

ANNEXE 4 : FONCTIONS DE BESSEL

(Version du 13 mars 2022 (16h19))

{Réf. 17 et 2}

Les fonctions de Bessel sont très utiles dans de nombreux domaines de pointe de la physique faisant intervenir des équations différentielles délicates à résoudre. Equation de Bessel ⁽¹⁾ :

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2) y = 0 \text{ (éq. A4.1.) } \quad (p = cst)$$

Les domaines dans lesquels nous les trouvons le plus souvent sont la calorimétrie (conduction de la chaleur), la physique nucléaire (physique de réacteurs), et la mécanique des fluides.

Remarque :

Nous parlons habituellement par abus de langage des “fonctions de Bessel” au lieu des “séries de Bessel”.

La fonction connue sous le nom de “fonction de Bessel d’ordre zéro”, est définie par la série de puissances :

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots \text{ (éq. A4.3.)}$$

C’est lors de l’étude des propriétés de dérivation et d’intégration que Bessel a trouvé que cette série de puissance est une solution à une équation différentielle que l’on retrouve assez fréquemment en physique. C’est pourquoi elle porte son nom.

La fonction $J_n(x)$, connue sous le nom de “fonction de Bessel d’ordre n ”, est définie, lorsque n est un entier positif, par la série de puissance :

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} \left(1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \times 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right) \text{ (éq. A4.5.)}$$

ou

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{(n+2m)} \text{ (éq. A4.6.)}$$

qui converge pour toutes valeurs de x , réelles ou complexes.

⁽¹⁾ Bessel Friedrich Wilhelm (1784 [Minden] - 1846 [Königsberg]) : astronome et mathématicien allemand.

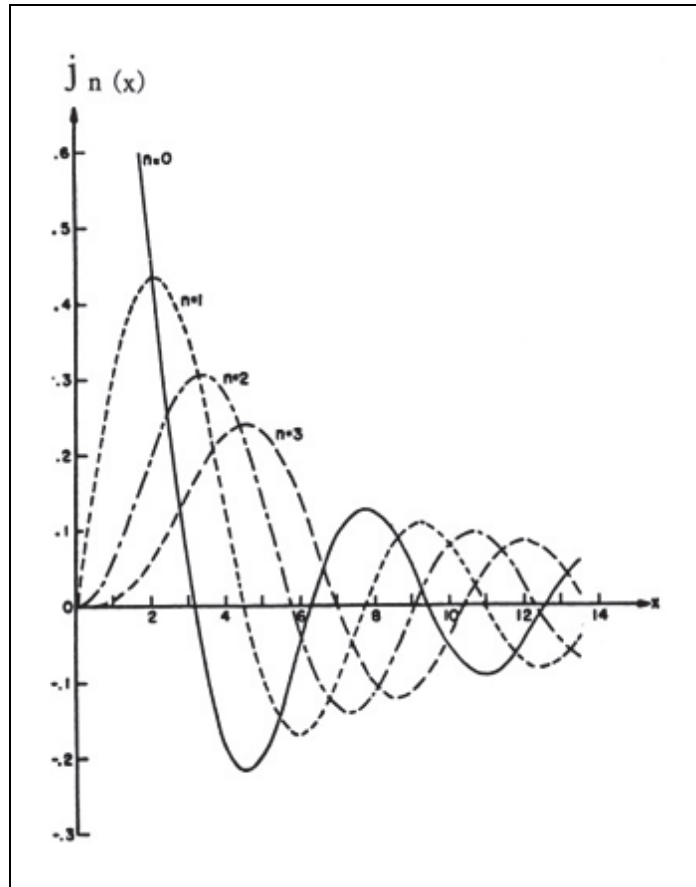


fig. An.4.1. - Fonction de Bessel.

En particulier, pour $n = 1$ nous avons :

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \times 4} + \frac{x^5}{2^2 \times 4^2 \times 6} - \frac{x^7}{2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8} + \dots \text{ (éq. A4.8.)}$$

et quand $n = 2$:

$$J_2(x) = \frac{x^2}{2 \times 4} - \frac{x^4}{2^2 \times 4 \times 6} + \frac{x^6}{2^2 \times 4^2 \times 6 \times 8} - \frac{x^8}{2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8 \times 10} + \dots \text{ (éq. A4.10.)}$$

Nous pouvons noter que $J_n(x)$ est une fonction paire de x quand n est pair, et impaire quand n est impair.

Remarque :

La fonction existe dans excel : BESSELJ(x;0) et BESSELJ(x;1)

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0.0	1.00000	0.00000	5.5	-0.00684	-0.34144	11.0	-0.17119	-0.17678
0.1	0.99750	0.04994	5.6	0.02697	-0.33433	11.1	-0.15277	-0.19133
0.2	0.99002	0.09950	5.7	0.05992	-0.32415	11.2	-0.13299	-0.20385
0.3	0.97763	0.14832	5.8	0.09170	-0.31103	11.3	-0.11207	-0.21425
0.4	0.96040	0.19603	5.9	0.12203	-0.29514	11.4	-0.09021	-0.22245
0.5	0.93847	0.24227	6.0	0.15065	-0.27668	11.5	-0.06765	-0.22838
0.6	0.91200	0.28670	6.1	0.17729	-0.25586	11.6	-0.04462	-0.23200
0.7	0.88120	0.32900	6.2	0.20175	-0.23292	11.7	-0.02133	-0.23330
0.8	0.84629	0.36884	6.3	0.22381	-0.20809	11.8	0.00197	-0.23228
0.9	0.80752	0.40595	6.4	0.24331	-0.18164	11.9	0.02505	-0.22898
1.0	0.76520	0.44005	6.5	0.26009	-0.15384	12.0	0.04769	-0.22345
1.1	0.71962	0.47090	6.6	0.27404	-0.12498	12.1	0.06967	-0.21575
1.2	0.67113	0.49829	6.7	0.28506	-0.09534	12.2	0.09077	-0.20598
1.3	0.62009	0.52202	6.8	0.29310	-0.06522	12.3	0.11080	-0.19426
1.4	0.56686	0.54195	6.9	0.29810	-0.03490	12.4	0.12956	-0.18071
1.5	0.51183	0.55794	7.0	0.30008	-0.00468	12.5	0.14688	-0.16548
1.6	0.45540	0.56990	7.1	0.29905	0.02515	12.6	0.16261	-0.14874
1.7	0.39798	0.57777	7.2	0.29507	0.05433	12.7	0.17659	-0.13066
1.8	0.33999	0.58152	7.3	0.28822	0.08257	12.8	0.18870	-0.11143
1.9	0.28182	0.58116	7.4	0.27860	0.10963	12.9	0.19884	-0.09125
2.0	0.22389	0.57672	7.5	0.26634	0.13525	13.0	0.20693	-0.07032
2.1	0.16661	0.56829	7.6	0.25160	0.15921	13.1	0.21289	-0.04885
2.2	0.11036	0.55596	7.7	0.23456	0.18131	13.2	0.21669	-0.02707
2.3	0.05554	0.53987	7.8	0.21541	0.20136	13.3	0.21830	-0.00518
2.4	0.00251	0.52019	7.9	0.19436	0.21918	13.4	0.21773	0.01660
2.5	-0.04838	0.49709	8.0	0.17165	0.23463	13.5	0.21499	0.03805
2.6	-0.09680	0.47082	8.1	0.14752	0.24760	13.6	0.21013	0.05896
2.7	-0.14245	0.44160	8.2	0.12222	0.25799	13.7	0.20322	0.07914
2.8	-0.18504	0.40971	8.3	0.09601	0.26573	13.8	0.19434	0.09839
2.9	-0.22431	0.37543	8.4	0.06916	0.27078	13.9	0.18358	0.11652
3.0	-0.26005	0.33906	8.5	0.04194	0.27312	14.0	0.17107	0.13337
3.1	-0.29206	0.30092	8.6	0.01462	0.27275	14.1	0.15695	0.14878
3.2	-0.32019	0.26134	8.7	-0.01252	0.26971	14.2	0.14137	0.16261
3.3	-0.34430	0.22066	8.8	-0.03923	0.26407	14.3	0.12449	0.17473
3.4	-0.36430	0.17923	8.9	-0.06525	0.25590	14.4	0.10648	0.18503
3.5	-0.38013	0.13738	9.0	-0.09033	0.24531	14.5	0.08754	0.19343
3.6	-0.39177	0.09547	9.1	-0.11424	0.23243	14.6	0.06786	0.19985
3.7	-0.39923	0.05383	9.2	-0.13675	0.21741	14.7	0.04764	0.20425
3.8	-0.40256	0.01282	9.3	-0.15766	0.20041	14.8	0.02708	0.20660
3.9	-0.40183	-0.02724	9.4	-0.17677	0.18163	14.9	0.00639	0.20688
4.0	-0.39715	-0.06604	9.5	-0.19393	0.16126	15.0	-0.01422	0.20510
4.1	-0.38867	-0.10327	9.6	-0.20898	0.13952	15.2	-0.05442	0.19555
4.2	-0.37656	-0.13865	9.7	-0.22180	0.11664	15.4	-0.09194	0.17840
4.3	-0.36101	-0.17190	9.8	-0.23228	0.09284	15.6	-0.12533	0.15444
4.4	-0.34226	-0.20278	9.9	-0.24034	0.06837	15.8	-0.15333	0.12469
4.5	-0.32054	-0.23106	10.0	-0.24594	0.04347	16.0	-0.17490	0.09040
4.6	-0.29614	-0.25655	10.1	-0.24903	0.01840	16.2	-0.18927	0.05296
4.7	-0.26933	-0.27908	10.2	-0.24962	-0.00662	16.4	-0.19597	0.01389
4.8	-0.24043	-0.29850	10.3	-0.24772	-0.03132	16.6	-0.19483	-0.02525
4.9	-0.20974	-0.31469	10.4	-0.24337	-0.05547	16.8	-0.18597	-0.06292
5.0	-0.17760	-0.32758	10.5	-0.23665	-0.07885	17.0	-0.16985	-0.09767
5.1	-0.14433	-0.33710	10.6	-0.22764	-0.10123	17.2	-0.14719	-0.12815
5.2	-0.11029	-0.34322	10.7	-0.21644	-0.12240	17.4	-0.11896	-0.15322
5.3	-0.07580	-0.34596	10.8	-0.20320	-0.14217	17.6	-0.08633	-0.17194
5.4	-0.04121	-0.34534	10.9	-0.18806	-0.16035	17.8	-0.05065	-0.18366

Tableau A4.1. – Fonction de Bessel

	$J_0(x)$	$J_1(x)$
1	2.4048	3.8317
2	5.5201	7.0156
3	8.6537	10.1735
4	11.7915	13.3237
5	14.9309	16.4706
6	18.0711	19.6159
7	21.2116	22.7601
8	24.3525	25.9037
9	27.4935	29.0468
10	30.6346	32.1897

Tableau A4.2. - Les 10 premières racines positives de $J_n(x) = 0$