ANNEXE 2 : NOMBRES ADIMENSIONNELS

(Version du 4 août 2020 (10h18))

1) le nombre de Biot [1] *Bi*, qui *mesure le rapport entre la résistance thermique interne du milieu et la résistance thermique externe* :

$$\boxed{Bi = \frac{h\left(V/A\right)}{\lambda}} = \frac{\dfrac{V/A}{\lambda\ A}}{\dfrac{1}{h\ A}} = \frac{Résistance\ \ interne}{Résistance\ \ externe} \quad \textbf{\textit{(éq. A2.2.)}}$$

<u>Notations</u> :	V	le volume de la pièce	m^3
	A	la surface d'échange offerte à l'ambiance	m^2
	h	coefficient de convection	W/m^2K
	λ	coefficient de conductibilité thermique	W/mK
	V/A	représente la longueur caractéristique l_c du solide	m

$Bi < 0.1$	➜	La température peut être considérée comme constante dans une section donnée. (Méthode du gradient nul).
$0.1 \leq Bi < 100$	➜	Le flux de chaleur est limité par la conduction. (Correspond à une condition de Fourier).
$Bi \geq 100\left(\infty\right)$	➜	Le flux de chaleur est limité par la conduction. (Correspond à une condition de Dirichlet). (Une température imposée en surface implique que $h = \infty$ et donc que $Bi = \infty$).

Quelques valeurs de longueur caractéristique l_c :

Sphère : $$l_c = \frac{V}{A} = \frac{4/3\,\pi\, r_0^3}{4\,\pi\, r_0^2} = \frac{r_0}{3}$$

Cylindre long : $$l_c = \frac{V}{A} = \frac{\pi\, r_0^2\ l}{2\,\pi\, r_0\ l} = \frac{r_0}{2} \quad si\ (l >>> r_0)$$

Cube : $$l_c = \frac{V}{A} = \frac{c^3}{6\,c^2} = \frac{c}{6}$$

Plaque plane (mince) immergée : $$l_c = \frac{V}{A} = \frac{l\,h\,e}{l\,h + l\,h} = \frac{e}{2}$$

Plaque plane (mince) isolée d'un côté : $$l_c = \frac{V}{A} = \frac{l\,h\,e}{l\,h} = e$$

<u>Notations</u> :	r_0	rayon (de la sphère - du cylindre)	m
	c	côté du cube	m
	l	longueur	m
	h	hauteur	m
	e	épaisseur	m

[1] *Biot, Jean Baptiste (1774-1862) : physicien français.*

Considération supplémentaire [Réf. (4)]
Pour le calcul du nombre Biot, lorsqu'un solide est recouvert d'une mince couche protectrice, le calcul de cette quantité devient :

$$Bi = \frac{K\left(V/A\right)}{\lambda} \quad [W/m^2K]$$

où K est le coefficient d'échange global comportant toutes les résistances en jeu :

$$\boxed{K = \frac{1}{1/h + e_c/\lambda_c}} \quad \textbf{\textit{(éq. A2.15.)}}$$

Notations :	h	coefficient de convection	W/m^2K
	λ_c	coefficient de conductibilité thermique de la couche protectrice	W/mK
	e_c	épaisseur de la couche protectrice	m

Remarque [Réf. (2)] :
Plusieurs auteurs, malheureusement, définissent autrement le nombre de Biot *du cylindre et de la sphère*, ce qui en traîne de la confusion. Pour eux, la dimension caractéristique est dans ces deux cas, le rayon r_0, de sorte que :

$$\boxed{Bi_r = \frac{h\, r_0}{\lambda}} \quad \textbf{\textit{(éq. A2.16.)}}$$

Nous appellerons ce nombre de Biot Bi_r pour le distinguer du nombre de Biot défini précédemment. La même remarque s'applique au nombre de Fourier.
On a coutume de dire que pour les nombres de Biot inférieur à 0.1, on peut considérer que le solide se refroidit (ou se réchauffe) "*en bloc*", c'est-à-dire avec des gradients de température internes négligeables. On ajoute que l'erreur introduite, en supposant que la température est uniforme à tout instant, serait dans ce cas de moins de 5 %. Cette dernière allégation n'est vraie que si on utilise Bi_r.

2) le nombre de Fourier (2) *Fo*, qui *mesure le rapport entre la vitesse de transfert et la vitesse de stockage de la chaleur* :

$$\boxed{Fo = \frac{a\,t}{\left(V/A\right)^2}} = \frac{\lambda \dfrac{\Delta T}{l_c} A}{\dfrac{\rho\, c\, V\, \Delta T}{t}} = \frac{\left(\dfrac{\lambda\, A}{l_c}\Delta T\right)}{\left(\dfrac{d\left(m\, c\, T\right)}{dt}\right)} = \frac{\textit{Flux thermique à travers la surface (A)}}{\textit{Flux (vitesse) de stockage dans le vol. (V)}}$$

Notation :	a	diffusivité thermique	m/s^2

$Fo << 1$ ➜ Comme si le milieu était semi-infini, la température ne commence à varier qu'au voisinage de la paroi.

$Fo >> 1$ ➜ Distribution de la température est la somme de la distribution en régime permanent et d'une expression qui décroît exponentiellement avec le temps (régime dit de Fourier).

(2) *Fourier, Jean Baptiste Joseph (1768-1830) : mathématicien français.*

Remarque :
La même remarque que celle faite pour le nombre de Biot s'applique pour le nombre de Fourier. Nous utiliserons donc la notation Fo_r lorsque V/A est remplacé par r_0 dans la définition de Fo.

3) **le nombre de Reynolds** [3] *Re*, *qui représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité* (il caractérise le degré de turbulence).

$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{w\, d_h}{\nu}} \quad \textit{(éq. A2.22.)}$$

Notations :	w	la vitesse moyenne du fluide du fluide	*m/s*
	d_h	le diamètre hydraulique ($d_h = \frac{4\,A}{P} = l_c$)	*m*
	A	section frontale de l'écoulement	m^2
	P	périmètre mouillé par le fluide	*m*
	ν	la viscosité cinématique	m^2/s

4) **le nombre de Prandtl** [4] *Pr* n'est fonction que du fluide et *représente le rapport entre la diffusion de la quantité de mouvement ($\nu = \mu/\rho$) (viscosité cinématique) et la diffusion de la quantité de chaleur (diffusivité thermique)*.

$$\boxed{\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{\nu}{\lambda/\rho\, c}} \quad \textit{(éq. A2.25.)}$$

Notations :	ν	la viscosité cinématique	m^2/s
	μ	la viscosité dynamique	*kg/ms*
	a	la diffusivité du matériau	m^2/s
	c	la chaleur massique	*J/kgK*
	λ	coefficient de conductibilité thermique	*W/mK*
	ρ	la masse volumique	kg/m^3

Remarque :
Le nombre de Prandtl exprime la qualité de l'analogie entre la mécanique des fluides et le transfert de chaleur. Lorsque le nombre Prandtl vaut l'unité, cette analogie est parfaite (profil de vitesse et de température au sein du fluide identique, même épaisseur de la couche limite thermique et hydrodynamique).

[3] *Reynolds, Osborn (1842-1912) : ingénieur anglais.*
[4] *Prandtl, Ludwig (1875-1953) : savant allemand.*

5) **le nombre de Peclet** [5] *Pe, qui caractérise les flux de convection et de conduction dans un échange de chaleur convectif*. Le nombre de Peclet, peut définir, si la vitesse du fluide est faible, équivalente ou grande par rapport à la diffusivité thermique.
Dans la pratique, on remplace parfois le critère de Péclet par le produit du nombre de Reynolds *Re*, dans lequel on a remplacé le diamètre hydraulique d_h par une dimension linéaire l_P caractéristique du solide et du nombre de Prandtl *Pr* :

$$\boxed{Pe = \frac{w\, l_P}{a}} = \mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} = \frac{w\, d_h}{\cancel{\nu}}\;\frac{\cancel{\nu}}{\lambda/\rho\, c} \quad \textit{(éq. A2.27.)}$$

<u>*Notations*</u> :	w	la vitesse moyenne du fluide	*m/s*
	l_P	longueur caractéristique de Peclet qui vaut la 1/2 largeur de la surface de contact	*m*

6) **le nombre de Jaeger** [6] *Ja*.
Cependant il existe une autre définition du nombre de Peclet, celle qui est utilisée dans les *échauffement avec frottement*. Cette définition est appelée nombre de Jaeger *Ja* dans la littérature. Soit :

$$\boxed{Ja = \frac{w\, l_P}{2\, a_{fixe}}} \quad \textit{(éq. A2.28.)}$$

<u>*Notation*</u>s :	w	vitesse de déplacement relatif du solide	*m/s*
	l_P	longueur caractéristique du contact - soit la demi-largeur - soit le rayon (si contact circulaire)	*m*
	a_{fixe}	diffusivité du matériau immobile	m^2/s

$Ja < 0.1$	➜	La source possède une faible vitesse de déplacement par rapport à la vitesse de diffusion de la chaleur dans le corps immobile. On se situe dans le cas d'un contact quasi statique.
$0.1 \leq Ja < 10\,(100)$	➜	La vitesse de la source est proche de la vitesse de propagation de la chaleur dans le corps immobile. (La borne supérieure peut être, dans certain cas, de 100.)
$Ja \geq 10\,(100)$	➜	La vitesse de déplacement est très supérieure à la vitesse de propagation. On considère alors que l'aspérité frottante ne reçoit pas de chaleur et que seule la surface lisse supportant l'excroissance reçoit la chaleur générée par frottement.

---

[5] *Peclet, Jean Claude Eugène (1793-1857) : physicien français.*
[6] *Jaeger, John Conrad (1907 - 1979) : mathématicien - physicien australien.*