

## AVERTISSEMENT

*Les notes ci-après, relatives à la modélisation des différents organes sont données à titre exemplatif, et ne constituent nullement un mode de calcul obligé.*

<i>CHAPITRE 1. CONCEPTION ET VÉRIFICATION DES CONTRAINTES DU PISTON . . . . .</i>	<i>- P3.1 -</i>
<i>FICHE PISTON 3 : AXE du PISTON . . . . .</i>	<i>- P3.1 -</i>
<i>1.3. Etude de l'axe du piston : Recherche des contraintes mécaniques . . . . .</i>	<i>- P3.1 -</i>
<i>1.3.1. Flexion statique (dans le plan longitudinal) . . . . .</i>	<i>- P3.1 -</i>
<i>1.3.2. Flexion statique (dans le plan transversal) . . . . .</i>	<i>- P3.3 -</i>
<i>1.4.3. Calcul de la contrainte équivalente . . . . .</i>	<i>- P3.6 -</i>
<i>1.2.3. Contraintes et déformations admissibles . . . . .</i>	<i>- P3.7 -</i>
<i>1.3.4. Répondre à l'impératif d'une lubrification suffisante . . . . .</i>	<i>- P3.9 -</i>
<i>1.3.5. Vérification de la tenue des bossages . . . . .</i>	<i>- P3.10 -</i>

## CHAPITRE 1. CONCEPTION ET VÉRIFICATION DES CONTRAINTES DU PISTON

### FICHE PISTON 3 : AXE du PISTON

La détermination de l'axe du piston doit répondre à plusieurs exigences :

- ▶ résistance aux efforts exercés :
  - calcul à la flexion et cisaillement statique;
  - calcul à la fatigue.
- ▶ une lubrification suffisante de l'assemblage avec le piston et la bielle.
- ▶ avoir un jeu radial et un jeu latéral réduit, mais suffisant.
- ▶ accepter des déformations diamétrales compatibles dans le sens vertical et horizontal.
- ▶ détermination des contraintes de cisaillement, dans les zones situées entre le pied de bielle et les bossages du piston.

#### **1.3. Etude de l'axe du piston : Recherche des contraintes mécaniques**

{Réf. 6}

Nous allons rechercher deux types de contraintes (et de déformations). D'une part les contraintes longitudinales dues à la flexion de l'axe dans le corps de l'axe, et d'autre part les contraintes transversales dues à la déformation ou l'ovalisation.

##### **1.3.1. Flexion statique (dans le plan longitudinal)**

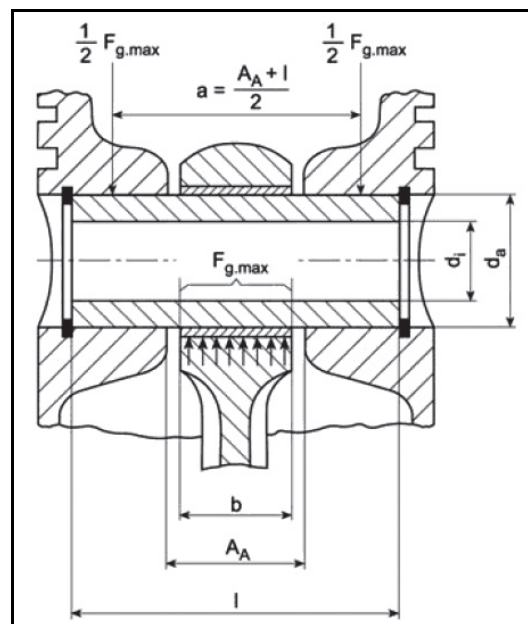
###### **A) Contrainte longitudinale**

###### **A.1) Approche classique RM**

{Réf. 6}

Hypothèses :

- [H1] La répartition des efforts réactifs exercés par le coussinet du pied de bielle est supposée uniforme;
- [H2] La transmission des efforts dus aux gaz de combustion, par les portées du piston à l'axe est schématisée par deux forces ponctuelles ( $F_{\max}/2$ );
- [H3] Nous considérerons l'axe comme une poutre sur deux appuis.



*fig. P3.1. - {Réf. 37}*

<u>Notations :</u>	$a$	= $l'$ : la longueur entre appuis	$mm$
(fig. P3.1.)	$b$	= $l_{pb}$ : la largeur du pied de bielle	$mm$
	$l$	= $l_{axe}$ : longueur de l'axe	$mm$

Recherchons la contrainte maximale (au centre de l'axe). Sachant que le moment fléchissant maximum pour ce type de chargement est :

$$M_{f \max} = \frac{F_{\max}}{4} \left( l' - \frac{l_{pb}}{2} \right) \text{ et si nous remplaçons } l' \text{ par : } l' = \frac{l_{axe} + AA}{2}$$

le moment fléchissant devient :

$$M_{f \max} = \frac{F_{\max}}{8} (l_{axe} + AA - l_{pb}) \approx \frac{F_{\max} l_{axe}}{8} \quad (\text{éq.P3.4.}) \quad Nmm$$

et ainsi, sachant que :  $F_{\max} = p_{\max} \frac{\pi D^2}{4}$ , nous trouvons la contrainte maximale longitudinale  $\sigma_{\max \text{ long}}$ , soit :

$$\sigma_{\max \text{ long}} = p_{\max} \frac{k_l}{k_D^3 (1 - k_d^4)} \quad (\text{éq.P3.6.}) \quad N/mm^2$$

<u>Notations :</u>	$p_{\max}$	pression maximum dans la chambre de combustion	$N/mm^2$
	$\sigma_{\max \text{ long}}$	contrainte maximum longitudinale pour l'axe du piston	$N/mm^2$

## A.2) Approche basée sur la méthode Schlaefke

{Réf. 31}

La contrainte maximale longitudinale est donnée par :

$$\sigma_{\max \text{ long}} = k_\gamma \frac{F_{\max} l'}{4 W_x} \quad (\text{éq.P3.7.})$$

avec :  $W_x = \frac{\pi}{32} d_{\text{ext axe}}^3 (1 - k_d^4) = \frac{I_x}{d_{\text{ext axe}}/2}$  (éq.P3.8.) module de résistance, et :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_\gamma = \left( 1 - \frac{l_{pb}^2}{2 l'^2} + \frac{l_{pb}^3}{8 l'^3} \right) \quad (\text{exact}) \\ k_\gamma \approx \left( 1 - \frac{l_{pb}}{2 l'} \right) \quad (\text{approché}) \end{array} \right. \quad (\text{éq.P3.9.})$$

## B) Cisaillement

{Réf. 6}

La contrainte maximale de cisaillement, associée à la flexion longitudinale, est donnée par la formule suivante : à voir, à faire (?) {réf. 6}

### C) Recherche de la flèche

#### C.1) Approche basée sur la méthode Schlaefke

Nous rechercherons ensuite la flèche maximale  $f_{max}$  :

$$f_{max} = k_{\gamma} \frac{F_{max} l^3}{48 E I_x} \quad (\text{éq. P3.10.})$$

{Réf. 27 et 31}

Notation :  $I_x$  inertie de la section annulaire de l'axe du piston  $mm^4$   
 $k_{\gamma}$  coefficient (éq. 3.9) -

L'inertie est donné par :

$$I_x = \frac{\pi}{64} d_{ext\ axe}^4 (1 - k_d^4) \quad (\text{éq. P3.11.})$$

#### C.2) Calcul simplifié

$$f_{max} \approx \frac{0.12}{E} \frac{F_{max} l_{axe}^3}{(d_{ext\ axe}^4 - d_{int\ axe}^4)} \quad (\text{éq. P3.12.})$$

{Réf. 1 et 25}

### 1.3.2. Flexion statique (dans le plan transversal)

#### A) Contrainte transversale

##### A.1) Approche classique RM

L'axe du piston est la pièce du moteur la plus sollicitée aux efforts alternés; l'examen d'axes rompus confirme l'importance des contraintes dues à l'écrasement et la relativement faible valeur des contraintes de cisaillement.

Ces efforts se développent selon une génératrice à partir des deux tranches situées entre les bossages du piston et le pied de bielle (voir tranche 2, 3 et 4, 5 de la figure **fig. P3.2.**).

C'est à cet endroit que précisément l'axe est soumis aux efforts d'ovalisation les plus importants. C'est à partir d'une de ces tranches que se développent, selon une génératrice de l'axe, les éventuelles ruptures par écrasement.

L'axe est soumis à d'importantes contraintes d'extension et de compression : les premières sont maximales sur la génératrice extérieure supérieure, les secondes le sont sur les génératrices intérieures situées dans le plan horizontal. (Voir figure **fig. P3.2.**).

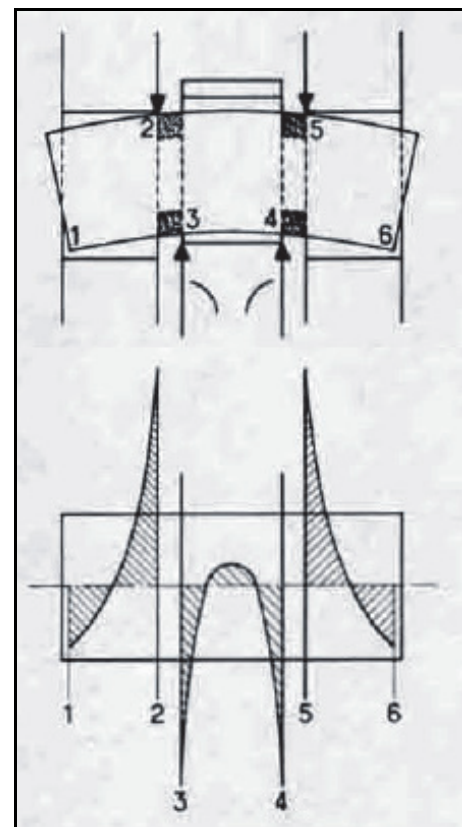


fig. P3.2. -

Les contraintes transversales, ainsi que les déformations, dues à l'ovalisation de la section, peuvent être mises en évidence par la théorie des anneaux à fortes courbures. Et dans ce cas nous trouvons les différentes valeurs du moment fléchissant, de l'effort tranchant et de l'effort de traction. Soit :

$$M_f = \frac{(F_{\max}/2) \bar{r}_{axe}}{2} \left( \cos \varphi - \frac{2}{\pi} + \frac{2e}{\pi \bar{r}_{axe}} \right) \quad (\text{éq. P3.13.}) \quad \{Réf. 17 \text{ et } 6\}$$

$$N = + \frac{F_{\max}}{2} \cos \varphi \quad \text{et} \quad V = - \frac{F_{\max}}{2} \sin \varphi$$

<u>Notations :</u>	$F_{\max}$	effort maximum du à la pression d'explosion	$N$
	$\bar{r}_{axe}$	rayon moyen de l'axe	$m$
	$r_{ext \text{ axe}}$	rayon extérieur de l'axe	$m$
	$r_{int \text{ axe}}$	rayon intérieur de l'axe	$m$
	$\varphi$	variable (voir figure Pc 9)	$rad$
	$e$	excentricité (distance entre l'axe neutre et le centre de gravité de la section)	$m$

Pour une section *rectangulaire* :  $e = \frac{(r_{ext \text{ axe}} - r_{int \text{ axe}})^2}{12 \bar{r}_{axe}}$

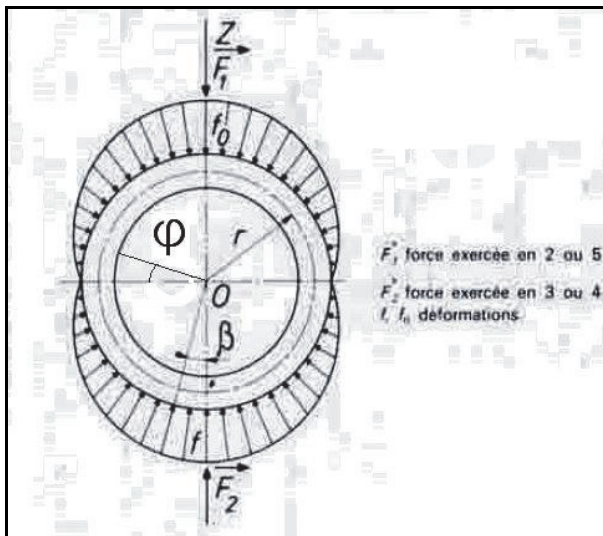


fig. P3.3. -

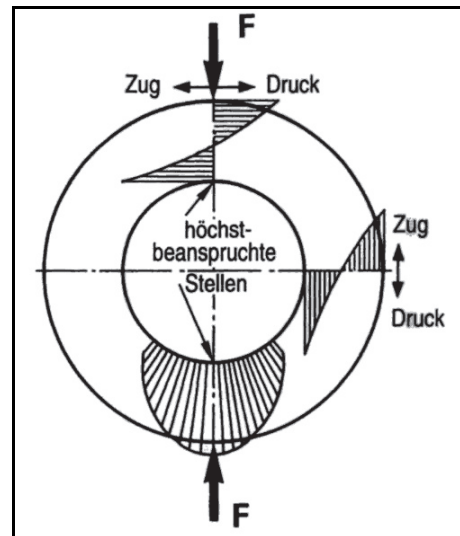


fig. P3.4. -

Nous aurons la section la plus contrainte pour  $\varphi = 90^\circ$ .

Il s'agira maintenant de calculer les différentes contraintes par les formules des barres à fortes courbures. (*Annexe 6*)

### A.2) Approche basée sur la méthode Schlaefke

{Réf. 31}

La contrainte maximale transversale (contrainte d'ovalisation) nous est donné par :

$$\sigma_{\max trans} = \frac{F_{\max} \bar{r}_{axe}}{8 W_z} \quad (\text{éq.P3.19.})$$

avec : 
$$W_z = \frac{I_z}{\left(d_{ext\ axe}/2\right) - \bar{r}_{axe}} \quad (\text{éq.P3.20.}) \quad \text{module de résistance}$$

et : 
$$I_z = \frac{l_{axe}}{12} \left( \frac{d_{ext\ axe} - d_{int\ axe}}{2} \right)^3 = \frac{l_{axe}}{96} (d_{ext\ axe} - d_{int\ axe})^3 \quad (\text{éq.P3.21.}) \quad \text{moment d'inertie}$$

Sachant que le rayon moyen de l'axe est :

$$\bar{r}_{axe} = \frac{d_{ext\ axe} + d_{int\ axe}}{4} \quad (\text{éq.P3.22.})$$

## B) Recherche de la déformation transversale (ovalisation)

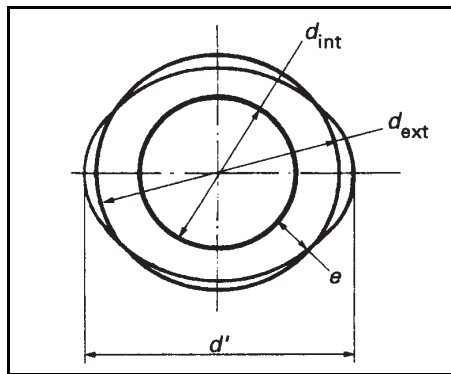


fig. P3.5. - Ovalisation de l'axe du piston.

### B.1) Approche classique RM

{Réf. 10}

Quant à la formulation de la déformation (l'écrasement)  $\delta$  (dans le sens diamétral), nous avons :

$$\delta = \frac{(F_{\max}/2) \bar{r}^2}{A_l E e} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{e^2}{\bar{r}^2} \right) + \frac{2e}{\bar{r}} \left( \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{e}{\bar{r}} \right) - \frac{\pi}{8} \right) + \frac{\pi k_\tau}{4} \frac{E e}{G \bar{r}} \right) \quad (\text{éq.P3.23.})$$

<u>Notations :</u>	$E$	module d'élasticité longitudinal	$N/mm^2$
	$G$	module d'élasticité transversal	$N/mm^2$
	$A_l$	section longitudinale de l'axe	$mm^2$
	$\bar{r}$	rayon moyen	$mm$
	$e$	épaisseur	$mm$
	$k_\tau$	coefficient de forme en cisaillement	-

### B.2) Approche basée sur la méthode Schlaefke

{Réf. 31 & 27}

$$\delta = d' - d_{ext\ axe} = \frac{F_{\max} \bar{r}_{axe}^3}{12 E I_z} \quad (\text{éq.P3.25.})$$

Avec  $I_z$  valant : voir (éq.1.21.).

### B.3) Calcul simplifié

Un calcul simplifié de l'ovalisation (voir figure fig. P3.5.) :

$$\delta = d' - d_{ext\ axe} \approx \frac{0.416}{E} \frac{F_{max} d_{ext\ axe}^3}{l_{axe} (d_{ext\ axe} - d_{int\ axe})^3} \quad (\text{éq.P3.26.}) \quad \{Réf. 25 \& 1\}$$

### 1.4.3. Calcul de la contrainte équivalente

#### A) Approche basée sur la méthode Schlaefke

Il suffit d'utiliser la relation de von Mises.

$$\sigma_{\acute{e}q} = \sqrt{\sigma_{max\ long}^2 + \sigma_{max\ trans}^2 - \sigma_{max\ long} \sigma_{max\ trans}} \quad (\text{éq.P3.27.})$$

#### B) Calcul simplifié

Dans la littérature on trouve une formule approchée qui donne directement la contrainte équivalente maximale. Soit :

$$\sigma_{\acute{e}q} \approx 0.4 p_{s\ axe} \left( \frac{2 d_{ext\ axe}}{d_{ext\ axe} - d_{int\ axe}} \right)^2 \quad (\text{éq.P3.28.}) \quad \{Réf. 1\}$$

Notation :  $p_{s\ axe}$  pression spécifique s'exerçant sur l'axe du piston  $N/mm^2$

### 1.2.3. Contraintes et déformations admissibles

Il s'agira de comparer la contrainte équivalente  $\sigma_{eq}$  à la contrainte admissible du matériau de l'axe. Les différentes contraintes admissibles en fonction des matériaux utilisés, sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Matériaux utilisés pour l'axe du piston et contraintes maximales admissibles (Basée sur la méthode Schlaefke)			
Matériau suivant DIN 73 126			
	Aciers trempés		Acier nitruré
	15 Cr 3	16 MnCr 5	31 CrMoV 9
Numéro de matière	1.7015	1.7131	1.8519
Contraintes maximales admissibles $N/mm^2$			
Moteur Otto et Moteur Diesel (pour véhicule particulier)	500	600	-
Moteur Diesel (pour véhicule utilitaire)	$D < 120 \text{ mm}$	300	400
	$D = 120 \dots 200 \text{ mm}$	260 ... 200	360 ... 260
	$D > 200 \text{ mm}$	180	230

Tableau 1.1. - Suivant documentation fournie par la firme MAHLE. {Réf. 3}

Quant à la flèche maximum nous vérifierons que celle-ci reste dans les limites acceptables.

Soit :

$$\begin{cases} f_{\max} \leq \dots 4 \cdot 10^{-4} D \dots \text{Bossage souple} \\ f_{\max} \leq \dots 1.5 \cdot 10^{-4} D \dots \text{Bossage rigide} \end{cases} \quad (\text{éq. P3.29.}) \quad \text{mm} \quad \{\text{Réf. 25}\}$$

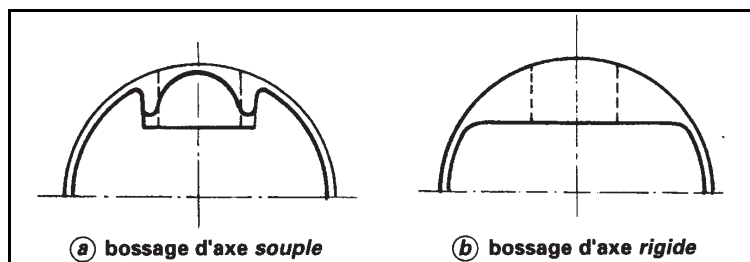


fig. P3.6. - Types de bossage.

Pour un "gros" Diesel {Réf. 1} nous propose :  $f_{\max} \leq \dots 2 \cdot 10^{-4} \dots D$

Et pour la déformation (l'écrasement), il importe que celle-ci soit inférieure au jeu diamétral  $\Delta d_{\text{ext axe}}$  existant entre l'axe et les alvéolages, sinon :

- ▶ le graissage s'effectue dans de très mauvaises conditions;
- ▶ les alvéolages peuvent se fissurer sous l'effet de l'extension;
- ▶ l'axe est même l'objet d'une réaction des alvéolages.

D'où :



$$\delta \leq \Delta d_{\text{ext axe}} \approx \dots 4 \cdot 10^{-4} D \dots \quad (\text{éq. P3.32.}) \quad \text{mm} \quad (\text{concerne les Diesel}) \quad \{ \text{Réf. 1} \}$$

$$\delta \leq 0.125 \cdot 10^{-3} (D + 100) \quad (\text{éq. P3.33.}) \quad \text{mm} \quad \{ \text{Réf. 25} \}$$

$$\delta \leq 0.02 \text{ mm} \quad (\text{éq. P3.34.}) \quad \{ \text{Réf. 26} \}$$

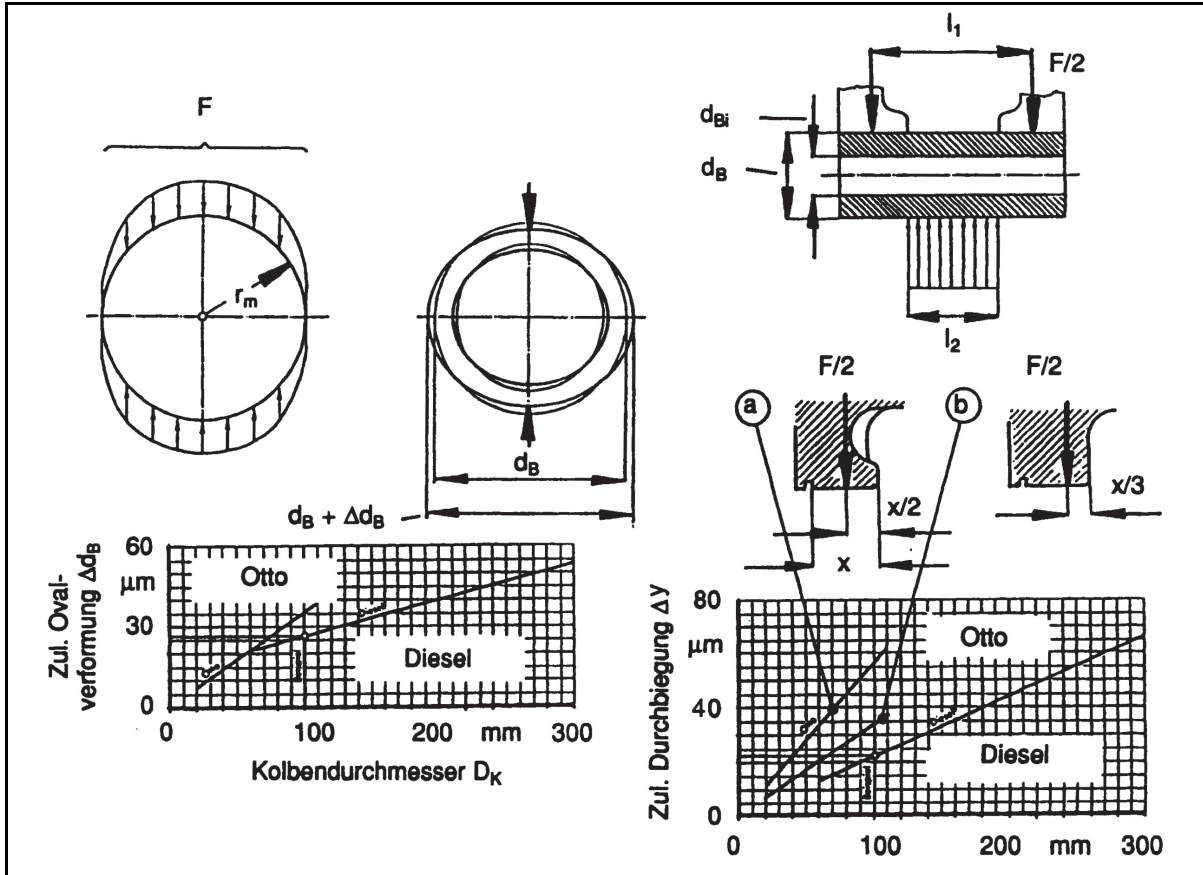


fig. P3.7. - Ovalisation et flèche admissible. {Ref. 31}

### 1.3.4. Répondre à l'impératif d'une lubrification suffisante

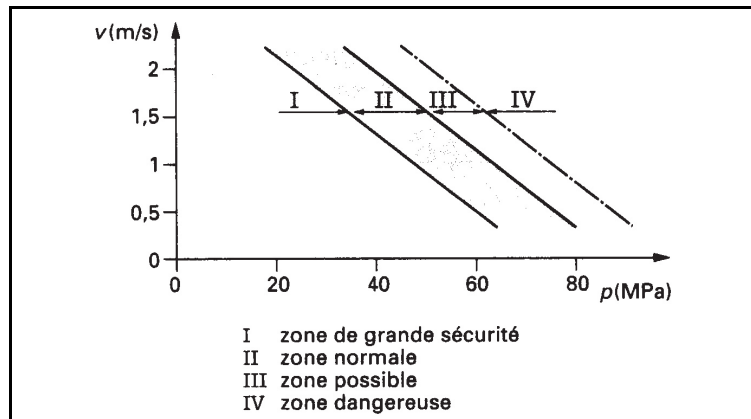
{Réf. 25}

La pression maximale admissible est liée à la vitesse de glissement de l'axe dans les bossages. Dans le cas d'un axe serré dans la bielle, cette vitesse est environ 1.6 fois plus grande que dans le cas d'un axe flottant ( $w_{\text{axe serré}} = 1.6 w_{\text{axe flottant}}$ ). Dans le cas d'un axe serré dans la bielle (voir **prédim**), la vitesse de glissement moyenne dans les bossages peut s'exprimer par la formule suivante :

$$w_{\text{moy axe serré}} = \frac{1}{30000} d_{\text{ext axe}} n \arctg \left( \frac{r_m}{l_b} \right) \quad (\text{éq.P3.36.}) \quad (\text{en m/s})$$

<u>Notations</u> :	$d_{\text{ext axe}}$	diamètre de l'axe du piston	mm
	$r_m$	rayon de manivelle du vilebrequin	mm
	$n$	vitesse de rotation maximale du moteur	tr/min
	$l_b$	longueur de bielle	mm

La figure **fig. P3.8.** nous permet de voir, connaissant pression et vitesse de glissement, dans quelle zone de fonctionnement on se trouve.



**fig. P3.8.** - Pression admissible dans les bossages en fonction de la vitesse de glissement de l'axe.

Si la pression est trop élevée, on peut envisager :

- ▶ une lubrification plus abondante,
- ▶ un axe flottant au lieu de fixe (cas du moteur Diesel rapide),
- ▶ une bielle avec pied en forme de tête de vipère (très utilisé dans les moteurs Diesels de grosses puissance).

La pression dans les bossages est donné par :

$$p = \frac{F_{\text{max}}}{(l_{\text{axe}} - l_{\text{pb}}) d_{\text{ext axe}}} \leq p_{\text{adm}} \quad (\text{éq.P3.37.})$$

<u>Notations</u> :	$l_{\text{axe}}$	longueur totale de l'axe	mm
	$l_{\text{pb}}$	largeur du pied de bielle	mm

### 1.3.5. Vérification de la tenue des bossages

{Réf. 41}

On vérifiera que la contrainte de cisaillement dans les bossages est inférieure à la contrainte admissible de cisaillement. Soit :

$$\tau = 0.5 p_{\max} \frac{D^2}{d_b^2 - BO^2} \leq 30 \dots 40 \text{ N/mm}^2$$

<u>Notations</u> :	$p_{\max}$	pression max d'explosion	$\text{N/mm}^2$
	$d_b$	diamètre extérieur des bossages	$\text{mm}$
	$BO$	diamètre extérieur de l'axe (diamètre intérieur des bossages)	$\text{mm}$