

### ANNEXE 3 : FONCTION D'ERREUR DE GAUSS

(Version du 7 janvier 2020 (6h07))

On rencontre très souvent, dans la solution de l'équation de la conduction, la fonction d'erreur de Gauss <sup>(1)</sup> (courbe normale canonique) *erf* :

$$\boxed{erf(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-\eta^2) d\eta} \quad (\text{éq. A3.1.})$$

avec, dans le cas des transferts de chaleur :

$$\boxed{u = \frac{z}{2\sqrt{at}}}$$

<u>Notations</u> :	<i>z</i>	variable spatiale	<i>m</i>
	<i>a</i>	diffusivité thermique	<i>m</i> <sup>2</sup> / <i>s</i>
	<i>t</i>	temps	<i>s</i>

Cette fonction d'erreur de Gauss est une fonction de la borne supérieure d'une intégrale et son complément :

$$\boxed{erfc(u) = 1 - erf(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty \exp(-\eta^2) d\eta} \quad (\text{éq. A3.3.})$$

Si on utilise la notation conventionnelle (*i* pour "intégrale" n'a ici aucun rapport avec  $\sqrt{-1}$ ) :

$$\boxed{i^n erfc(u) = \int_0^\infty i^{n-1} erfc(\eta) d\eta, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots} \quad (\text{éq. A3.5.})$$

$$\boxed{i^1 erfc(u) = ierfc(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) - u(1 - erf(u))} \quad (\text{éq. A3.6.})$$

Les approximations suivantes donnent, malgré leur simplicité, des résultats qui suffisent dans beaucoup de cas de la pratique quotidienne.

1<sup>ère</sup> approximation : L'erreur est de l'ordre de quelque pour mille, quelle que soit la valeur de *u* [Réf. (2)] :

$$\boxed{erf(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-\eta^2) d\eta \approx \sqrt{1 - \exp\left(\frac{-4u^2}{\pi}\right)}} \quad (\text{éq. A3.7.})$$

<sup>(1)</sup> Gauß (Gauss), Johann Carl Friedrich (1777 [Brunswick] - 1855 [Göttingen]) : mathématicien, astronome et physicien allemand.

2<sup>ème</sup> approximation : erreur inférieure à 0.42 % [Réf. (1)].

$$\left. \begin{aligned} \text{erf}(u) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-\eta^2) d\eta \approx 1 - 1.5577 \exp(-0.7182 (u + 0.7856)^2) \\ \text{erfc}(u) &\approx 1.5577 \exp(-0.7182 (u + 0.7856)^2) \end{aligned} \right\} \text{(éq. A3.8.)}$$

Quelques cas particuliers :

$$\begin{array}{llll} \text{erf}(0) = 0 & \text{erf}(\infty) = 1 & \text{erfc}(\infty) = 0 & \text{erf}(-u) = -\text{erf}(u) \\ \text{erfc}(0) = 1 & \text{erf}(-\infty) = 1 & \text{erfc}(-\infty) = 2 & \text{erf}(-u) = 2 - \text{erfc}(u) \end{array}$$

$$\text{ierfc}(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{d(\text{erf}(u))}{du} = -\frac{d(\text{erfc}(u))}{du} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2)$$

$$\frac{d^2(\text{erf}(u))}{du^2} = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} u \exp(-u^2)$$

Table de la fonction d'erreur de Gauss									
$u$	$erf(u)$	$u$	$erf(u)$	$u$	$erf(u)$	$u$	$erf(u)$	$u$	$erf(u)$
0.00	0.000 000	0.50	0.520 500	1.00	0.842 701	1.50	0.966 105	2.00	0.995 32
0.01	0.011 283	0.51	0.529 244	1.01	0.846 810	1.51	0.967 277	2.05	0.996 26
0.02	0.022 565	0.52	0.537 899	1.02	0.850 838	1.52	0.968 414	2.10	0.997 02
0.03	0.033 841	0.53	0.546 464	1.03	0.854 784	1.53	0.969 516	2.15	0.997 64
0.04	0.045 111	0.54	0.554 939	1.04	0.858 650	1.54	0.970 586	2.20	0.998 14
0.05	0.056 372	0.55	0.563 323	1.05	0.862 436	1.55	0.971 623	2.25	0.998 54
0.06	0.067 622	0.56	0.571 616	1.06	0.866 144	1.56	0.972 628	2.30	0.998 86
0.07	0.078 858	0.57	0.579 816	1.07	0.869 773	1.57	0.973 603	2.35	0.999 110 7
0.08	0.090 078	0.58	0.587923	1.08	0.873 326	1.58	0.974 547	2.40	0.999 311 5
0.09	0.101 281	0.59	0.595 937	1.09	0.876 803	1.59	0.975 462	2.50	0.999 593 0
0.10	0.112 463	0.60	0.603 856	1.10	0.880 205	1.60	0.976 348	2.60	0.999 764 0
0.11	0.123 623	0.60	0.611 681	1.11	0.883 533	1.61	0.977 207	2.70	0.999 865 7
0.12	0.134 758	0.62	0.619 412	1.12	0.886 788	1.62	0.978 038	2.80	0.999 925 0
0.13	0.145 867	0.63	0.627 047	1.13	0.889 971	1.63	0.978 843	2.90	0.999 958 9
0.14	0.156 947	0.64	0.634 586	1.14	0.893 082	1.64	0.979 622	3.00	0.999 977 9
0.15	0.167 996	0.65	0.642 029	1.15	0.896124	1.65	0.980 376	3.10	0.999 988 4
0.16	0.179 012	0.66	0.649377	1.16	0.899 096	1.66	0.981 105	3.20	0.999 994 0
0.17	0.189 992	0.67	0.656 628	1.17	0.902 000	1.67	0.981 810	3.30	0.999 996 9
0.18	0.200 936	0.68	0.663 782	1.18	0.904 837	1.68	0.982 493	3.40	0.999 998 5
0.19	0.211 840	0.69	0.670 840	1.19	0.907 608	1.69	0.983 153	3.50	0.999 999 256 91
0.20	0.222 702	0.70	0.677 801	1.20	0.910 314	1.70	0.983 790	3.60	0.999 999 644 14
0.21	0.233 522	0.71	0.684 666	1.21	0.912 956	1.71	0.984 407	3.70	0.999 999 832 85
0.22	0.244 296	0.72	0.691 433	1.22	0.915 534	1.72	0.985 003	3.80	0.999 999 923 00
0.23	0.255 022	0.73	0.698 104	1.23	0.918 050	1.73	0.985 578	3.90	0.999 999 965 21
0.24	0.265 700	0.74	0.704 678	1.24	0.920 505	1.74	0.986 135	4.00	0.999 999 984 58
0.25	0.276 326	0.75	0.711 156	1.25	0.922 900	1.75	0.986 672	4.20	0.999 999 997 14
0.26	0.286 900	0.76	0.717 537	1.26	0.925 236	1.76	0.987 190	4.40	0.999 999 999 51
0.27	0.297 418	0.77	0.723 822	1.27	0.927 514	1.77	0.987 691	4.60	0.999 999 999 92
0.28	0.307 880	0.78	0.730 010	1.28	0.929 734	1.78	0.988 174	4.80	0.999 999 999 99
0.29	0.318 283	0.79	0.736 103	1.29	0.931 899	1.79	0.988 641	>	
0.30	0.328 627	0.80	0.742 101	1.30	0.934 008	1.80	0.989 090	4.80	1.00
0.31	0.338 908	0.81	0.748 003	1.31	0.936 063	1.81	0.989 524		
0.32	0.349 126	0.82	0.753 811	1.32	0.938 065	1.82	0.989 943		
0.33	0.359 279	0.83	0.759 524	1.33	0.940 015	1.83	0.990 347		
0.34	0.369 365	0.84	0.765 143	1.34	0.941 914	1.84	0.990 736		
0.35	0.379 382	0.85	0.770 668	1.35	0.943 762	1.85	0.991 111		
0.36	0.389 330	0.86	0.776 100	1.36	0.945 562	1.86	0.991472		
0.37	0.399 206	0.87	0.781 440	1.37	0.947 313	1.87	0.991 821		
0.38	0.409 009	0.88	0.786 687	1.38	0.949 016	1.88	0.992 156		
0.39	0.418 739	0.89	0.791 843	1.39	0.950 673	1.89	0.992 479		
0.40	0.428 392	0.90	0.796 908	1.40	0.952 285	1.90	0.992 790		
0.41	0.437 969	0.91	0.801 883	1.41	0.953 853	1.91	0.993 090		
0.42	0.447 468	0.92	0.806 768	1.42	0.955 376	1.92	0.993 378		
0.43	0.456 887	0.93	0.811 563	1.43	0.956 857	1.93	0.993 656		
0.44	0.466 225	0.94	0.816 271	1.44	0.958 297	1.94	0.993 922		
0.45	0.475 482	0.95	0.820 891	1.45	0.959 695	1.95	0.994 179		
0.46	0.484 656	0.96	0.825 424	1.46	0.961 054	1.96	0.994 426		
0.47	0.493 745	0.97	0.829 870	1.47	0.962 373	1.97	0.994 664		
0.48	0.502 750	0.98	0.834 231	1.48	0.963 654	1.98	0.994 892		
0.49	0.511 668	0.99	0.838 508	1.49	0.964 898	1.99	0.995 111		

Tableau A3.1.