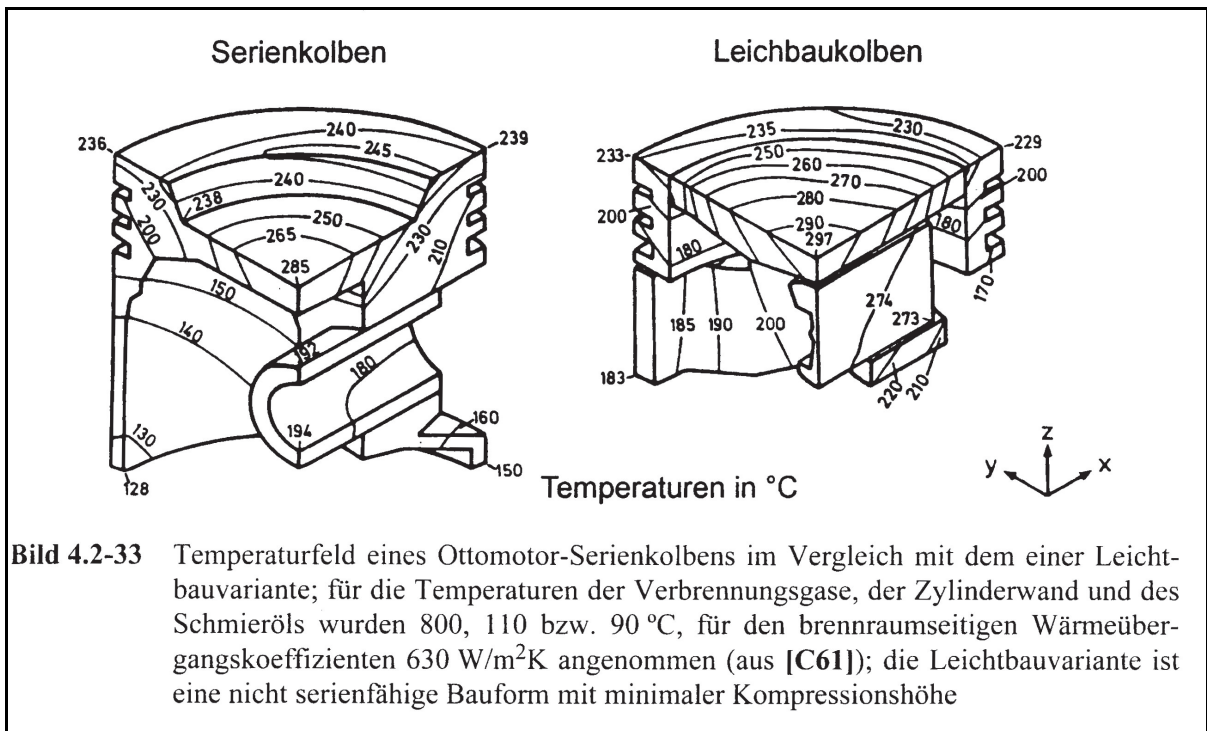


fig. P1.9. - {Réf. 31}

D'autre part, en partant de l'équation (éq. PI.126.) et si nous connaissons à l'avance la différence de température, en surface du fond du piston, entre le centre et l'extrémité, nous pouvons en déduire l'épaisseur minimale que la plaque doit avoir pour résister au flux de chaleur. Soit :

$$e_{\min} = \frac{\dot{q}}{4 \lambda (\bar{T}_{\max} - \bar{T}_R)} R^2 \quad (\text{éq. PI.129.})$$

Si nous posons que le coefficient de dilatation thermique α du matériau est constant, ce qui en pratique est quasi vrai, nous obtenons, après intégration, les diverses contraintes dues au flux thermique.

Remarque :

De part les hypothèses prises (température moyenne suivant l'épaisseur), les différentes contraintes thermiques sont constantes suivant l'épaisseur de la plaque.

A) Plaque libre (éq. PI.126.) dans (éq. PI.96.) (T étant le $\Delta T = \bar{T}_{\max} - \bar{T}_r$)

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{1}{16} \frac{E \alpha \dot{q}}{\lambda} \frac{R^2}{e} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \\ \sigma_c = -\frac{1}{16} \frac{E \alpha \dot{q}}{\lambda} \frac{R^2}{e} \left(1 - \frac{3r^2}{R^2}\right) \end{cases} \quad (\text{éq. PI.131.})$$

La contrainte radiale σ_r est maximale pour $r = 0$ (compression).

La contrainte circonférentielle σ_c est maximale pour $r = R$ (traction).

B) Plaque encastree (éq. PI.126.) dans (éq. PI.101.) (T étant le $\Delta T = \bar{T}_{\max} - \bar{T}_r$)

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{1}{16} \frac{E \alpha \dot{q}}{\lambda} \frac{R^2}{e} \left(\frac{3-\nu}{1-\nu} - \frac{r^2}{R^2}\right) \\ \sigma_c = -\frac{1}{16} \frac{E \alpha \dot{q}}{\lambda} \frac{R^2}{e} \left(\frac{3-\nu}{1-\nu} - \frac{3r^2}{R^2}\right) \end{cases} \quad (\text{éq. PI.135.})$$

La contrainte radiale σ_r est maximale pour $r = 0$ (compression)

La contrainte circonférentielle σ_c est maximale pour $r = 0$ (compression)

C) Commentaires :

Les contraintes maximales sont, pour un même rapport de densité de flux thermique \dot{q} , inversement proportionnelle à l'épaisseur e et proportionnelle au carré du rayon R [!].

On conçoit facilement que ces circonstances limitent de façon assez nette les diamètres réalisables pour les moteurs Diesel (où l'apport est le plus important) à pistons non refroidis.

En réalité, dans le cas du fond du piston, la condition $\sigma_r = 0$ (cas de la plaque libre) au raccordement avec la paroi cylindrique du piston n'est *pas* satisfaite, car la dilatation radiale s'y trouve entravée par ce cylindre. Ce dernier doit être étudié en tenant compte de sa propre dilatation thermique non uniforme et de cette tension σ_r , liée au déplacement radial u par les formules précédentes.

En première approximation, et pour simplifier les calculs, nous pourrions approcher la réalité par les formules de la plaque encastree.

Le calcul des températures dans la plaque qui constitue le fond du piston devrait s'effectuer dans deux cas pour lesquels la connaissance des tensions est la plus importante.

Le premier est celui du démarrage où l'on peut voir apparaître des tensions alternatives élevées près de la surface de la paroi exposée à un flux calorifique périodique intense. Nous en reparlerons sous le nom d'effet thermique pelliculaire; les tensions thermiques qui en résultent peuvent expliquer l'apparition de fissures.

Le second est celui du fonctionnement en régime, à une fréquence donnée, $\pi n/30$ hertz. Ici encore, il existe une contribution alternative de la température limitée à la pellicule supérieure, et importante du point de vue de la fatigue du matériau. Cette contribution vient s'ajouter à une répartition (quasi) permanente correspondant à l'évacuation du flux calorifique moyen \dot{q} , supposé quasi-constant, en ce sens, qu'à vitesse constante, on admet que la puissance développée varie peu ou lentement.

L'entretoisement du fond du piston par des nervures permet de réduire du tiers à la moitié l'épaisseur e .

1.1.2.3. Notes sur les théories simplifiées

{Réf. 16 et 17}

Le fait d'aborder les contraintes thermiques du fond du piston par des théories plus simples n'est pas adéquat. En effet, si nous supposons que la face externe du piston est soumise à un flux thermique constant, mais que la répartition de la température sur cette face est, non plus parabolique en fonction du rayon, mais constante, c'est-à-dire que la différence de température entre les deux faces de la plaque ($\Delta_i^e T$) est constante et indépendante de l'endroit où l'on se trouve (indépendante du rayon r), nous obtenons, en supposant que le plan moyen de la plaque peut se dilater mais que les extrémités sont encastrees si bien qu'elles ne peuvent tourner. Dans ce cas l'échauffement non uniforme créera des moments de flexion uniformément répartis le long des bords de la plaque. La valeur de ces moments sera telle qu'elle supprimera la courbure due à l'échauffement non uniforme, puisque c'est le seul moyen de satisfaire à la condition de l'encastrement du contour. Dès lors, on trouve pour une plaque encastree :

$$M_r = M_c = M = \frac{\alpha \Delta_i^e T E e^2}{12(1-\nu)}$$

et pour la contrainte maximum : $\sigma_{r \max} = \sigma_{c \max} = \frac{6 M}{e^2} = \frac{\alpha \Delta_i^e T E}{2(1-\nu)}$ (éq. **PI.144.**)

et si nous introduisons le flux \dot{q} au moyen de l'équation (**I.148.**), nous obtenons :

$$\sigma_{r \max} = \sigma_{c \max} = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{E \alpha \dot{q} e}{\lambda} \text{ (éq. PI.146.)}$$

contraintes indépendantes du rayon ! En conclusion, nous devrions avoir un fond de piston le plus mince possible (!), quelque soit le diamètre de celui-ci, ce qui est en désaccord total avec la pratique.

1.2.2.4. Notes sur le tracé des isothermes

Il est possible de tracer les différentes isothermes régnant dans l'épaisseur du fond du piston et ainsi vérifier ceux données par la solution éléments finis.

En effet il est intéressant de constater qu'au moyen des deux équations (éq **1.55.**) et (éq. **PI.126.**),

nous pouvons en déduire les différentes isothermes.

Connaissant l'épaisseur e , le diamètre du piston D et la température au centre T_{max} , l'équation (éq. **PI.126.**) nous donne la répartition de température sur la surface extérieure du fond du piston.

En première approximation, on pourrait utiliser la conservation du flux thermique sur une plaque plane afin de trouver la différence de température $\Delta_{e'}^s T$, en un endroit donné du fond du piston, entre celle existant à la surface et celle existant à une profondeur e' . Soit :

$$\Delta_{e'}^s T = -\frac{\dot{q}}{\lambda} e \quad (\text{éq. PI.148.})$$

Nous utiliserons d'abord l'équation (éq. **PI.126.**) pour déterminer à quel rayon l'isotherme recherché aboutit en "surface".

$$r = \sqrt{(T_{max} - T_r) \frac{4 \lambda e}{\dot{q}}} \quad (\text{éq. PI.149.})$$

Notations :

T_r	température régnant en surface du fond du piston, au rayon r	°C ou K
T_{max}	température maximum existant au centre du fond du piston (en $r = 0$)	°C ou K

Au moyen de l'équation (éq. **I.148.**), nous rechercherons à quelle profondeur e' se situe l'isotherme recherché.

$$e' = \frac{\lambda}{\dot{q}} (T_r - T_{e'}) \quad (\text{éq. PI.151.}) \quad (\text{\AA revoir})$$

Notations :

T_r	température régnant en surface du fond du piston, au rayon r	°C ou K
$T_{e'}$	température de l'isotherme recherché	°C ou K
e'	profondeur à laquelle se trouve l'isotherme recherché	mm

Ainsi, de proche en proche, pour différents rayons r et différentes isothermes, nous tracerons la carte des isothermes régnant dans l'épaisseur du fond du piston.

Dans notre exemple T_r est la température régnant en surface à $r = 0$ (ici $T_r = T_{max}$)
 $T_{e'} = 300^\circ C$ (isotherme recherché).

L'équation (éq. **PI.149.**) nous donnera la profondeur à laquelle passe l'isotherme de $300^\circ C$ au centre de la tête du piston.

1.2.3. Combinaison des effets de pression et de tensions thermiques

Dans ce qui précède, nous avons considéré séparément l'effet des dilatations thermiques et celui de la pression. En pratique on pourra ici superposer les répartitions de tension qui leur correspondent. Strictement parlant, il se produit une interférence, en ce sens que la déformation par flexion est elle-même influencé par la présence des contraintes radiales dans le plan du disque, tandis que cette même déformation peut faire décroître ces mêmes contraintes radiales. Ce dernier effet est du second ordre pour une flèche petite par rapport au diamètre. Quant à l'effet des contraintes radiales on peut montrer qu'il est négligeable pour des disques relativement épais, tels que ceux constitués par le fond des pistons.

1.2.3.1. Interférence

{Réf. 4}

En effet, l'équation d'équilibre (éq. 1.9.) Prend alors la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{1}{r^2} \theta = -\frac{1}{D_r} \left(\frac{p r}{2} - e \sigma_r \theta \right) \quad (\text{éq. P1.155.})$$

où le dernier terme donne la contribution à l'effet tangentiel V , due à l'inclinaison θ de la face sur laquelle agit l'effort normal $e \sigma_r$.

Si on pose : $r = x R$ avec ($r/R \leq x \leq 1$)

L'équation de la contrainte thermique σ_r pour une plaque encadrée (éq. P1.135.)

$$\sigma_r = -\frac{1}{16} \frac{E \alpha \dot{q}}{\lambda e} R^2 \left(\frac{3-\nu}{1-\nu} - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

devient, sachant que $D_r = \frac{E e^3}{12(1-\nu^2)}$:

$$\sigma_r = -D_r \frac{3}{4} \frac{\alpha \dot{q}}{\lambda e^4} R^2 \left(\frac{3-\nu}{1-\nu} - x^2 \right) (1-\nu^2) \quad (\text{éq. P1.161.})$$

En introduisant (éq. P1.126.) pour $r = R$: $T_{\max} - \bar{T}_r = \frac{\dot{q}}{4 \lambda e} R^2$, ($T_{\max} - T_R = \Delta T_{\text{moyen}}$ entre le centre et l'extrémité de la plaque) la contrainte σ_r devient :

$$\sigma_r = -D_r \frac{3 \alpha}{e^3} (T_{\max} - T_R) \left(\frac{3-\nu}{1-\nu} - x^2 \right) (1-\nu^2)$$

En posant : $K = \frac{3 \alpha R^2 (1-\nu^2)}{e^2} (T_{\max} - T_R)$ (éq. P1.166.) on obtient :

$$\sigma_r = -\frac{K D_r}{e R^2} \left(\frac{3-\nu}{1-\nu} - x^2 \right) \quad (\text{éq. P1.167.})$$

En adoptant la répartition des contraintes thermiques ci-dessus, l'équation (éq. P1.155.) s'écrit (sachant que $r = x R$) :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dx} - \frac{1}{x^2} \theta + \theta K D_r \left(\frac{3-\nu}{1-\nu} - x^2 \right) = -\frac{p R^3 x}{2 D_r} \quad (\text{éq. P1.169.})$$

Remarque :

Dans le cas d'une plaque appuyée sur le pourtour $\frac{3-\nu}{1-\nu}$ devient 1.

Comme le coefficient K est petit, la méthode des perturbations est applicable; si l'on écrit :

$$\theta = \theta_0 + K \theta_1 + K^2 \theta_2 + \dots$$

et substitue dans (éq. **PI.19.**), l'identification en fonction des puissances de K donne, par résolution successive des équations correspondantes, et en ne retenant ici que la première puissance de K :

$$\theta = A' x \left(1 - \frac{K x^2}{8} \left(1 - \frac{x^2}{3} \right) + \dots \right) + \frac{B'}{x} \left(1 - \frac{K x^2}{2} \left(\ln(x) - \frac{x^2}{4} \right) + \dots \right) - \frac{p R^3}{16 D_r} x^3 \left(1 - \frac{K x^2}{24} \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) + \dots \right)$$

que l'on peut comparer avec (éq. **PI.13.**); ainsi la condition d'encastrement d'un disque plein $\theta = 0$ en $x = 0$ et $x = 1$ donne :

$$\begin{cases} A' = \frac{p R^3}{16 D_r} \left(1 + \frac{K}{16} + \dots \right) \\ B' = 0 \end{cases}$$

et donc :

$$\theta = \frac{p R^2 r}{16 D_r} \left(1 + \frac{K}{16} \right) + \frac{p r^3}{16 D_r} \left(1 - \frac{K x^2}{24} \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) + \dots \right) \quad (\text{éq. PI.177.})$$

(A comparer avec (éq. **PI.20.**))

Ces considérations montrent que les tensions dans le plan du disque n'ont une influence sur la flexion que s'il s'agit d'une plaque très mince, mettons, dans le cas usuel, d'une épaisseur relative $e/R = 50^{-1} \dots 100^{-1}$. Notons que K croît avec le carré de R/e .

1.1.3.2. Combinaison de contraintes

En fait, en combinant les expressions (éq. **PI.23.**) de $\sigma_{r \text{ pression}}$ et (éq. **PI.135.**) pour $\sigma_{r \text{ thermique}}$ on obtient :

$$\sigma_{r \text{ tot}} = - \left| \sigma_{r \text{ th}} \right| \pm \left| \sigma_{r \text{ pression}} \right|$$

Sachant de plus que $T_{\max} - \bar{T}_R = \frac{\dot{q}}{4 \lambda e} R^2$, l'expression finale devient :

$$\sigma_{r \text{ tot}} = - \frac{E \alpha (T_{\max} - \bar{T}_R)}{4} \left(\frac{3-\nu}{1-\nu} - \frac{r^2}{R^2} \right) \pm \frac{3p}{8} (1+\nu) \frac{R^2}{e^2} \left(1 - \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} \right) \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (\text{éq. PI.182.})$$

(- pour la face externe et + pour la face interne)

Ceci montre que la valeur de la contrainte est d'autant plus grande que la différence de température entre le centre et l'extrémité de la plaque est plus grande.

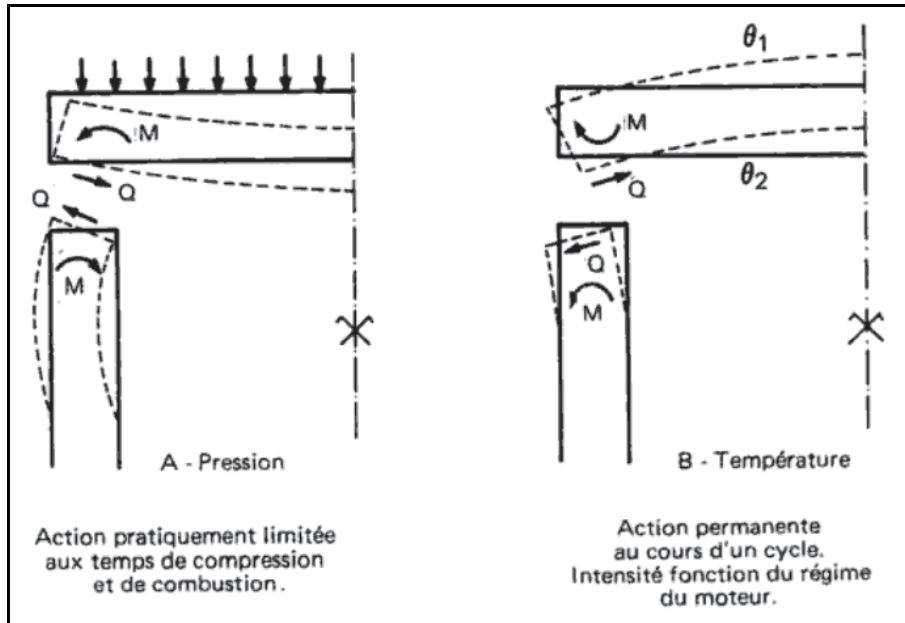


fig. P1.10. - {Réf. 1}

On n'oubliera pas d'effectuer la vérification tant pour les contraintes radiales que circonférentielles. Soit, von Mises :

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_c^2 + (\sigma_r - \sigma_c)^2} \leq \sigma_{adm}$$

1.1.4. Dilatation du fond du piston

Il serait intéressant de connaître la variation de diamètre de la tête du piston, afin de pouvoir déterminer la tolérance du jeu piston / alésage.

Dans le cas du fond du piston nous devons considérer deux genres de dilatation. Le fond du piston est tout d'abord porté de manière uniforme de la température ambiante (à froid) jusque $\pm 220 \dots 240 \text{ }^\circ\text{C}$ (température régnant à l'extrémité du fond du piston) et ensuite il existe une dilatation due à la variation parabolique de la température.

Examinons chaque cas séparément.

1.1.4.1. Dilatation due à l'élévation globale de température

Si on élève la température du fond du piston de la température ambiante ($T_a \approx 20 \text{ }^\circ\text{C}$) à la température minimale existante sur le fond du piston, soit la température en $r = R$: $T_R \approx \dots 240 \text{ }^\circ\text{C} \dots$, la dilatation pour un disque *libre de se dilater* sera :

$$\frac{\Delta D_1}{D} = \alpha_{\text{piston}} (T_R - T_a) \quad (\text{éq. PI.187.})$$

1.1.4.2. Dilatation due à la variation parabolique de la température

{Réf. 4}

Le déplacement u correspondant à la partie parabolique de la température de la température au fond du piston sera, pour un disque libre de se dilater en périphérie, **éq. I.95.** :

$$u = \frac{(1 + \nu)}{r} \int \alpha T r dr + \frac{(1 - \nu) r}{R^2} \int_0^R \alpha T r dr \quad (\text{éq. PI.188.})$$

Pour $r = R$, on a en périphérie l'expansion due à la moyenne de T (sur l'épaisseur de la plaque) (soit \bar{T}) :

$$u_R = \frac{2}{R} \int_0^R \alpha \bar{T} r dr$$

Avec (**éq. PI.126.**) :

$$\bar{T} = \frac{\dot{q} (R^2 - r^2)}{4 \lambda e}$$

Sachant que, comme on calcule *uniquement* la dilatation due à la variation parabolique de température, on prendra $\bar{T}_R = 0$ dans l'équation (**éq. PI.126.** et **(2)**) .

D'où :

$$u_R = 2 \frac{\alpha}{R} \int_0^R \frac{\dot{q} (R^2 - r^2)}{4 \lambda e} r dr = \frac{\alpha \dot{q} R^3}{8 \lambda e} \quad (\text{éq. PI.194.})$$

Si on veut la dilatation en fonction des températures de bord et de centre de la plaque, on remplace, dans l'équation ci-dessus, \dot{q} au moyen de l'équation **éq. PI.126.** On trouve :

$$u_R = \frac{\alpha R}{2} (\bar{T}_{r=0} - \bar{T}_{r=R})$$

et la dilatation totale du disque vaut :

$$\frac{\Delta D_2}{D} = 2 u_R = \frac{\alpha_{piston}}{2} (\bar{T}_{r=0} - \bar{T}_{r=R}) \quad \text{(éq. P1.197.)}$$

1.1.4.3. Dilatation totale et jeux

La dilatation totale du fond du piston sera la somme des deux dilatations, soit :

$$\frac{\Delta D_{tot}}{D} = \frac{\Delta D_1 + \Delta D_2}{D} = \alpha_{piston} (T_R - T_a) + \frac{\alpha_{piston}}{2} (\bar{T}_{r=0} - \bar{T}_{r=R}) \quad \text{(éq. P1.198.)}$$

Il faudrait calculer la dilatation des cylindres aussi. Cependant, lorsque le moteur est froid, au démarrage, le piston dilate immédiatement (faible masse) en rapport au cylindre (masse plus importante) surtout s'il est chemisé fonte (dilatation longue). Le piston augmente de volume (diamètre plus important), le cylindre doit aussi augmenter de volume, mais plus lentement que le piston. Si l'on accélère moteur froid, le piston dilate très rapidement, le cylindre lui, n'a pas encore dilaté...

Conséquence : pour calculer le jeu *minimum* il *ne faut pas tenir compte* de la dilatation du cylindre.

Il conviendra de vérifier que :

$$j_{piston\ alésage} \geq \Delta D_{tot}$$

Le jeu existant entre le diamètre de la tête de piston et l'alésage est égal à :

$$j_{piston\ alésage} \approx 0.007 D \quad \text{Pour un moteur Diesel} \quad \{Réf. 1\}$$

$$j_{piston\ alésage} \approx 0.002 D \dots 0.004 D \quad \text{Pour un moteur Otto} \quad \{Réf. Popa\}$$

En général, le jeu à chaud j_c est de l'ordre de $4 \cdot 10^{-4} D_c$. La chemise est en général alésée à froid avec la tolérance H6 et l'ajustement à chaud entre le piston et la chemise doit correspondre approximativement à une tolérance H6f7 ou H6g6. Si la répartition linéaire des températures de la chemise et du piston est connue, il est possible de calculer le jeu à froid pour la couronne du piston, pour le diamètre sous le segment racleur d'huile et pour le bas de la jupe.

Le jeu entre le cylindre et le piston est défini sur la figure **fig. P1.11.** Ces jeux doivent être augmentés de 33 % dans le cas d'un moteur fonctionnement avec un régime variable.

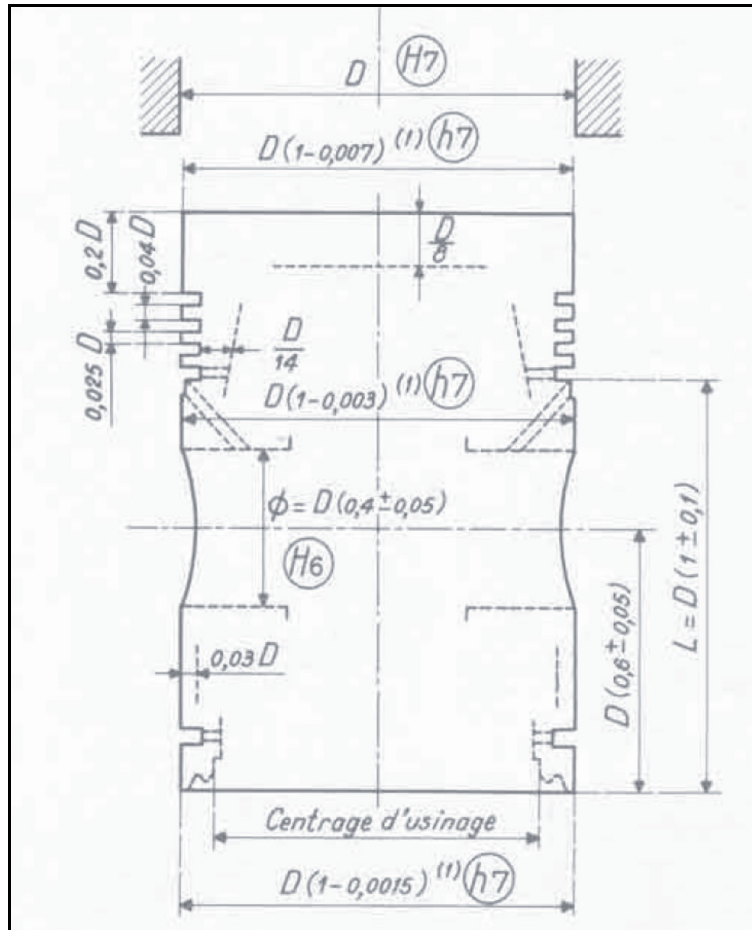


fig. P1.11. - "Gros" Diesel. {Réf. 26}

1.1.4. Effet pelliculaire thermoélastique

{Réf. 29}

Il est facile de vérifier qu'aux fréquences élevées de variations de flux thermique correspondant aux nombres de tours habituels des moteurs, les fluctuations de température, et donc aussi les effets thermoélastiques qui les accompagnent, ne se manifestent de façon sensible qu'à des profondeurs très faibles dans le matériau, qu'il s'agisse d'ailleurs des parties mobiles (piston) ou des parties fixes (cylindre et culasse)

Sans rentrer dans le détail des formulations mathématiques (voir *cours de dynamique des systèmes thermiques*), nous pouvons conclure que tout se passe comme s'il se propageait des ondes de température à amplitudes décroissantes, déphasées dans le temps.

Comme les équations qui régissent le problème du transfert thermique sont linéaires, on peut considérer séparément l'effet des différentes harmoniques de la série de Fourier qui représente la variation périodique (de période $2\pi/\omega$) de la température du fluide au voisinage de la paroi exposée au gaz.

La solution de ce système est :

$$T_{(z,t)} - \bar{T}_f = \Delta T_f M e^{-\beta_n z} \cos(n \omega t - (N + \beta_n z)) \quad (\text{éq. P1.204.})$$

avec :

$$M = \frac{1}{\sqrt{1 + 2k_n + 2k_n^2}} \quad \text{et} \quad N = \text{arctg}\left(\frac{k_n}{k_n + 1}\right)$$

$$\beta_n = \sqrt{\frac{n\omega}{2a}} \quad \text{et} \quad k_n = \beta_n \frac{\lambda}{h}$$

Notations : n $n = 1, 2, \dots$ selon l'harmonique

ΔT_f amplitude de la température du fluide $\left(\frac{T_{f \max} - T_{f \min}}{2}\right)$

\bar{T}_f température moyenne du fluide $\left(\frac{T_{f \max} + T_{f \min}}{2}\right)$

a diffusivité thermique du matériau $a = \frac{\lambda}{\rho c}$

λ : coefficient de conductivité thermique W/mK
 ρ : masse volumique kg/m^3
 c : chaleur massique J/kgK

La température moyenne du fluide est donc prise comme référence. C'est-à-dire que l'on considère la température initiale du solide égale à la température moyenne du fluide.

On comprend mieux le sens physique des paramètres M et N si, dans l'équation (éq. P1.204.), on fait $z = 0$, de façon à obtenir la température de surface :

$$T_{(0,t)} - \bar{T}_f = \Delta T_f M \sin(n \omega t - N) \quad (\text{éq. P1.212.})$$

Ceci exprime que la température en surface subit une loi harmonique de même période T_v que celle de la température du fluide mais avec un déphasage (en angle) égal à N et un déphasage (en temps) égal à N/ω . De plus, l'amplitude en surface ($\Delta T_f M$) de la température du solide a été réduite par rapport à celle de la température du fluide ambiant, par suite de la présence du facteur M , inférieur à l'unité.

On voit de même qu'en $z = 0$, le retard de l'oscillation de température sur celle de ($T_{(z,t)} - \bar{T}_f$) est ($N + \beta_n z$) en angle, ou encore cette même expression divisée par ω , en temps.

Enfin, les équations précédentes permettent aussi de constater que la température de surface suit d'autant mieux la température du fluide que la valeur du nombre (π/k_n^2) est grande, en particulier si h est grand ou si λ est petit. Également, le terme exponentiel de l'équation (éq. **PI.204.**) montre à nouveau que la pénétration d'une onde (amplitude) est d'autant plus profonde que la fréquence $1/T_v$ est faible. Dans le cas d'une excitation non plus harmonique mais quelconque (série de Fourier), ceci conduit à dire que les oscillations de haute fréquence sont rapidement amorties par rapport aux faibles harmoniques ou à l'harmonique fondamental.

La théorie précédente est particulièrement importante dans l'étude des moteurs à combustion interne où les gaz chauds, et variant de façon périodique en température, n'endommagent pas les parois du cylindre par suite de l'amortissement considérable des températures (faible valeur de M).

Calculons l'amplitude de température en surface d'un piston en aluminium d'un moteur 4 temps tournant à 4000 t/min. Le coefficient de convection gaz-piston peut-être estimé à 550 W/m²K, le coefficient de diffusivité de l'aluminium est de l'ordre de 8.037 10⁻⁵ m²/s. ($\lambda = 204$ W/mK ; $c = 960$ J/kgK ; $\rho = 2700$ kg/m³).

Solution :

Cela revient à calculer le facteur M . Calculons le pour la première harmonique ($n = 1$).

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{n \omega}{2 a}} = \sqrt{\frac{1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2 \pi 4000}{60}}{2 \times 8.038 \cdot 10^{-5}}} = 1141.4 \text{ m}^{-1}$$

$$k_1 = \beta_1 \frac{\lambda}{h} = 1141.4 \times \frac{204}{550} = 423.4$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 k_1 + 2 k_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \times 423.4 + 2 \times 423.4^2}} = 0.00167 \approx 0.17 \%$$

Remarque :

Dans le cas d'un moteur à 4 temps, la fréquence des pulsations est divisée par 2.

$M = 0.17 \%$ étant très faible il en va, de même pour l'amplitude de la variation de température (harmonique fondamental) de la paroi en surface ($\Delta T_f M$). Ainsi, si

$\Delta T_f = 800^\circ \text{C}$, l'amplitude en surface du fondamental vaut :

$$\Delta T_f M = 800 \times 0.00167 = 1.34^\circ \text{C}$$

Autrement dit, la paroi ne suit pas la variation de température des gaz. Et c'est encore plus vrai pour les harmoniques d'ordre supérieur. Dans les calculs de transfert de chaleur vers le cylindre ou le piston, on peut donc prendre comme température des gaz sa température moyenne \bar{T}_f supposée constante.

Il s'agit bien d'un effet "pelliculaire" analogue à celui de la répartition de l'intensité du courant alternatif dans un conducteur électrique. Mais la profondeur de pénétration de ce champ est inversement proportionnelle à la fréquence de variation de la température et proportionnel à la diffusivité du matériau. Il s'ensuit que, dans un moteur thermique à piston un tant soit peu rapide, les oscillations de température des structures, dues aux variations cycliques inhérentes à la combustion, sont pratiquement nulles à un millimètre de profondeur, amis que les variations de régime provoquent des variations de température beaucoup plus importantes en amplitude, variations qui pénètrent beaucoup plus profondément et sont, de ce fait, plus nocives. La plus nocive de ces variations de régime s'avère être le retour rapide au ralenti après un fonctionnement continu à pleine charge. Nous percevons donc que les moteurs fonctionnant à régime variable sont soumis à des épreuves beaucoup plus sévères que les mêmes moteurs utilisés à régime constant.

Quant aux tensions thermoélastiques qui accompagnent ces variations périodiques de température, nous pouvons les évaluer, en ne considérant *que les contraintes dues à la température*, par la relation suivante (contrainte de compression en superficie de la paroi) :

$$\sigma_r = \sigma_c = - \frac{E \alpha (\Delta T_f M)}{(1 - \nu)} \quad \text{(éq. P1.227.)}$$

En effet, de par la loi de Hooke généralisé, nous avons :

{Réf. 4}

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \left(\frac{1}{E} (\sigma_r - \nu (\sigma_c - \sigma_z)) \right) + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_c = \left(\frac{1}{E} (\sigma_c - \nu (\sigma_r - \sigma_z)) \right) + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_z = \left(\frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_r - \sigma_c)) \right) + \alpha \Delta T \end{cases}$$

σ : représente les contraintes mécaniques;

ε : représente les allongements totaux (due aux contraintes mécaniques et à la différence de température).

Hypothèses :

[H1] : plaque mince, d'où : $\sigma_z = 0$

[H2] : milieu semi infini (encastrement sur le, pourtour), d'où : $\varepsilon_c = \varepsilon_r = 0$

Les équations deviennent :

$$\sigma_r = \sigma_c = - \frac{E \alpha \Delta T (1 + \nu)}{(1 - \nu^2)} = - \frac{E \alpha \Delta T}{(1 - \nu)} \quad \text{(contrainte de compression)}$$

Et dans notre cas :

$$\Delta T \mapsto \Delta T_f M$$

Nous noterons que les fluctuations de cette contrainte épidermique de compression peut atteindre une amplitude importante dans le cas où le matériau serait “*mauvais*” conducteur de chaleur, par contre dans un moteur relativement rapide ces contraintes sont relativement faibles. C’est pourquoi, il faudrait, non seulement les calculer à régime nominal maximum, mais aussi au ralenti. Ce calcul permettra de calculer le piston à la fatigue.