

<u>EXERCICES</u> .....	- exSup.1 -
Exercices concernant principalement la <i>Méthode du gradient nul</i> (Chap. 2.) .....	- exSup.1 -
Exercices concernant principalement le <i>Milieu semi-infini</i> (Chap. 3.) .....	- exSup.5 -
Exercices concernant principalement les <i>Milieux limités</i> (Chap. 4.) .....	- exSup.8 -
Exercices concernant principalement les <i>Milieux limités : cas particuliers</i> (Chap. 4. §4.4) .....	- exSup.12 -
Exercices concernant principalement la <i>Conduction multidirectionnelle</i> (Chap. 6.) .....	- exSup.14 -
Exercices concernant principalement les <i>Compléments : Analogies</i> .....	- exSup.16 -

## EXERCICES

### Exercices concernant principalement la *Méthode du gradient nul* (Chap. 2.)

**20.01.** Des pièces cylindriques en nickel sont refroidies dans un réservoir rempli de liquide à température  $T_\infty$ . Pour rendre ce procédé économiquement rentable, le temps de refroidissement des pièces ne doit pas excéder 4 minutes pour refroidir les pièces à  $50^\circ\text{C}$ . Déterminer la température requise du liquide  $T_\infty$  pour atteindre cet objectif. On négligera les effets de bout.

Température initiale des pièces  $T_0 = 100^\circ\text{C}$

Cylindre en nickel  $r_0 = 2\text{ cm}$   $\rho = 8900\text{ kg/m}^3$   $c = 444\text{ kJ/kgK}$

Longueur du cylindre  $l = 1\text{ m}$

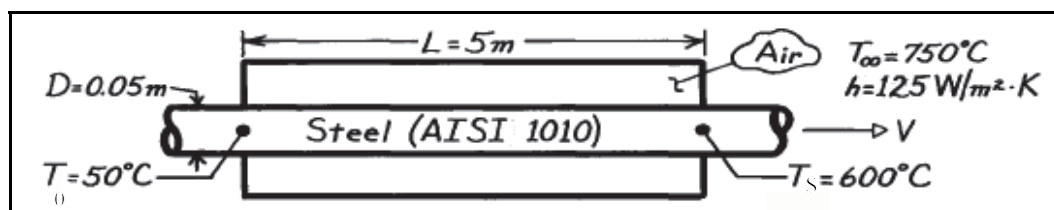
Conductivité  $\lambda = 91\text{ W/mK}$

Coefficient de convection  $h = 120\text{ W/m}^2\text{K}$

Réponse :  $T_\infty = 3.4^\circ\text{C}$

**20.02.** Connaissant la température d'entrée  $T_0 = 50^\circ\text{C}$  d'une barre d'acier inoxydable que l'on chauffe pour traitement dans un four dont l'air ambiant est à  $750^\circ\text{C}$  ( $h = 125\text{ W/m}^2\text{K}$ ), calculez la vitesse d'avancement de cette barre dans le four afin d'obtenir une température de sortie de  $600^\circ\text{C}$ . On considérera une conduction unidimensionnelle radiale. On négligera le rayonnement. Les caractéristiques, supposées constantes du matériaux AISI 1010 à  $600\text{ K}$ , sont :

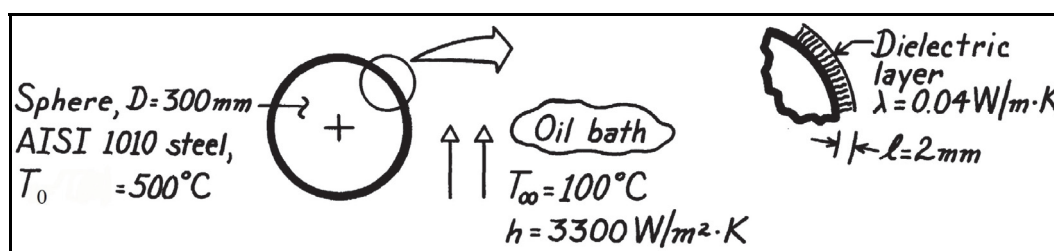
$\rho = 7832\text{ kg/m}^3$  ;  $c = 559\text{ J/kgK}$  ;  $\lambda = 48.8\text{ W/mK}$  ;  $a = 1.11 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ .



Réponse :  $v = 7.41\text{ mm/s}$  (pour  $t = 674.4\text{ s}$ )

**20.03.** Une sphère pleine en acier (AISI 1010), enduite d'une couche diélectrique d'épaisseur de  $2\text{ mm}$  et de conductivité thermique  $\lambda = 0.04\text{ W/mK}$ , primitivement à température uniforme de  $500^\circ\text{C}$  est soudainement plongée dans un bain d'huile ( $T = 100^\circ\text{C}$ ). Combien de temps faudra-t'il pour que la sphère atteigne  $140^\circ\text{C}$  ?

Propriétés du AISI 1010 :  $\rho = 7832\text{ kg/m}^3$  ;  $c = 559\text{ J/kgK}$  ;  $\lambda = 48.8\text{ W/mK}$ .



Réponse :  $t_{140^\circ\text{C}} = 25354\text{ s}$

**20.04.** Une plaque d'aluminium ( $0.5 \times 30 \times 30 \text{ cm}^3$ ), à une température de  $500 \text{ }^\circ\text{C}$ , doit être refroidie dans un bain d'eau à  $90 \text{ }^\circ\text{C}$ . Les coefficients de transfert de chaleur sont :

Pour  $T = 500 \rightarrow 260 \text{ }^\circ\text{C} \Rightarrow h = 510 \text{ W/m}^2\text{K}$

Pour  $T = 260 \rightarrow 90 \text{ }^\circ\text{C} \Rightarrow h = 2250 \text{ W/m}^2\text{K}$

Les propriétés de l'aluminium sont :

$\lambda = 237 \text{ W/mK}$  ;  $c = 900 \text{ J/kgK}$  ;  $\rho = 2702 \text{ kg/m}^3$  .

a) Calculer le taux de refroidissement ( $\text{K/s}$  ou  $^\circ\text{C/s}$ ) au moment où la température est de  $315 \text{ }^\circ\text{C}$ .

b) La même chose pour  $T = 150 \text{ }^\circ\text{C}$  .

c) Calculer le temps nécessaire à un refroidissement jusqu'à  $120 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Réponses : a)  $dT/dt = -19.5 \text{ }^\circ\text{C/s}$  b)  $dT/dt = -22.9 \text{ }^\circ\text{C/s}$  c)  $t = 14.70 \text{ s}$

**20.05.** Des billes d'acier de diamètre  $2 \text{ cm}$ , à température initiale de  $750 \text{ }^\circ\text{C}$ , doivent être trempées dans un bain d'huile à  $40 \text{ }^\circ\text{C}$  jusqu'à ce que leur température atteigne  $90 \text{ }^\circ\text{C}$ . Le coefficient de convection entre les billes et l'huile est évalué à  $h = 280 \text{ W/m}^2\text{K}$  .

Combien de temps les billes doivent-elles rester dans le bain ?

Le bain est maintenu à sa température par un réfrigérant à eau où l'eau entre à une température de  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  et sort à  $18 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Quel est le débit d'eau nécessaire si la production impose un rythme de 200 billes par minute ?

Données :  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$  ;  $\lambda = 52 \text{ W/mK}$  ;  $c = 460 \text{ J/kgK}$  .

Réponses :  $t = 113.3 \text{ s}$   $q_v \approx 3.6 \text{ m}^3/\text{h}$

**20.06.** Un long fil de diamètre  $d = 1 \text{ mm}$  est immergé dans un bain d'huile à température  $T_\infty = 25 \text{ }^\circ\text{C}$  .

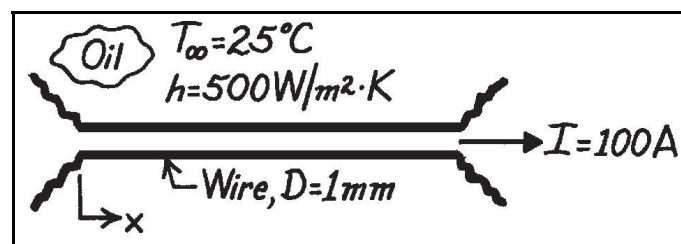
Ce fil a une résistance électrique par unité de longueur de  $R'_e = 0.01 \Omega/\text{m}$  . Si un courant

$I = 100 \text{ A}$  parcourt le fil et si le coefficient de convection est  $h = 500 \text{ W/m}^2\text{K}$  , quelle est la

température en régime permanent de ce fil ? A partir du moment où le courant est appliqué, combien de temps faut-il pour que la température du fil soit  $1 \text{ }^\circ\text{C}$  inférieure à la température du

régime permanent ? Les caractéristiques du fil sont :  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$  ;  $c = 500 \text{ J/kgK}$  ;

$\lambda = 20 \text{ W/mK}$  .



Réponses :  $T_{t \rightarrow \infty} = 88.7 \text{ }^\circ\text{C}$   $t_{T=87.7 \text{ }^\circ\text{C}} = 8.31 \text{ s}$

**20.07.** Une plaque en laiton d'épaisseur de  $10 \text{ mm}$ , à température initiale de  $30 \text{ }^\circ\text{C}$ , est exposée sur une de ces faces à un flux de chaleur de  $3000 \text{ W/m}^2$  et sur son autre face à un flux d'air à température, supposée constante, de  $30 \text{ }^\circ\text{C}$  avec un coefficient de convection de  $h = 50 \text{ W/m}^2\text{K}$  .

a) Déterminer l'équation de la température de la plaque en fonction du temps.

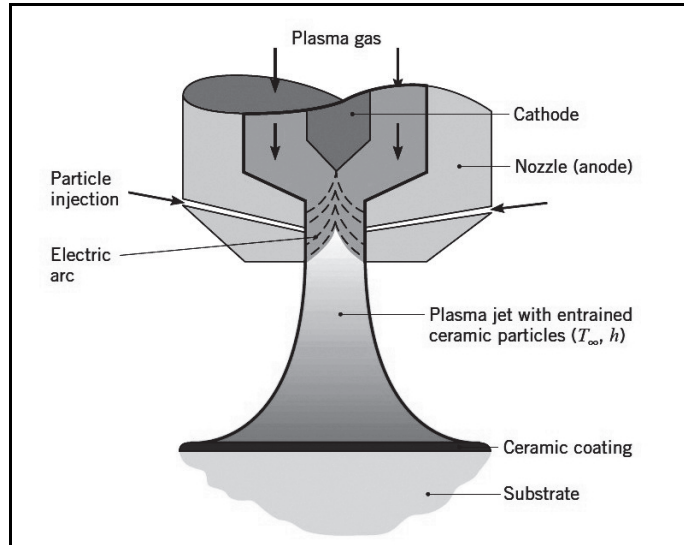
b) Après combien de temps la plaque atteint-elle une température de  $1 \text{ }^\circ\text{C}$  inférieure à la température de régime sur sa face chaude.

Caractéristiques du laiton :  $\rho = 8522 \text{ kg/m}^3$  ;  $\lambda = 110.7 \text{ W/mK}$  ;  $c = 385 \text{ J/kgK}$  .

Réponses :

$$\text{a) } \left| \frac{h(T(t) - T_\infty) - \dot{q}}{h(T_0 - T_\infty) - \dot{q}} \right| = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{b) } t = 44.7 \text{ min}$$

**20.08.** Les procédés de revêtement par pulvérisation au plasma sont souvent utilisés pour fournir une protection de surface pour les matériaux exposés aux environnements hostiles. Les revêtements céramiques sont couramment utilisés à cette fin. En injectant de la poudre de céramique à travers la buse (anode) d'une torche à plasma, les particules sont entraînées par le jet de plasma, dans lequel ils sont ensuite accélérés et chauffés jusqu'à leur point de fusion et complète conversion à l'état liquide. Le revêtement est formé lorsque les gouttelettes fondues viennent frapper le matériau de substrat et sont soumises à une solidification rapide.



Caractéristiques des gouttelettes (sphériques) d'alumine ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) (supposées constantes) :

- diamètre :  $d_p = 50 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
- masse volumique :  $\rho = 3970 \text{ kg/m}^3$
- conductivité thermique :  $\lambda = 10.5 \text{ W/mK}$
- chaleur spécifique :  $c = 1560 \text{ J/kgK}$
- température de fusion :  $T_f = 2318 \text{ K}$
- chaleur latente de fusion :  $h_{sf} = 3577 \text{ kJ/kg}$
- température initiale :  $T_0 = 300 \text{ K}$

Ces gouttelettes sont injectés dans la torche à plasma, à température de  $10000 \text{ K}$  avec un coefficient de convection de  $30 \text{ kW/m}^2\text{K}$ .

- a) En négliger le rayonnement, quelle doit être le temps en vol nécessaire pour chauffer une particule de sa température initiale  $T_0$  à son point de fusion  $T_f$ , et, une fois au point de fusion, le temps pour obtenir la fusion complète de la particule.
- b) En supposant que l'alumine a une émissivité de  $\varepsilon = 0.4$  et que les particules échangent leur rayonnement avec l'environnement à  $T_{sur} = 300 \text{ K}$ , évaluer la validité d'avoir négligé ce rayonnement.

Réponses :

$$\text{a) } t_{tot} = 9.1 \cdot 10^{-4} \text{ s} \approx 1 \text{ ms} \quad \text{b) } \frac{\dot{q}_{rad \text{ max}}}{\dot{q}_{conv}} = 2.8 \cdot 10^{-3}$$

**20.09.** Une jonction de thermocouple, qui peut être considérée comme une sphère, est utilisée pour mesurer la température dans un flux de gaz. Le coefficient d'échange convectif entre la jonction et le gaz est  $h = 400 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Les caractéristiques du matériau de la jonction (60Sn40Pb ASTM B 23) sont : conductivité  $\lambda = 49.8 \text{ W/mK}$ ; capacité calorifique  $c = 173 \text{ J/kgK}$ ; masse

volumique  $\rho = 8600 \text{ kg/m}^3$ .

- a) Quel diamètre de jonction est nécessaire pour que le thermocouple ait une constante de temps d'une demi seconde ?
- b) Si la jonction est à  $25 \text{ }^\circ\text{C}$  et est placée dans le gaz à  $200 \text{ }^\circ\text{C}$ , à quel moment la jonction atteindra-t-elle  $199 \text{ }^\circ\text{C}$  ?

Réponses :     a)  $d = 0.801 \text{ mm}$              b)  $t_{199 \text{ }^\circ\text{C}} = 2.58 \text{ s}$

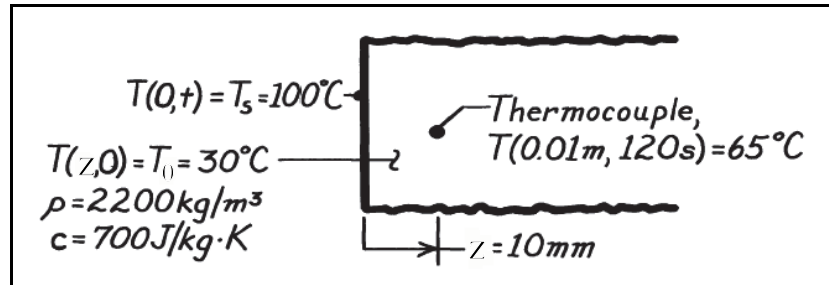
**20.10.** Un composant électronique, comme un transistor monté sur un mince radiateur, peut être modélisé comme un objet spatial isotherme avec une source interne de chaleur et une résistance externe de convection.

Sachant que la puissance de la source interne est  $\dot{Q} = 60 \text{ W}$ , que la masse  $m$  du radiateur en aluminium est de  $0.31 \text{ kg}$  et atteint  $100 \text{ }^\circ\text{C}$  dans un air ambiant de  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  en régime. Si le composant est initialement à  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ , quelle température atteint-il après 5 minutes après avoir enclenché la puissance ?  $c_{\text{alu}} = 918 \text{ J/kgK}$

Réponse :

**Exercices concernant principalement le Milieu semi-infini (Chap. 3.)**

**30.01.** Connaissant la température initiale  $T_{(z,0)} = 30^\circ\text{C}$  d'un bloc de matière, la position du thermocouple ( $z = 10\text{ mm}$ ) ainsi que la température ( $T_{(0.01\text{ m}, 120\text{ s})} = 65^\circ\text{C}$ ) après que sa surface soit mise en contact avec de l'eau bouillante  $T_{(0,t)} = 100^\circ\text{C}$ , calculer la conductibilité thermique  $\lambda$  du matériau. De plus :  $\rho_{\text{matériau}} = 2200\text{ kg/m}^3$  et  $c_{\text{matériau}} = 700\text{ J/kgK}$ .



Réponse :  $\lambda = 1.42\text{ W/mK}$

**30.02.** Soit un mur, semi-infini, en brique ( $\lambda = 0.4\text{ W/mK}$  ;  $a = 0.03 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ ) se trouve initialement à la température de  $10^\circ\text{C}$ . Après 2 heures d'exposition à une nuit sans nuage, estimez quelle sera la température :

- en surface;
- à  $1\text{ cm}$  de profondeur.

On supposera que le flux perdu par le mur est constant et égal à l'émittance d'un corps noir à  $0^\circ\text{C}$  rayonnant vers les espaces à la température du zéro absolu, soit :  $315\text{ W/m}^2$ .

Réponses : a)  $T_{(0,2\text{ h})} = -31.3^\circ\text{C}$  b)  $T_{(0.01\text{ m}, 2\text{ h})} = -23.9^\circ\text{C}$

**30.03.** On considère un début de semaine froid de l'hiver et on suppose la température initiale du sol à  $T_0 = 16^\circ\text{C}$ . Les conditions climatiques changent soudainement et il tombe rapidement une averse de neige qui laisse au sol une couche de neige mouillée. Cette couche de neige ajoute une résistance thermique de  $R_{\text{neige}} = 0.15\text{ m}^2\text{ K/W}$  entre le sol et l'air. Si la température extérieure se maintient à  $T = -5^\circ\text{C}$  pendant 72 heures, que le coefficient de convection entre l'air et la neige est de  $h = 10\text{ W/m}^2\text{ K}$  durant cette période et que la résistance thermique de la neige reste constante durant cette même période, calculez la température en surface du sol après 72 heures. Vous pouvez négliger la capacité calorifique de la neige, négliger les gains et pertes par rayonnement et utiliser les propriétés suivantes pour le sol :

$\lambda_{\text{sol}} = 0.52\text{ W/mK}$  ;  $c_{\text{sol}} = 1840\text{ J/kgK}$  ;  $\rho_{\text{sol}} = 2050\text{ kg/m}^3$ .

Réponse :  $T_{(0,72\text{ h})} = 1^\circ\text{C}$  ( $2^\circ\text{C}$  via MATLAB)

**30.04.** Si on considère le sol comme un solide semi-infini avec ( $a = 0.0018\text{ m}^2/\text{heure}$ ) pour un sol moyennement humide. (Pour la terre humide  $a = 0.2 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ , pour la terre sèche  $a = 0.8 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ ).

Calculez la profondeur à laquelle la température est maximale à minuit, si  $12\text{ h}$  avant le maximum est à midi (variation diurne-nocturne). A ce moment quelle en est l'atténuation de l'amplitude.

Expliquez l'existence de "mines de glace", c'est-à-dire des endroits (canyons, mines,...) où de la glace se forme en été alors qu'en hiver les mêmes endroits sont relativement chauds. Quelle en est la profondeur ?

Réponses :

$$\begin{cases} z_{sol\ humid} = 0.1747\ m \\ z_{sol\ \pm\ humid} = 0.2763\ m \\ z_{sol\ sec} = 0.3495\ m \end{cases} \quad \begin{cases} z_{sol\ humid} = 4.451\ m \\ z_{sol\ \pm\ humid} = 7.037\ m \\ z_{sol\ sec} = 8.902\ m \end{cases}$$

**30.05.** Une épaisse plaque de béton est initialement à une température uniforme de 30 °C. On commence à la laver avec de l'eau à 10 °C. Le coefficient de transfert  $h$  est de 400 W/m<sup>2</sup>K, quelle est la température de la dalle de béton à une profondeur de 1 cm après 20 minutes de lavage ?

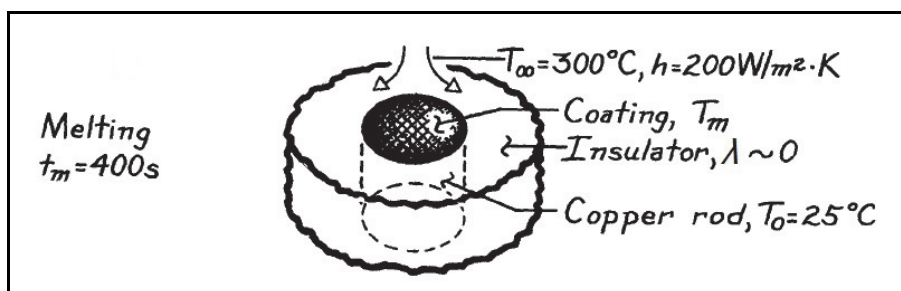
Données :  $\lambda = 1.9\ W/mK$  ;  $a = 9.42\ 10^{-7}\ m^2/s$ .

Réponse :  $T_{(0.01\ m,\ 20\ min)} = 13.3\ ^\circ C$

**30.06.** Dans l'installation des conduites d'eau souterraines, il est important de déterminer la profondeur à laquelle une variation de température à la surface se fait sentir durant une période de 12 h. Sachant que la température initiale du sol est de 4 °C et que la température à la surface tombe brusquement à - 4 °C, déterminer la profondeur à laquelle pénètre la température du point de congélation. On admettra que le sol est sec et  $a = 0.0011\ m^2/h$ .

Réponse :  $z = 0.11\ m$

**30.07.** Une manière simple pour mesurer un coefficient d'échange est de déposer une mince couche d'un matériau qui a un point de fusion précisément connu sur un long cylindre de cuivre encastré dans un isolant parfait. En sachant le temps exact qu'il faudra pour amener la couche de surface au point de fusion on pourra ainsi déterminer le coefficient d'échange. ( $\lambda = 400\ W/mK$  ;  $a = 1.0\ 10^{-4}\ m^2/s$ ). On peut aussi renverser le "paradigme". Si la température initiale est de 25 °C et qu'il a fallu 400 secondes pour faire fondre la couche mince avec un coefficient  $h = 200\ W/m^2\ K$  et une température de l'air de 300 °C, quelle est la température de fusion de la couche mince ?



Réponse :  $T_{(0,\ 400\ s)} = 53.5\ ^\circ C$

**30.08.** Une chambre de combustion cylindrique, de 25 cm de diamètre intérieur, est revêtue intérieurement d'une couche réfractaire de 25 mm d'épaisseur pour protéger la paroi extérieure. Afin de déterminer les tensions thermiques, il est nécessaire d'obtenir la répartition des températures dans le revêtement 1 min après le début de combustion. On tiendra compte des données suivantes :

$T_{\infty} = 1650^{\circ}C$  ;  $T_0 = 38^{\circ}C$  ;  $h = 230 W/m^2 K$  ;  $\lambda = 1.07 W/mK$  ;  $a = 5 \cdot 10^{-7} m^2/s$  .

- a) Quelle sera la température en surface de cette couche réfractaire ?  
b) Quelle sera la température à 25 mm en profondeur ?

Réponses :     a)  $T_{(s, 1 \text{ min})} = 1031^{\circ}C$     b)  $T_{(25 \text{ mm}, 1 \text{ min})} = 40^{\circ}C$

**30.09.** On considère un mur de largeur  $l = 7 \text{ cm}$  à la température initiale  $T_0 = 25^{\circ}C$  . Sur l'une de ses deux faces, on applique une densité de flux de  $10 \text{ kW/m}^2$  constante. L'autre face échange de la chaleur par convection avec de l'air ( $T_{\infty} = 25^{\circ}C$  ;  $h = 20 W/m^2 K$ ).

Les caractéristiques du mur sont :  $\lambda = 0.69 W/mK$  ;  $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$  ;  $c = 840 J/kgK$  .

Quelle sera la température, après 10 minutes d'exposition, à la profondeur de 4 cm ?

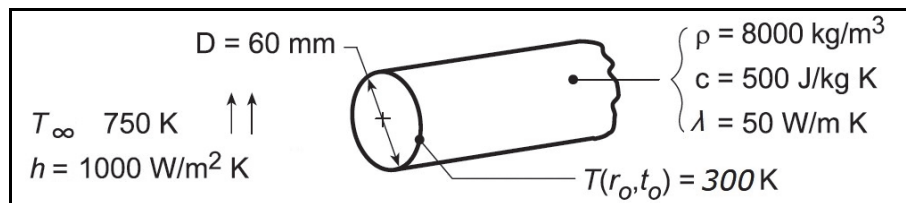
Réponse :      $T_{(4 \text{ cm}; 10 \text{ min})} = 44.9^{\circ}C$     (Rem. : on ne tient, en fait, pas compte de l'autre face)



### Exercices concernant principalement les Milieux limités (Chap. 4.)

**40.01.** Une longue barre, dont les dimensions et les caractéristiques sont connues, initialement à température uniforme de  $300\text{ K}$  est chauffée, par convection forcée ( $h = 1000\text{ W/m}^2\text{ K}$ ), dans un four maintenu à  $750\text{ K}$ . Calculer :

- la température au centre  $T_{(0,t)}$  lorsque la température superficielle  $T_{(r_0,t)}$  atteint  $550\text{ K}$ ;
- le temps qu'il faut pour que le centre atteigne cette température;
- L'influence du coefficient de convection  $h$  sur l'historique de température de l'axe.



**Réponses :** a)  $T_{(0,t)} = 487\text{ K}$       b)  $t = 44.6\text{ s}$       c) si  $h$  divisé par 10,  $t$  multiplié par 6

**40.02.** En Californie, le problème de la protection des oranges contre le gel durant les nuits froides est d'une importance économique considérable. La chaleur est transmise à partir des oranges par rayonnement et convection vers le milieu froid environnant. Pour réduire la chaleur transmise par rayonnement vers le ciel froid et pour chauffer l'air environnant, on utilise des brûleurs à mazout ou des feux de feuilles mortes ou déchets. Ceux-ci produisent un écran de fumée qui réduit les pertes par rayonnement et chauffe également l'air ambiant. Pour déterminer les conditions de chauffage, il est nécessaire de calculer la température au centre d'une orange de  $100\text{ mm}$  de diamètre, initialement à la température de  $18\text{ }^{\circ}\text{C}$ , lorsqu'elle est exposée, pour une période de  $6\text{ h}$ , à un milieu environnant dont la température effective est  $-4\text{ }^{\circ}\text{C}$ . La conductance globale est estimée à  $11.4\text{ W/m}^2\text{K}$ . Comme le jus d'une orange se compose en grande partie d'eau, on utilisera les propriétés physiques de l'eau :  $\lambda_{H_2O} = 0.5820\text{ W/mK}$  et  $a_{H_2O} = 1.25 \cdot 10^{-7}\text{ m}^2/\text{s}$ .

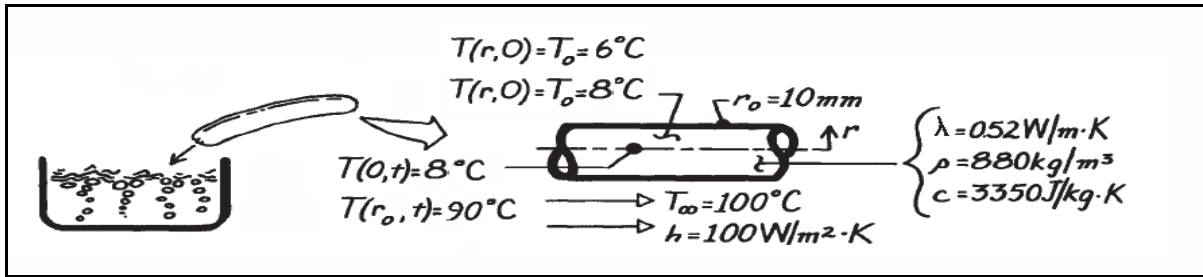
**Réponse :**  $T_{(0,6h)} = -2.4\text{ }^{\circ}\text{C}$  ( $-1.8\text{ }^{\circ}\text{C}$  Abaque)

**40.03.** Vous sortez un "hot dog" de votre frigo à la température de  $6\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

- Vous l'oubliez, le temps de répondre à un mail, sur une assiette à l'air libre. Lorsque vous avez fini, en tant que bon ingénieur, vous mesurez sa température en son centre et vous relevez une température de  $8\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Sachant que l'air ambiant est à la température de  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  et que vous estimez que le coefficient de convection  $h_{\text{air}} = 4\text{ W/m}^2\text{ K}$ , vous en déduisez facilement le temps que vous avez mis pour répondre à votre message. Et pour être sûr de vous, vous utilisez deux approches différentes pour calculer ce temps.
- Vous décidez à ce moment de le cuire dans de l'eau bouillante ( $T_{\text{eau}} = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). Le coefficient de convection  $h_{\text{eau}}$  est estimé à  $100\text{ W/m}^2\text{K}$ . Combien de temps avez vous pour boire une bière, sachant que la température de surface de votre "hot dog" doit être de  $90\text{ }^{\circ}\text{C}$  pour être cuite. Sans reprendre votre thermomètre, vous en déduisez la température en son centre.

$$\lambda_{\text{hot dog}} = 0.52\text{ W/mK} ; c_{\text{hot dog}} = 3350\text{ J/kgK} ; \rho_{\text{hot dog}} = 880\text{ kg/m}^3 .$$

On considérera que la longueur  $l$  est grande par rapport au rayon du hot dog ( $r_{0\text{ hot dog}} = 10\text{ mm}$ ).



Réponses : a)  $t = 568 \text{ s}$  b)  $t = 396 \text{ s}$ ;  $T_{(0, 396 \text{ s})} = 78.6^\circ \text{C}$

**40.04.** Un cylindre de  $2 \text{ m}$  de long et de  $0.20 \text{ m}$  de diamètre, initialement à une température uniforme de  $400^\circ \text{C}$ , est plongé dans un bain d'eau à  $50^\circ \text{C}$ . Sachant que la diffusivité thermique du cylindre a vaut  $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  la conductivité thermique  $\lambda$  vaut  $40 \text{ W/mK}$  et que le coefficient de transfert de chaleur à la surface du cylindre  $h$  vaut  $200 \text{ W/m}^2\text{K}$ , on demande de calculer après 20 minutes d'immersion :

- la température au centre du cylindre;
- la température à la surface du cylindre;
- la fraction de chaleur potentiellement échangeable  $Q/Q_0$  ainsi que la chaleur totale  $Q$  échangée avec le bain.

On négligera les effets de bouts.

Réponses : a)  $T_{(0, 20 \text{ min})} = 183^\circ \text{C}$  b)  $T_{(0.20 \text{ m}, 20 \text{ min})} = 152^\circ \text{C}$   
c)  $Q/Q_0 = 0.65$ ;  $Q = 57.2 \text{ MJ}$

**40.05.** Une bille métallique de  $5 \text{ mm}$  de rayon est initialement à une température uniforme de  $400^\circ \text{C}$ . Cette bille est soumise à un traitement thermique en deux étapes.

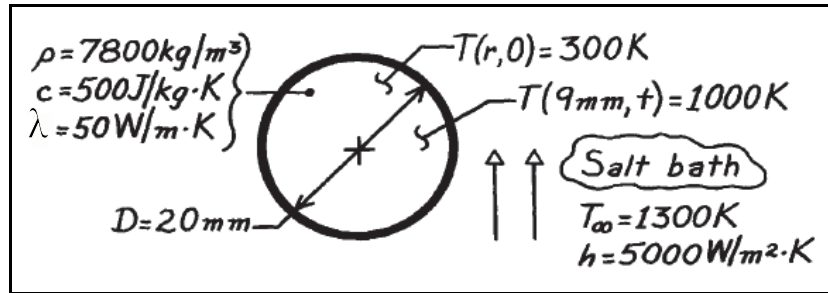
- Dans la première, on la refroidit dans de l'air à  $20^\circ \text{C}$  pendant un temps  $t_{\text{air}}$  nécessaire pour avoir une température au centre de la sphère égale à  $335^\circ \text{C}$ . Pendant cette étape, le coefficient de convection à la surface vaut  $h_{\text{air}} = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$ .
- Dans une deuxième étape, la bille est alors introduite dans un bain d'eau à la température de  $20^\circ \text{C}$ . Ce bain est fortement mélangé et le coefficient  $h_{\text{eau}}$  vaut alors  $6000 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Quel est le temps requis pour avoir une température en surface de  $40^\circ \text{C}$ . (Calculez ce temps par deux approches différentes). Quelle est à ce moment la température en son centre ?

$\lambda_{\text{métal}} = 20 \text{ W/mK}$ ;  $c_{\text{métal}} = 1000 \text{ J/kgK}$ ;  $\rho_{\text{métal}} = 3000 \text{ kg/m}^3$ .

Réponses : a)  $t_{\text{air}} = 93.8 \text{ s}$  b)  $t_{40^\circ \text{C}} = 2.7 \text{ s}$

**40.06.** Dans le traitement thermique, afin de durcir des billes de roulement en acier ( $\lambda_{\text{acier}} = 50 \text{ W/mK}$ ;  $c_{\text{acier}} = 500 \text{ J/kgK}$ ;  $\rho_{\text{acier}} = 7800 \text{ kg/m}^3$ ), il est judicieux d'augmenter la température de surface pendant un court instant sans pour autant chauffer de manière significative l'intérieur de la bille. Pour ce faire, on plonge brutalement la bille dans un bain de sel à température  $T_\infty = 1300 \text{ K}$  (coefficient de convection  $h_{\text{bain}} = 5000 \text{ W/m}^2\text{K}$ ). Sachant que le métal est trempé si sa température excède  $1000 \text{ K}$ , calculer le temps requis pour trempé le millimètre extérieur d'une bille de diamètre de  $20 \text{ mm}$  (température initiale  $T_{0 \text{ bille}} = 300 \text{ K}$ ). Quelle est à ce moment la température en son centre ?

Calculez de manière analytique et via les abaques de Heisler.



Réponses :  $t = 3.4 \text{ s}$  (3.3 s via abaques);  $T_{(0,t)} = 871.1 \text{ K}$

**40.07.** Une grande plaque de verre de 150 mm d'épaisseur doit être refroidie à partir d'une température initiale de 482 °C par le passage d'un courant d'air parallèle à ses faces planes. Pour éviter des tensions thermiques excessives, le gradient de température maximal ne doit pas excéder 4 °C/cm. On supposera que l'air soufflé le long de la plaque a une vitesse telle que son élévation de température sera négligeable et que le coefficient d'échange de chaleur entre le verre et l'air sera de  $h = 28.38 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . En outre on négligera le rayonnement et on admettra que la conductivité thermique du verre est  $\lambda_{\text{verre}} = 1.1 \text{ W/mK}$ , sa masse volumique  $\rho_{\text{verre}} = 2\,200 \text{ kg/m}^3$  et sa chaleur spécifique  $c_{\text{verre}} = 1256 \text{ J/kgK}$ .

- Déterminer la plus basse température que peut avoir l'air de refroidissement.
- Si l'air, à la température déterminée ci-dessus, a circulé pendant trois heures, quelle est la température la plus basse qu'on peut alors lui donner ?
- Si l'air, ayant la même température que dans a), circule pendant trois heures, quelle serait la différence de température entre le centre et la surface extérieure de la plaque ?

Réponses : a)  $T_\infty = 455^\circ \text{ C}$       b)  $T_{\infty \rightarrow 3h} = 434^\circ \text{ C}$       c)  $\Delta T = 6.97^\circ \text{ C}$

**40.08.** Une plaque de caoutchouc d'épaisseur  $2l = 20 \text{ mm}$  chauffée jusqu'à une température  $T = 140^\circ \text{ C}$ , est placée dans l'air portée à la température de  $T_{\text{air}} = 15^\circ \text{ C}$ . Calculer la température au centre et à la surface de la plaque 20 min après le début du refroidissement. Propriétés du caoutchouc :  $\lambda = 0.175 \text{ W/mK}$ ;  $a = 0.833 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ . Le coefficient de convection entre la plaque et l'air ambiant vaut  $h = 65 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ .

Est-il possible de calculer ces valeurs de 2 manières différentes ?

Réponses :  $T_{(0, 20 \text{ min})} = 47.6^\circ \text{ C}$        $T_{(10 \text{ mm}, 20 \text{ min})} = 25.5^\circ \text{ C}$  Oui : par abaques

**40.09.** Un cylindre d'acier inox (diamètre = 2 cm,  $T_{(r,0)} = 900^\circ \text{ C}$ ) est refroidi dans l'eau ( $T_\infty = 25^\circ \text{ C}$ ).

- Calculer la température superficielle après 5 s.
- Comparer les résultats avec ceux d'un refroidissement dans l'huile à la même température. On prendra pour coefficient de convection :

$$h_{\text{acier-huile}} = 1700 \text{ W/m}^2 \text{ K} \text{ et } h_{\text{acier-eau}} = 4500 \text{ W/m}^2 \text{ K}.$$

Caractéristiques de l'acier inox :  $\rho = 7780 \text{ kg/m}^3$ ;  $c = 440 \text{ J/kgK}$ ;  $\lambda = 15.5 \text{ W/mK}$ .

Réponses : a)  $T_{(r=0.01, 5s)} = 241^\circ \text{ C}$  b)  $T_{(r=0.01, 5s)} = 638^\circ \text{ C}$

**40.10.** Une compagnie de congélation des aliments procède, pour conserver les épinards, en deux étapes. Les épinards sont d'abord comprimés entre de grandes plaques, la plaque d'épinards est ensuite exposée à un milieu de refroidissement à basse température.

La grande plaque constituée par les épinards comprimés est initialement à une température uniforme de  $21\text{ }^{\circ}\text{C}$ ; elle doit être réduite à une température de  $-34\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Toutefois, la température en tout point de la plaque ne doit jamais descendre au dessous de  $-51\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Le milieu de refroidissement qui traverse les deux faces de la plaque est à une température constante de  $-90\text{ }^{\circ}\text{C}$  avec un coefficient de convection estimé à  $35\text{ W/m}^2\text{K}$ .

On admettra pour les épinards les données suivantes :

- ▶ masse volumique :  $\rho = 80\text{ kg/m}^3$
- ▶ conductivité thermique :  $\lambda = 0.86\text{ W/mK}$
- ▶ chaleur spécifique :  $c = 2090\text{ J/kgK}$

Quelle est l'épaisseur maximale de la plaque d'épinards que l'on peut espérer refroidir en 60 minutes ?

Réponse :  $e \approx 25\text{ cm}$

**40.11.** Les systèmes de stockage d'énergie thermique impliquent généralement en une cuve remplie de sphères solides, à travers lequel un gaz chaud s'écoule si le système est en cours de chargement, ou un gaz froid s'il est déchargé. Dans un processus de charge, le transfert de chaleur du gaz chaud augmente l'énergie thermique stockée dans les sphères plus froides; pendant la décharge, l'énergie stockée diminue à mesure que la chaleur est transférée des sphères plus chaudes au gaz plus froid.

Considérons une cuve remplie de sphères en Pyrex de  $75\text{ mm}$  de diamètre ( $\rho = 2225\text{ kg/m}^3$ ,  $c = 835\text{ J/kgK}$ ,  $\lambda = 1.4\text{ W/mK}$ ) pendant un processus de chargement pour lequel le gaz entrant dans l'unité de stockage à une température de  $T_g = 300\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Si la température initiale des sphères est  $T_0 = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$  et le coefficient de convection est  $h = 75\text{ W/m}^2\text{K}$ , combien de temps faudra-t-il à une sphère près de l'entrée du système pour accumuler 90 % de l'énergie thermique maximale possible ? Quelle est, à ce moment là, la température correspondante au centre de la sphère ainsi que la température en surface ?

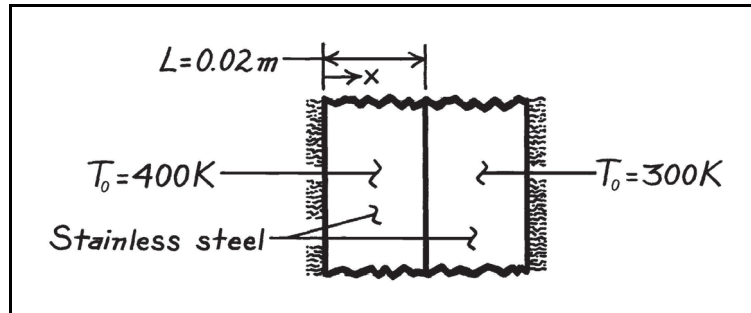
Réponses :  $t_{90\%} = 1019\text{ s}$ ;  $T_{(0,1019\text{ s})} = 257.3\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;  $T_{(surface,1019\text{ s})} = 281.2\text{ }^{\circ}\text{C}$

**Exercices concernant principalement les Milieux limités : cas particuliers (Chap. 4. §4.4)**

**44.01.** Deux plaques d'un même matériau et d'épaisseur  $L$  sont initialement à des températures différentes. Leurs faces sont soudainement mises en contact. Les surfaces extérieures étant isolées. Quelle est la température à la paroi isolée, de la plaque initialement la plus chaude, 60 s après avoir mis les deux plaques en contact ?

Les caractéristiques du matériaux sont :  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$  ;  $c = 500 \text{ J/kgK}$  ;  $\lambda = 15 \text{ W/mK}$  .

Remarque : on négligera la résistance de contact.

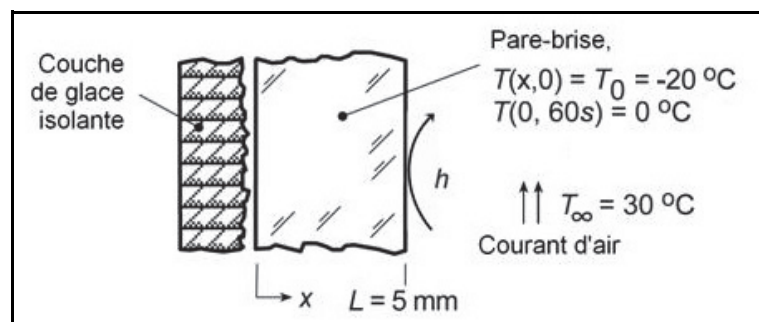


Réponse :  $T_{(0,60s)} = 365.9 \text{ K}$

**44.02.** *Le mur de fournaise* : A l'usine de la Canadian Copper Refiners du groupe Noranda à Montréal Est, un des postes de travail recycle les vieux objets contenant du cuivre en les faisant fondre pour en séparer leur contenu. Les murs de la fournaise employée sont recouverts de briques réfractaires ( $a = 7.1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ ) et la température de surface interne est maintenue à 1100 K pendant la fonte des objets. Le mur de cette fournaise est conçu de façon à ce que pour une température initiale de 300 K, la température à mi-paroi ne doit pas s'élever à plus de 325 K après 4 heures d'opération. Quelle doit être l'épaisseur minimale des murs ?

Réponse :  $e_{\min} = 0.600 \text{ m}$

**44.03.** Une couche de glace, de 5 mm d'épaisseur, se forme sur le pare-brise d'une voiture stationnée pendant une nuit froide pour laquelle la température ambiante est de  $-20^\circ\text{C}$ . Au démarrage, en utilisant un nouveau système de dégivrage, la surface intérieure est soudainement exposée à un courant d'air à  $30^\circ\text{C}$ .



a) En supposant que la glace se comporte comme une couche isolante sur la surface extérieure, quelle est la valeur du coefficient de convection intérieur  $h$  qui permettrait à la surface extérieure de parvenir à  $0^\circ\text{C}$  en 60 s ?

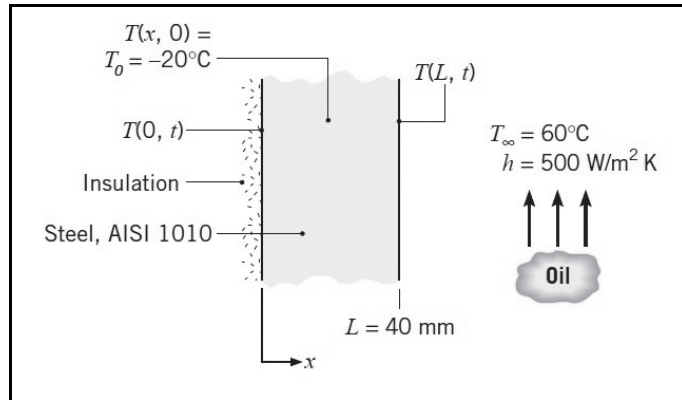
b) Quelle est alors la température à la surface intérieure du pare-brise ?

Les propriétés thermophysiques, supposées constantes, du pare-brise sont :

$\lambda = 1.2 \text{ W/mK}$  ;  $c_p = 830 \text{ J/kgK}$  ;  $\rho = 2200 \text{ kg/m}^3$  .

Réponses : a)  $h \approx 96 \text{ W/m}^2 \text{ K}$       b)  $T_{(0.005 \text{ mm}, 60 \text{ s})} \approx 4.8^\circ\text{C}$

**44.04.** Considérons un tuyau en acier AISI 1010 de 1 m de diamètre et de 40 mm d'épaisseur. Ce tuyau est fortement isolé à l'extérieur et, avant l'introduction du fluide, à une température uniforme de  $-20^{\circ}\text{C}$ . On introduit de l'huile chaude, à température de  $60^{\circ}\text{C}$ , à l'intérieur du tube créant ainsi une turbulence correspondant à un coefficient de convection de  $h = 500\text{ W/m}^2\text{ K}$ . Au temps  $t = 8\text{ min}$  :



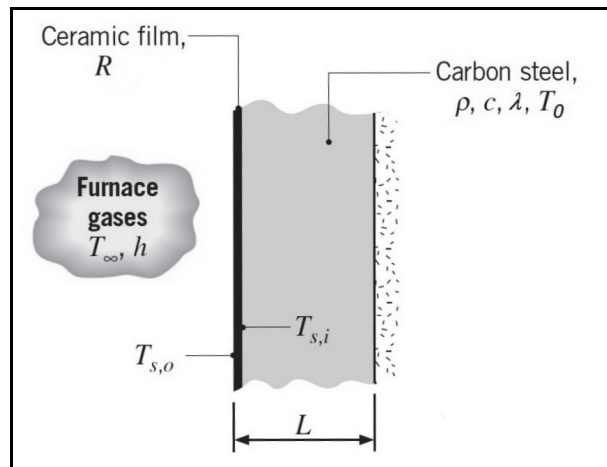
- Quelle est la température à la surface extérieure du tube (celle en contact avec l'isolation) ?
  - Quelle est le flux (en  $\text{W/m}^2$ ) échangé entre l'huile et le tube ?
  - Quelle quantité d'énergie, par mètre de longueur, a été échangée entre l'huile et le tube ?
- Les caractéristiques, supposées constantes du matériaux AISI 1010, sont :

$$\rho = 7832\text{ kg/m}^3 ; c = 434\text{ J/kgK} ; \lambda = 63.9\text{ W/mK}.$$

Est-il possible de calculer ces valeurs de 2 manières différentes ?

Réponses : a)  $T_{(0,8\text{ min})} = 42.1^{\circ}\text{C}$     b)  $\dot{q} = 7750\text{ W/m}^2$     c)  $Q = -26.9 \cdot 10^{-6}\text{ J/m}$   
 Oui : par abaques

**44.05.** Un mur intérieur d'un four est formé d'une paroi en acier au carbone ( $\lambda = 60\text{ W/mK}$  ;  $\rho = 7850\text{ kg/m}^3$  ;  $c = 430\text{ J/kgK}$ ) d'une épaisseur de 10 mm. Pour protéger l'acier des effets corrosifs des gaz de combustion, la surface du mur est recouverte d'un mince film de céramique qui possède une résistance thermique de  $R_{\text{céramique}} = 0.01\text{ m}^2\text{ K/W}$ . La paroi extérieure du four peut être considérée comme parfaitement isolée. La température initiale du mur est  $T_0 = 300\text{ K}$  et les gaz de combustion



sont à une température de  $T_{\infty} = 1300\text{ K}$  supposée constante. Le coefficient de convection des gaz de combustion au contact du film de céramique peut être considéré égal à  $h = 25\text{ W/m}^2\text{ K}$ . La capacité calorifique du film céramique est négligeable.

- Combien de temps faut-il pour que la paroi d'acier atteigne la température  $T_{s,i} = 1200\text{ K}$  ?
- A cet instant que vaut la température  $T_{s,o}$  du film de céramique ?

Réponses : a)  $t = 3886\text{ s}$     b)  $T_{s,o} = 1220\text{ K}$

### Exercices concernant principalement la Conduction multidirectionnelle (Chap. 6.)

**60.01.** Un bloc de glace ( $a = 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ;  $\lambda = 2 \text{ W/mK}$ ) de dimensions  $10 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$  et de température initiale  $T_0 = -20^\circ \text{C}$ , est subitement exposé à l'air libre de température  $T_\infty = 26^\circ \text{C}$  ( $h = 8.5 \text{ W/m}^2 \text{K}$ ).

- Déterminez l'instant à partir duquel le bloc de glace commencera à fondre.
- Que deviendrait cet instant si le bloc de glace était un cube de  $5 \text{ cm}$  de côté ?

Réponses : a)  $t = 13.6 \text{ min}$  b)  $t = 12.2 \text{ min}$

**60.02.** Une billette cylindrique, d'un diamètre de  $10 \text{ cm}$  et d'une longueur de  $20 \text{ cm}$ , en acier inoxydable ( $\lambda = 23.5 \text{ W/mK}$ ;  $a = 6.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) est chauffée à  $590^\circ \text{C}$  pour subir un traitement de formage. Si la température minimale admissible pour le formage est de  $480^\circ \text{C}$ , combien de temps peut-on exposer la billette à l'air ayant  $38^\circ \text{C}$  si le coefficient de convection  $h = 85 \text{ W/m}^2 \text{K}$  ?

Réponse :  $t = 47 \text{ s}$  (Gradient nul :  $t = 189 \text{ s}$ )

**60.03.** Dans l'étude d'équipement contre l'incendie, il est nécessaire de connaître comment les longues poutres en bois peuvent supporter le feu avant qu'elles s'enflamment. Les poutres sont longues, de section droite  $50 \times 100 \text{ mm}$  et initialement à la température uniforme  $16^\circ \text{C}$ . Les propriétés physiques du bois sont les suivantes :

$$\rho = 800 \text{ kg/m}^3 ; c = 2512 \text{ J/kgK} ; \lambda = 0.335 \text{ W/mK} .$$

A l'instant où le feu se déclare, les poutres seront exposées aux gaz à  $649^\circ \text{C}$  et la conductance par unité de surface sur toutes les faces sera égale à  $h = 16.7 \text{ W/m}^2 \text{K}$ . Evaluer le temps qui s'est écoulé avant que le bois atteigne la température d'inflammation de  $427^\circ \text{C}$ .

Réponse :  $t \approx 0.23 \text{ h}$

**60.04.** Une brique réfractaire de dimensions, en  $\text{mm}$ ,  $220 \times 105 \times 50$ , à température initiale de  $38^\circ \text{C}$ , est placée dans un écoulement de gaz chaud ( $T_\infty = 650^\circ \text{C}$ ;  $h = 23 \text{ W/m}^2 \text{K}$ ). Calculez, après  $1 \text{ h}$  la température au centre de cette brique.

Caractéristiques de la brique :  $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ ;  $\lambda = 1.04 \text{ W/mK}$ ;  $c = 960 \text{ J/kgK}$ .

Réponses : a)  $T_{(0,0,0,1h)} = 551.6^\circ \text{C}$  b)  $t \approx 47.8 \text{ min}$

**60.05.** Un long cylindre de  $20 \text{ mm}$  de diamètre, fabriqué en alumine (oxyde d'aluminium polycristallin) et initialement à une température uniforme de  $850 \text{ K}$ , est soudainement exposé à un fluide à une température de  $350 \text{ K}$  avec un coefficient de convection  $h = 500 \text{ W/m}^2 \text{K}$ . Estimer la température centrale de la tige après  $30 \text{ s}$  à une extrémité exposée et à une distance axiale de  $6 \text{ mm}$  de l'extrémité. Caractéristiques, supposées constantes, de l'alumine :

$$\rho = 3970 \text{ kg/m}^3 ; c = 1154 \text{ J/kgK} ; \lambda = 12.4 \text{ W/mK} .$$

Réponse :  $T_{(0.6 \text{ mm}; 30 \text{ s})} = 331^\circ \text{C}$

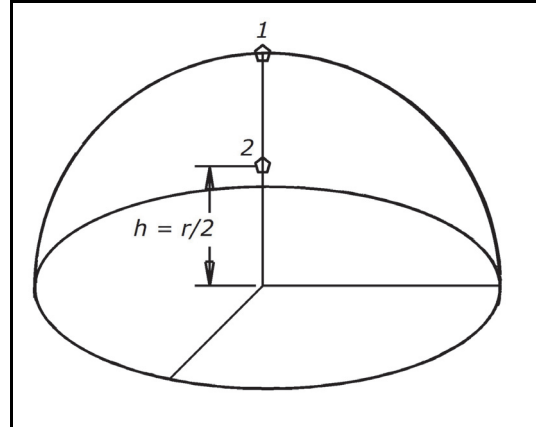
**60.06.** Un cylindre en Pyrex de  $10 \text{ cm}$  de diamètre et  $16 \text{ cm}$  de long, ayant les propriétés suivantes :  $\lambda = 1.3 \text{ W/mK}$ ;  $c = 750 \text{ J/kgK}$  et  $\rho = 2200 \text{ kg/m}^3$ , initialement à une température uniforme de  $20^\circ \text{C}$  est placé dans un four où la température de l'air ambiant est de  $600^\circ \text{C}$  et

$h = 30 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Déterminez les températures minimale et maximale dans le cylindre 30 min après son placement dans le four.

Réponses :  $T_{(\text{coin}, 30 \text{ min})} = 527^\circ \text{ C}$ ;  $T_{(\text{centre}, 30 \text{ min})} =$

**60.07.** Une pièce hémisphérique en Pyrex de 0.1 m de diamètre, initialement à une température uniforme de  $1400^\circ \text{ C}$ , est refroidie avec de l'air ayant une température supposée constante de  $30^\circ \text{ C}$  et un coefficient de convection  $h = 40 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Déterminez, 60 min après son placement dans l'air ambiant, les températures aux points 1 (sommet de l'hémisphère) et 2 (mi hauteur).

Propriétés du Pyrex :  $\lambda = 1.3 \text{ W/mK}$  ;  
 $c = 750 \text{ J/kgK}$  ;  $\rho = 2200 \text{ kg/m}^3$



Réponses :

**60.08.** Un barreau cylindrique de 6 cm de diamètre et de 1 m de long, en fer forgé à 0.5 % de carbone initialement à  $330^\circ \text{ C}$  est brutalement soumis à convection forcée  $h = 200 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  dans de l'air à  $T = 30^\circ \text{ C}$ .

Calculer la température en un point de l'axe situé à 3 cm de la face terminale 2 minutes après le début du refroidissement.

Caractéristiques de l'alliage :  $\rho = 7870 \text{ kg/m}^3$  ;  $c = 460 \text{ J/kgK}$  ;  $\lambda = 51.8 \text{ W/mK}$ .

Réponse :



### Exercices concernant principalement les Compléments : Analogies

**CA.01.** Retrouvez l'équation en température pour la méthode du gradient nul au moyen des analogies.

Réponse : 
$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp(-t/\tau)$$

**CA.02.** Une brique creuse à les dimensions du dessin ci-contre. La dimension transversale de la brique est égale à  $H$ . En utilisant les analogies électriques, trouvez la conductivité thermique équivalente de cette brique. En prenant, notamment, comme hypothèse que dans la cavité d'air, coexistent des échanges par rayonnement et conduction si on considère que les dimensions sont suffisamment faibles pour empêcher les mouvements convectifs. Application numérique :  $h = 10 \text{ cm}$  ;  $b = 5 \text{ cm}$  .  $\lambda_{\text{air}} = 0.025 \text{ W/mK}$  ;  $\lambda_{\text{brique}} = 1.25 \text{ W/mK}$  ;  $h_{\text{rayonnement}} = 6 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  .

Réponse : 
$$\lambda_{\text{éq}} \approx 0.5 \text{ W/mK}$$

