

## AVERTISSEMENT

*Les notes ci-après, relatives à la modélisation des différents organes sont donnés à titre exemplatif, et ne constituent nullement un mode de calcul obligé.*

<i>CHAPITRE 3. CONCEPTION ET VÉRIFICATION DES CONTRAINTES DU VILEBREQUIN</i>	<i>- V2.1 -</i>
<i>FICHE VILEBREQUIN 2 : DÉFORMATION du VILEBREQUIN</i>	<i>..... - V2.1 -</i>
<i>3.2. Déformation d'un coude de vilebrequin</i>	<i>..... - V2.1 -</i>
<i>3.2.1. Influence des déformations du vilebrequin</i>	<i>..... - V2.1 -</i>
<i>3.2.2. Calcul des tourillons à la déformation</i>	<i>..... - V2.1 -</i>
<i>3.2.3. Calcul de la déformée d'un vilebrequin</i>	<i>..... - V2.3 -</i>
<i>A) Position critique au P.M.H. [1<sup>e</sup> position critique]</i>	<i>..... - V2.3 -</i>
<i>B) Position critique au maximum d'effort tangentiel [2<sup>e</sup> position critique]</i>	<i>.. - V2.6 -</i>

## CHAPITRE 3. CONCEPTION ET VÉRIFICATION DES CONTRAINTES DU VILEBREQUIN

### FICHE VILEBREQUIN 2 : DÉFORMATION du VILEBREQUIN

#### 3.2. Déformation d'un coudé de vilebrequin

##### 3.2.1. Influence des déformations du vilebrequin

###### Déformations de flexion

Ces déformations sont nuisibles :

- ▶ elles produisent une usure conique des paliers ce qui est préjudiciable a une lubrification correcte. Il convient donc de limiter cette inclinaison du tourillon par rapport au palier.
- ▶ elles entraînent des déplacements élastiques du centre de gravité des masses en mouvement donnant lieu à des vibrations, qui dans le temps produisent des altérations irréversibles.

###### Déformations de torsion

Ces déformations ne sont sensibles et ne présentent des inconvénients que pour les vilebrequins d'assez grande longueur. Dans ces cas et comme la commande des organes de distribution et pompes se fait d'ordinaire par l'extrémité du vilebrequin opposé aux résistances, la vitesse de rotation, du fait de la torsion de l'arbre, n'est pas uniforme; il peut en résulter des chocs sur les pignons de commandes et des ruptures.

##### 3.2.2. Calcul des tourillons à la déformation

{Réf. ?}

Pour les tourillons, il est indispensable de limiter les déformations à des valeurs excluant tout contact entre arbre et palier. En admettant que ce dernier est indéformable, seule importe la cambrure que prend l'arbre sollicité en flexion. La configuration la plus sévère est, à cet égard, celle de la figure Vc 10 dite en "console" (tourillon encastré à une extrémité et chargé uniformément). Pour cette configuration, correspondant à un tourillon d'extrémité, la flèche à pour valeur :

$$f = \frac{P_{(x)} l_t^4}{8 E I_t} \quad mm$$

<u>Notations</u> :	$p_{(x)}$	la charge répartie sur le tourillon	N/mm
	$l_t$	la longueur du tourillon	mm
	$I_t$	l'inertie de flexion du tourillon	mm <sup>4</sup>

Cependant, au lieu d'une charge répartie  $p_{(x)}$ , ce qui nous intéresse plus c'est la pression spécifique moyenne  $\bar{p}_s$  en N/mm<sup>2</sup>, supposée uniforme, qui s'exerce sur le palier.

Dès lors :

$$p_{(x)} = \bar{p}_s d_t \quad \text{avec } d_t \text{ le diamètre du tourillon}$$

sachant que :  $I_t = \frac{\pi d_t^4}{64}$  pour un arbre plein, la valeur de la flèche devient :

$$f = \frac{8 \bar{p}_s l_t^4}{\pi E d_t^3} \leq f_{adm}$$

La condition normale de jeu, arbre-palier, est de l'ordre de :  $f_{adm} \approx 10^{-3} d_t$ . De sorte qu'en limitant la flèche à :  $f_{adm} \leq 10^{-4} d_t$ , nous assurons un fonctionnement sans contact dans les conditions normales de jeu et d'excentricité sous charge, il vient :

$$\frac{l_t}{d_t} \leq 4 \sqrt[4]{\frac{10^{-4} \pi E}{8 \bar{p}_s}}$$

Comme il faut par ailleurs respecter la condition de pression spécifique moyenne sur le palier :

$$\bar{p}_s = \frac{F}{l_t d_t} \Rightarrow \frac{F}{\bar{p}_s} = l_t d_t$$

ou  $F$  désigne la charge en  $N$  sur le palier considéré (dans notre cas, au PMH. nous aurons  $F = F_{\max}/2$ ), on obtient finalement :

$$\frac{F}{\bar{p}_s} = l_t d_t \leq d_t^2 4 \sqrt[4]{\frac{10^{-4} \pi E}{8 \bar{p}_s}} \Rightarrow \frac{F}{\bar{p}_s} \leq d_t^2 4 \sqrt[4]{\frac{10^{-4} \pi E}{8 \bar{p}_s}}$$

et donc :

$$d_t \geq \sqrt[8]{\frac{8 \bar{p}_s}{\pi 10^{-4} E} \sqrt{\frac{F}{\bar{p}_s}}} \quad (\text{éq. V2.12}) \quad mm$$

Nous avons supposé que  $\bar{p}_s$  était une pression spécifique uniformément répartie sur le diamètre du palier. Au cours de Mécanique Appliquée nous avons vu que la pression sur un palier était de forme parabolique et que la pression spécifique maximale était :

$$p_{s \max} = 1.27 \bar{p}_s$$

En réalité, la pression spécifique maximale est encore plus importante et vaut :

$$p_{s \max} = 2.5 \dots 4 \bar{p}_s$$

Dès lors **éq. V2.12** devient, en remplaçant :

- ▶  $F$  par  $F_{\max}/2$
- ▶  $\bar{p}_s$  par  $p_{s \max}/3$

$$d_t \geq \sqrt[8]{\frac{8 \cdot 10^4}{3 \pi} \frac{p_{s \max}}{E} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{F_{\max}}{p_{s \max}}}} \quad (\text{éq. V2.19}) \quad mm$$

$p_{s \max}$  étant la pression maximale admissible sur le palier du tourillon. (30  $N/mm^2$  à vérifier)

Cette approche est relativement simple. Elle a le mérite de faire intervenir directement la pression spécifique admissible par le palier. Par contre, elle a comme inconvénient de supposer que sous l'action de la force de pression, *seul* le tourillon se déforme, alors que les bras et le maneton sont loin d'être infiniment rigide.

C'est d'ailleurs pourquoi, dans cette approche, on limite la flèche à  $1/10^\circ$  du jeu.

### 3.2.3. Calcul de la déformée d'un vilebrequin

{Réf. 5}

Nous avons à envisager deux cas :

- ▶ les déformations de flexion;
- ▶ les déformations de torsion.

Les déformations de flexion seront maximales lorsque les efforts agissent dans le plan du vilebrequin. C'est-à-dire lors de la position critique au PMH. [1<sup>e</sup> position critique].

Les déformations de torsion seront maximales lorsque le couple est maximum. C'est-à-dire lors de la position critique au maximum d'effort tangentiel [2<sup>e</sup> position critique].

#### A) Position critique au P.M.H. [1<sup>e</sup> position critique]

Hypothèse : Dans le cas du calcul des déformations, nous ne pouvons plus supposer les bras rigides comme nous l'avons fait pour le calcul des contraintes. Par contre nous considérerons que les angles que font maneton et tourillon avec les bras sont rigides. Soulignons que Delanghe a estimé que la ligne moyenne d'un maneton ou d'un tourillon est, à chaque angle, rigide sur un tiers (1/3) de l'épaisseur  $b$  du bras et que la ligne moyenne des bras est, en ces points, rigide sur le huitième (1/8) de diamètre de la portée correspondante; il a précisé que ces proportions ne s'appliquent qu'aux déformations par flexion.

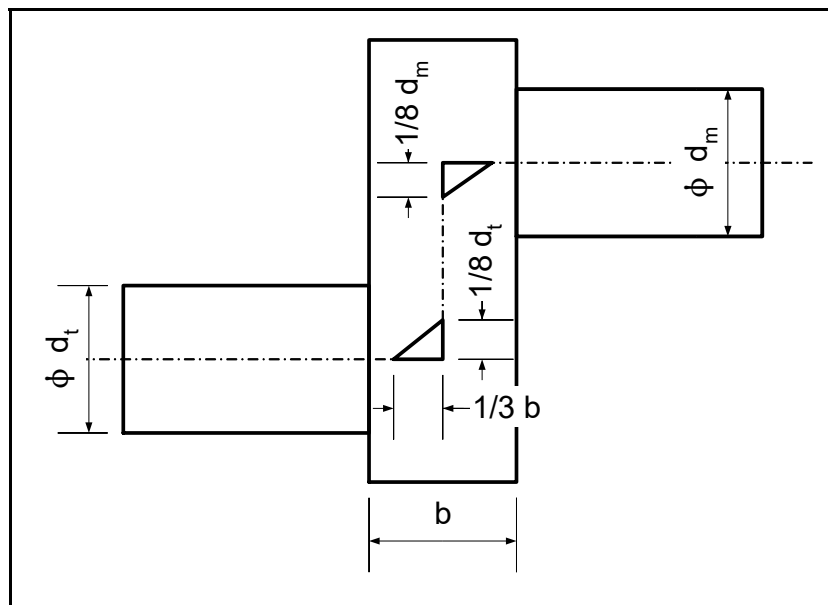


fig. V2.1. - Hypothèse de la rigidité des "angles".

De manière générale, la variation de déformation angulaire est donnée par :

$$\Delta\varphi = \int \frac{M_f}{E I} dx \quad \text{rad}$$

Cette formulation de la déformation angulaire n'est valable que dans le cas des petits déplacements; cette hypothèse peut être prise en compte dans la majorité des problèmes.

Mais en fait cette formule a été établie en considérant la manivelle comme isolée, entre ces deux paliers, du reste du vilebrequin, c'est-à-dire en admettant un moment nul au droit de chaque appui, ce qui est loin de la réalité. Nous devons donc prendre en compte la travée et son environnement.

Pour déterminer approximativement la valeur et le signe de ces moments au droit de chaque appui, nous en sommes réduit à assimiler le vilebrequin à un arbre de section constante reposant sur des appuis alignés le divisant en travées égales, et ce, en ne considérant que la force due à la pression maximale de combustion dans un cylindre, les forces provenant des autres attelages étant négligées.

Sans entrer dans les détails de calculs, rappelons que le théorème des 3 moments est basé sur le fait que la continuité entre les travées entraîne que l'inclinaison de l'arbre en un palier est la même qu'elle soit due aux moments et aux forces à gauche de ce palier ou aux moments et aux forces à droite de celui-ci.

Il permet de calculer le moment  $M_{appui}$ , moment complémentaire, qui se compose algébriquement avec le moment fléchissant obtenu en considérant les travées indépendantes.

La déformation angulaire devient donc :

$$\Delta\varphi = \int \frac{M_f + M_{appui}}{E I} dx \quad rad \quad \text{avec : } M_{appui} = k F l_{travée} ;$$

En tenant compte de l'hypothèse de rigidité des angles, nous pouvons déterminer les diverses déformations angulaires (en sachant que pour le tronçon calculé, le  $M_{appui}$  est de sens contraire, au  $M_f$ ) :

#### [a] tourillon

$$\Delta\varphi_{tourillon} = \frac{1}{E I_{tourillon}} \int_{z_{min}}^{z_{max}} \left( \frac{F}{2} z - k F l_{travée} \right) dz \quad (\text{éq. V2.23})$$

$$\text{avec : } I_{tourillon} = \frac{\pi d_t^4}{64}; \quad z_{min} = 0; \quad z_{max} = \frac{l_t}{2} + \frac{b}{6};$$

#### [b] bras

$$\Delta\varphi_{bras} = \frac{1}{E I_{bras}} \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left( \frac{F}{2} \left( \frac{l_t}{2} + \frac{b}{2} \right) - k F l_{travée} \right) dx \quad (\text{éq. V2.27})$$

$$\text{avec : } I_{bras} = \frac{a b^3}{12}; \quad x_{min} = \frac{d_t}{8}; \quad x_{max} = r_m - \frac{d_m}{8};$$

#### [c] maneton

$$\Delta\varphi_{maneton} = \frac{1}{E I_{maneton}} \int_{z_{min}}^{z_{max}} \left( \frac{F}{2} z - k F l_{travée} \right) dz \quad (\text{éq. V2.31})$$

$$\text{avec : } I_{maneton} = \frac{\pi d_m^4}{64}; \quad z_{min} = \frac{l_t}{2} + \frac{5}{6} b; \quad z_{max} = \frac{l_t}{2} + b + \frac{l_m}{2};$$

<u>Notations</u> :	$d_t$	diamètre du tourillon	mm
	$d_m$	diamètre du maneton	mm
	$l_t$	longueur du tourillon	mm
	$l_m$	longueur du maneton	mm
	$r_m$	rayon de manivelle	mm
	$a$	largeur du bras	mm
	$b$	épaisseur du bras	mm
	$F$	force (dans notre cas : $F_{max}$ )	N
	$l_{travée}$	longueur d'une travée ( $l_{travée} = l_t + 2b + l_m$ )	mm

Ce qui, après intégration, nous donne les diverses déformations angulaires (en *rad*), soit les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{tourillon} &= \frac{F}{4 E I_{tourillon}} \left( \left( \frac{l_t}{2} + \frac{b}{6} \right) - 4 k l_{travée} \right) \left( \frac{l_t}{2} + \frac{b}{6} \right) \\ \Delta\varphi_{bras} &= \frac{F}{2 E I_{bras}} \left( \left( \frac{l_t}{2} + \frac{b}{2} \right) - 2 k l_{travée} \right) \left( r_m - \left( \frac{d_t}{8} + \frac{d_m}{8} \right) \right) \\ \Delta\varphi_{maneton} &= \frac{F}{4 E I_{maneton}} \left( \left( l_t + \frac{11}{6} b + \frac{l_m}{2} \right) - 4 k l_{travée} \right) \left( \frac{l_m}{2} + \frac{b}{6} \right) \end{aligned} \quad (\text{éq. V2.36})$$

$k$  valant :  $k = 0.07925$  pour un nombre de paliers infinis et  
 $k = 0.075$  pour 3 paliers.

Une fois calculées les différentes déformations, nous sommerons algébriquement ces déformations et nous obtiendrons l'angle maximum d'inclinaison du tourillon par rapport à son axe théorique et donc par rapport à l'axe du coussinet. Soit :

$$\Delta\varphi_{flexion\ vilebrequin} = \Delta\varphi_{bras} + \Delta\varphi_{tourillon} + \Delta\varphi_{maneton} \quad (\text{éq. V2.39})$$

Cette inclinaison ne doit en aucun cas compromettre la tenue du film d'huile et donc le bon fonctionnement de l'assemblage. C'est pourquoi, il est recommandé de ne pas dépasser une inclinaison telle qu'il existe toujours à chaque extrémité du tourillon un jeu minimum entre le tourillon et son palier.

Le jeu dans un palier  $j_p$  est donné par les deux approximations suivantes :

$$j_p \approx 10^{-3} d_t \quad (\text{éq. V2.40}) \quad \{Réf. 25 \text{ et } 26\}$$

ou 
$$j_p \approx \frac{n^{0.5} d_t^{2.5}}{460 10^5} \quad (\text{éq. V2.41}) \quad \{Réf. 25, 2 \text{ et } 27\}$$

Notations :

$j_p$	jeu	<i>mm</i>
$d_t$	diamètre du tourillon	<i>mm</i>
$n$	vitesse de rotation maximum	<i>tr/min</i>

De plus, pour un bon fonctionnement des paliers hydrodynamiques, il faut un minimum d'épaisseur du film d'huile.

Pour les arbres d'un haut niveau de qualité, type vilebrequin de moteur thermique, la relation :

$$e_{\min\ film} (\mu m) = 5 Ra (\mu m) + 0.02 d_{arbre} (mm) \quad (\text{éq. V2.42}) \quad \{Réf. 34\}$$

Notation :  $Ra$  rugosité CLA  $\mu m$

constitue une limite qui donne en général satisfaction.

Pour des arbres de hautes qualités :

$$\boxed{Ra (\mu m) \approx 0.006 d_{arbre} (mm)} \quad (\text{éq. V2.43})$$

C'est pourquoi, nous devons vérifier la relation suivante :

$$\boxed{l_t \Delta\varphi_{flexion \ vilebrequin} \leq j_p - 2 e_{min \ film}} \quad (\text{éq. V2.44}) \quad mm$$

On pourra aussi vérifier que :

$$\boxed{\Delta\varphi_{flexion} \leq \Delta\varphi_{flexion \ adm \ max} = 0.6 \cdot 10^{-3} \ rad} \quad (\text{éq. V2.45}) \quad \{Réf. 1\}$$

### B) Position critique au maximum d'effort tangentiel [2<sup>e</sup> position critique]

Nous déterminerons ici les déformations de torsion du vilebrequin. C'est pourquoi nous prendrons en compte la force tangentielle maximum. Et comme, pour un moteur dont le nombre de cylindres est inférieur ou égal à 8, nous pouvons uniquement tenir compte de l'effort tangentiel maximum  $T$  exercé sur la dernière manivelle.

De manière générale, la variation de déformation angulaire est donnée par :

$$\Delta\varphi = \int \frac{M_f}{E I} dx \quad rad \quad \text{pour les moments de flexion}$$

et par : 
$$\Delta\varphi = \int \frac{M_t}{G I_0} dx \quad rad \quad \text{pour les moments de torsion.}$$

Cette formulation de la déformation angulaire n'est valable que dans le cas des petits déplacements; cette hypothèse peut être prise en compte dans la majorité des problèmes.

<u>Notations</u> :	$M_t$	moment de torsion	$Nmm$
	$M_f$	moment de flexion	$Nmm$
	$E$	module d'élasticité longitudinale	$N/mm^2$
	$G$	module d'élasticité transversale	$N/mm^2$
	$I$	moment d'inertie de la section	$mm^4$
	$I_0$	moment d'inertie polaire de la section	$mm^4$

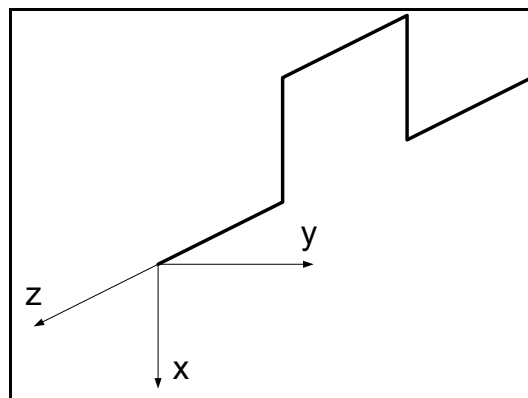


fig. V2.2. -

## B.1) Déformation par rapport à Ox

### [a] tourillon

$$\triangleright \Delta\varphi_{\text{tourillon}} = \int \frac{M_f}{E I} dz = \frac{1}{E I_{\text{tourillon}}} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left( \frac{T}{2} z \right) dz \quad (\text{éq. V2.48})$$

$$\text{avec : } I_{\text{tourillon}} = \frac{\pi d_t^4}{64}; \quad z_{\min} = 0; \quad z_{\max} = \frac{l_t}{2} + \frac{b}{6};$$

### [b] bras

$$\triangleright \Delta\varphi_{\text{bras}} = \int \frac{M_f}{G I_0} dx = \frac{1}{G I_{0 \text{ bras}}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left( \frac{T}{2} \left( \frac{l_t}{2} + \frac{b}{2} \right) \right) dx \quad (\text{éq. V2.52})$$

$$\text{avec : } I_{0 \text{ bras}} = C_2 a b^3; \quad x_{\min} = 0; \quad x_{\max} = r_m; \\ (\text{pour } C_2 \text{ voir tableau VI.2.})$$

### [c] maneton

$$\triangleright \Delta\varphi_{\text{maneton}} = \int \frac{M_f}{E I} dz = \frac{1}{E I_{\text{maneton}}} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left( \frac{T}{2} z \right) dz \quad (\text{éq. V2.56})$$

$$\text{avec : } I_{\text{maneton}} = \frac{\pi d_m^4}{64}; \quad z_{\min} = \frac{l_t}{2} + \frac{5}{6} b; \quad z_{\max} = \frac{l_t}{2} + b + \frac{l_m}{2};$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_{\text{tourillon}} &= \frac{T}{4 E I_{\text{tourillon}}} \left( \frac{l_t}{2} + \frac{b}{6} \right)^2 \\ \Delta\varphi_{\text{bras}} &= \frac{T r_m}{2 G I_{0 \text{ bras}}} \left( \frac{l_t}{2} + \frac{b}{2} \right) \\ \Delta\varphi_{\text{maneton}} &= \frac{T}{4 E I_{\text{maneton}}} \left( l_t + \frac{11}{6} b + \frac{l_m}{2} \right) \left( \frac{l_m}{2} + \frac{b}{6} \right) \end{aligned} \right\} (\text{éq. V2.60})$$

## B.2) Déformation par rapport à Oy

### [a] tourillon

$$\triangleright \Delta\varphi_{\text{tourillon}} = \int \frac{M_f}{E I} dz = \frac{1}{E I_{\text{tourillon}}} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left( \frac{N}{2} z \right) dz \quad (\text{éq. V2.61})$$

$$\text{avec : } I_{\text{tourillon}} = \frac{\pi d_t^4}{64}; \quad z_{\min} = 0; \quad z_{\max} = \frac{l_t}{2} + \frac{b}{6};$$

### [b] bras

$$\triangleright \Delta\varphi_{\text{bras}} = \int \frac{M_f}{E I} dx = \frac{1}{E I_{\text{bras}}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left( \frac{N}{2} \left( \frac{l_t}{2} + \frac{b}{2} \right) \right) dx \quad (\text{éq. V2.65})$$

$$\text{avec : } I_{\text{bras}} = \frac{a b^3}{12}; \quad x_{\min} = \frac{d_t}{8}; \quad x_{\max} = r_m - \frac{d_m}{8};$$

### [c] maneton

$$\triangleright \Delta\varphi_{\text{maneton}} = \int \frac{M_f}{E I} dz = \frac{1}{E I_{\text{maneton}}} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left( \frac{N}{2} z \right) dz \quad (\text{éq. V2.69})$$



$$\text{avec : } I_{\text{maneton}} = \frac{\pi d_m^4}{64}; \quad z_{\min} = \frac{l_t}{2} + \frac{5}{6}b; \quad z_{\max} = \frac{l_t}{2} + b + \frac{l_m}{2};$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_{\text{tourillon}} &= \frac{N}{4 E I_{\text{tourillon}}} \left( \frac{l_t}{2} + \frac{b}{6} \right)^2 \\ \Delta\varphi_{\text{bras}} &= \frac{N}{2 E I_{\text{bras}}} \left( \frac{l_t}{2} + \frac{b}{2} \right) \left( r_m - \left( \frac{d_t}{8} + \frac{d_m}{8} \right) \right) \\ \Delta\varphi_{\text{maneton}} &= \frac{N}{4 E I_{\text{maneton}}} \left( l_t + \frac{11}{6}b + \frac{l_m}{2} \right) \left( \frac{l_m}{2} + \frac{b}{6} \right) \end{aligned} \right\} \text{(éq. V2.73)}$$

### B.3) Déformation par rapport à Oz

#### [a] tourillon

$$\blacktriangleright \Delta\varphi_{\text{tourillon}} = \int \frac{M_T}{G I_0} dz = \frac{1}{G I_0} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} (T r_m) dz \text{ (éq. V2.74)}$$

$$\text{avec : } I_{0\text{tourillon}} = \frac{\pi d_t^4}{32}; \quad z_{\min} = 0; \quad z_{\max} = \frac{l_t}{2} + \frac{b}{2};$$

#### [b] bras

$$\blacktriangleright \Delta\varphi_{\text{bras}} = \int \frac{M_f}{E I} dx = \frac{1}{E I_{\text{bras}}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left( T r_m - \frac{T}{2} x \right) dx \text{ (éq. V2.78)}$$

$$\text{avec : } I_{\text{bras}} = \frac{a b^3}{12}; \quad x_{\min} = \frac{d_t}{8}; \quad x_{\max} = r_m - \frac{d_m}{8};$$

#### [c] maneton

$$\blacktriangleright \Delta\varphi_{\text{maneton}} = \int \frac{M_f}{G I_0} dz = \frac{1}{E I_0} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left( \frac{T}{2} r_m \right) dz \text{ (éq. V2.82)}$$

$$\text{avec : } I_{0\text{maneton}} = \frac{\pi d_m^4}{32}; \quad z_{\min} = \frac{l_t}{2} + \frac{b}{2}; \quad z_{\max} = \frac{l_t}{2} + b + \frac{l_m}{2};$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_{\text{tourillon}} &= \frac{T r_m}{G I_0} \left( \frac{l_t}{2} + \frac{b}{2} \right) \\ \Delta\varphi_{\text{bras}} &= \frac{T}{4 E I_{\text{bras}}} \left( 3 r_m^2 - \frac{r_m d_m}{4} - \frac{r_m d_t}{4} - \frac{d_m^2}{64} + \frac{d_t^2}{64} \right) \\ \Delta\varphi_{\text{maneton}} &= \frac{T r_m}{2 G I_0} \left( \frac{l_m}{2} + \frac{b}{2} \right) \end{aligned} \right\} \text{(éq. V2.86)}$$

#### B.4) Vérifications

Déformation de *flexion* :

- On se référera aux relations *éq. V2.44.* et *éq. V2.45.*

Déformation de *torsion* :

- la déformation maximale de torsion est de  $0.2^\circ$

{Réf. 35}