

## AVERTISSEMENT

*Les notes ci-après, relatives à la modélisation des différents organes sont données à titre exemplatif, et ne constituent nullement un mode de calcul obligé.*

<i>CHAPITRE 2. CONCEPTION ET VÉRIFICATION DES CONTRAINTES DE LA BIELLE . . .</i>	<i>- B1.1 -</i>
<i>FICHE BIELLE 1 : CORPS de BIELLE . . . . .</i>	<i>- B1.1 -</i>
<i>2.1. Corps de la bielle . . . . .</i>	<i>- B1.1 -</i>
<i>2.1.1. Fréquence propre de vibration . . . . .</i>	<i>- B1.1 -</i>
<i>2.1.2. Contraintes de flambement . . . . .</i>	<i>- B1.2 -</i>
<i>2.1.3. Contraintes d'inertie (fouettement) . . . . .</i>	<i>- B1.4 -</i>

## CHAPITRE 2. CONCEPTION ET VÉRIFICATION DES CONTRAINTES DE LA BIELLE

### FICHE BIELLE 1 : CORPS de BIELLE

#### 2.1. Corps de la bielle

##### 2.1.1. Fréquence propre de vibration

Nous pouvons vérifier, en première approximation, la fréquence propre de vibration latérale du corps de la bielle considérée comme un barreau de section constante. La formulation de cette fréquence pour ce cas est :

$$v_{crit} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E I_{xx}}{m l_b^3}} \quad (\text{éq. B1.1.}) \quad \text{Hz}$$

<u>Notations</u> :	$E$	module de Young	$N/m^2$
	$I_{xx}$	moment d'inertie de la section dans le plan d'oscillation	$m^4$
	$l_b$	longueur de la bielle (entre - axe)	$m$
	$m$	masse en oscillation (2/3 ou 3/4 de la masse de la bielle suivant si c'est un moteur lent ou rapide)	$kg$

La fréquence des efforts périodiques subis par la bielle pour une machine 4 temps est :

$$v_b = \frac{n}{2 \times 60} \quad (\text{éq. B1.2.}) \quad \text{Hz}$$

<u>Notation</u> :	$n$	vitesse de rotation	$t/min$
-------------------	-----	---------------------	---------

Le rapport ( $v_{crit} / v_b$ ) nous donne le rang de l'harmonique qui peut provoquer une résonance, si ce rang est élevé ( $> 10$ ) le risque de résonance est faible.

## 2.1.2. Contraintes de flambement

### Remarque préliminaire :

L'effort maximum à lieu au moment de l'explosion pendant le ralenti. C'est pourquoi, lorsqu'un moteur peut-être appelé à fonctionner à plein couple et à faible vitesse, les efforts dynamiques ne doivent pas être retranchés des efforts maxima de combustion.

### A) Flambement statique

La formule générale d'Euler établie pour éviter le flambement de poutres colonnes longues, objet de charges statiques croissantes ne peut être utilisée dans le cas de bielles de moteur :

- ▶ dont l'élanement est très inférieur à l'élanement limite d'Euler.

Pour rappel l'élanement limite d'Euler  $\lambda_{lim Euler}$  est défini par :

$$\lambda_{lim Euler} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_e}} \quad (\text{éq. B1.4.})$$

Notation :  $R_e$  limite élastique matériau  $N/mm^2$

- ▶ qui sont soumises à des efforts alternés en compression et en traction se renouvelant plusieurs dizaines de fois par secondes, générateurs de contraintes élevées.

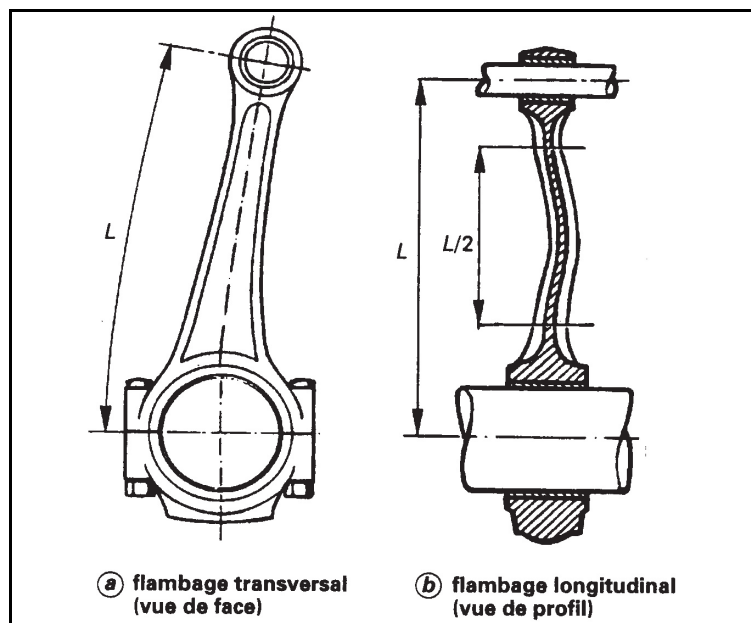


fig. B1.1. - Flambement d'une bielle. {Réf. 25}

En fait, la bielle est justiciable de la formule de Rankine. Celle-ci s'énonce de la manière suivante :

$$\sigma_{fb Rankine} = \frac{F_b}{A_{crit}} (1 + \bar{\lambda}^2) \leq \sigma_{adm fb Rankine} = \frac{R_e}{S_{Rankine}} \quad (\text{éq. B1.5.})$$

<u>Notations</u> :	$\sigma_{fb \text{ Rankine}}$	contrainte de flambement suivant Rankine	$N/mm^2$
	$F_b$	effort total maximum transmis par la bielle	$N$
	$A_{crit}$	section critique	$mm^2$
	$\bar{\lambda}$	l'élancement réduit, nombre pur, à pour expression :	-
		$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_{col}}{\lambda_{lim \text{ Euler}}} \quad (\text{éq. B1.7.})$	
	$\lambda_{col}$	élancement réel de la barre	-
		$\lambda_{col} = \frac{l_f}{i_g} \quad \text{et} \quad i_g = \sqrt{\frac{I}{A_{crit}}} \quad (\text{éq. B1.8.})$	
	$l_f$	longueur de flambement (Voir figure <b>fig. B1.1.</b> )	$mm$
	$i_g$	rayon de giration de la section critique	$mm$
	$I$	moment d'inertie de la section (en rapport avec $l_f$ )	$mm^4$
	$S_{Rankine}$	coefficient de sécurité ( $1.7 \leq S \leq 2.2$ )	-

Nous vérifierons que cette contrainte est inférieure à la contrainte admissible.

### B) Flambement dynamique

{Réf. 32}

On sait qu'une bielle comprimée par une charge axiale pulsante est susceptible de flamber pour une charge critique inférieure à la charge critique statique du fait d'une instabilité paramétrique transversale.

La force maximale théorique est supérieure à la charge critique lorsque  $v_b \ll v_{crit1}$ , avec  $v_b$  la fréquence de la composante alternée de la charge subie par la bielle (Voir **éq. B1.2.**) et  $v_{crit}$  la plus petite des pulsations propres de la flexion de la bielle (Voir **éq. B1.1.**).

Mais, compte tenu du caractère dangereux du flambage et de l'effet négatif de petites flexions initiales, on respectera finalement la condition suivante :

$$F_b = F_{\max} < F_{crit \text{ Rankine}} \left( 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{v_b}{v_{crit}} \right)^2 \right) \quad (\text{éq. B1.11.})$$

La force critique de Rankine s'énonçant :

$$F_{crit \text{ Rankine}} = \frac{R_e A}{S_{Rankine} (1 + \bar{\lambda}^2)} \quad (\text{éq. B1.12.})$$

On constate que le flambage dynamique par vibration paramétrique des bielles n'est à craindre que pour les bielles très élancées et rapides.

### 2.1.3. Contraintes d'inertie (fouettement)

Les contraintes d'inertie subies par la bielle sont dues au seul corps de bielle (les inerties du pied et de la tête de bielle intéressant respectivement l'axe du piston et le maneton). Seule l'inertie fléchissante développée dans le plan d'oscillation, peut créer une fatigue appréciable.

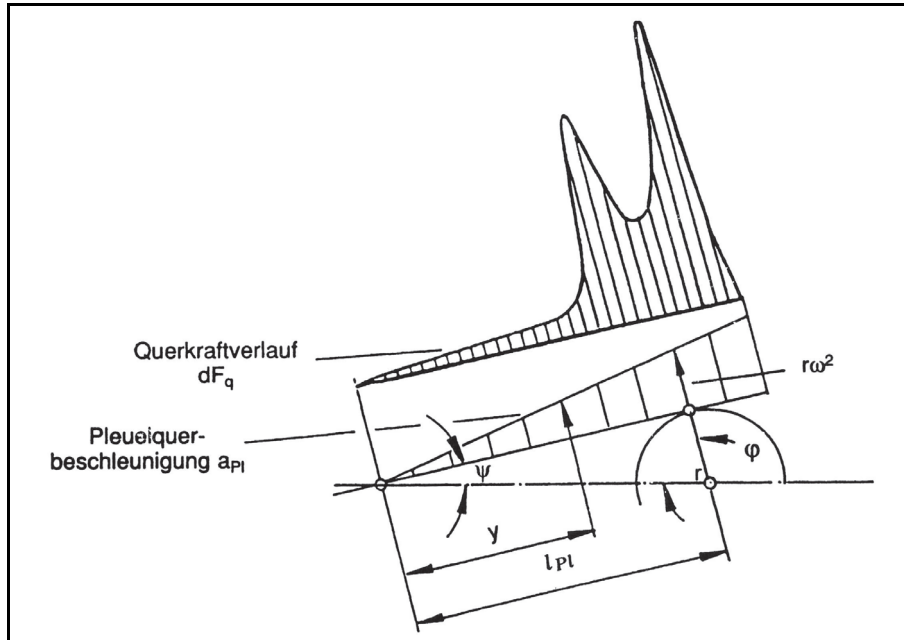


fig. B1.2. - {Réf. 31}

La bielle est sollicitée par une charge d'inertie répartie, qui est loin d'être linéaire **fig. B1.2.**, mais que l'on pourrait approximer par une loi linéaire (ce qui serait exact dans le cas où la section du corps de bielle varierait de manière constante) comme le montre la figure **fig. B1.3.**

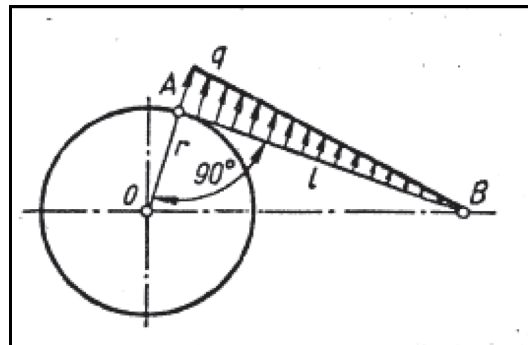


fig. B1.3. - {Réf. 24}

L'intensité maximale  $p_{x \max}$  de la charge d'inertie s'observe au point A, lorsque la bielle forme avec la manivelle un angle de  $90^\circ$ . Soit :

$$p_{x \max} = \rho A_m \omega^2 r_m \quad (\text{éq. B1.13.}) \quad N/m$$

<u>Notations</u> :	$\rho$	masse volumique du corps de bielle (acier = 7800)	$kg/m^3$
	$A_m$	section médiane du corps de bielle	$m^2$
	$\omega$	vitesse de rotation du vilebrequin	$rad/s$
	$r_m$	rayon de manivelle (demi course)	$m$

Remarque :

Dans cette position l'accélération du point B est voisine de zéro.

Le moment fléchissant pour une telle répartition de charge est donné par :

$$M_f = -\frac{p_{x \max} x^3}{6 l_b} + \frac{p_{x \max} l_b x}{6} \quad (\text{éq. B1.14.}) \quad Nm$$

Notations :

$x$	longueur à partir du pied de bielle	$m$
$l_b$	longueur de bielle (entre-axe)	$m$

Le moment fléchissant est maximum pour :  $x = \frac{l_b}{\sqrt{3}}$  si la section de bielle est constante sur toute

sa longueur. En réalité, la section n'est pas constante et on adopte généralement en pratique :  $x = \frac{2}{3} l_b$ .

Et dans ce cas le moment fléchissant maximum devient :

$$M_{f \max} = \frac{5}{81} p_{x \max} l_b^2 \quad (\text{éq. B1.17.})$$

D'où il est possible de trouver l'équation de la contrainte de foudroissement maximum :

$$\sigma_{f \max} = \frac{M_{f \max}}{I_{xx}/v} = \frac{5}{81} \left( \frac{\rho A_m \omega^2 r_m l_b^2}{I_{xx}/(h_I/2)} \right) \quad (\text{éq. B1.18.}) \quad N/m^2$$

En pratique, dans le cas des moteurs à combustion, l'influence des contraintes d'inertie sur la fatigue de la bielle peut-être négligée car elle se manifeste à un moment où la pression des gaz a considérablement diminué. Mais cette inertie tangentielle peut induire des vibrations propres transverses, dont la période est proportionnelle à  $l_b^2$ .

Soulignons que, dans une machine alternative, toute force d'inertie est proportionnelle au carré de la vitesse de rotation.