CHAPITRE 1 : INTRODUCTION

1.1. *Equation du transfert de chaleur et milieu semi-infini*

La *relation générale* du transfert de chaleur est :

$$\boxed{\lambda \nabla^2 T + \dot{q}_V = \rho\, c \frac{\partial T}{\partial t}} \quad \textbf{\textit{(éq. 1.1.)}}$$

Si le flux est unidirectionnel et qu'il n'existe aucune source de chaleur interne, on a l'équation de conduction de chaleur bien connue :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}} \quad \textbf{\textit{(éq. 1.2.)}}$$

Avec la ***diffusivité thermique*** du matériau :

$$\boxed{a = \frac{\lambda}{\rho\, c}} \quad \textbf{\textit{(éq. 1.3.)}} \text{ (en } m^2/s\text{)}$$

Notations :	λ	coefficient de conductivité thermique	*W/mK*
	ρ	masse volumique	kg/m^3
	c	chaleur massique	*J/kgK*

Remarques :

1) Le facteur a est la diffusivité thermique laquelle ne fait pas intervenir d'unités thermiques. Elle mesure le changement de température produit dans l'unité de volume par un flux de densité thermique donné, l'épaisseur de la substance étant telle que la différence de température entre les faces d'entrée et de sortie soit égale à l'unité, c'est-à-dire que a caractérise *la vitesse de variation de la température dans une substance quelconque en régime non stationnaire*.
Le phénomène s'apparente à la diffusion d'une goutte d'encre au sein d'un buvard. Plus grande est la diffusivité du milieu, plus rapide est la progression de la chaleur, propagation qui se caractérise par une élévation de température de plus en plus faible au fur et à mesure que l'on s'éloigne du point d'impact.
Dans le domaine mécanique, toute modification d'effort (surpression par exemple) se propage à la vitesse que possède le son dans la structure considérée; la vitesse de propagation est donc de plusieurs hectomètres par seconde : le nouvel équilibre mécanique est instantanément établi.
Dans le domaine thermique (mécanique), le nouvel équilibre ne s'instaure qu'au bout d'un temps de l'ordre de la dizaine de minutes.

2) L'équation (***éq. 1.2.***) montre que, pour un mur d'épaisseur double par exemple soumis aux même conditions thermiques sur les deux faces, le champ de températures mettra quatre fois plus de temps pour y pénétrer. La chaleur ne se propage donc pas à une vitesse constante, comme le son ou la lumière.

3) La diffusivité thermique d'un solide s'exprime en m^2/s, comme la viscosité cinématique d'un fluide.

Définition de la variable de similarité *u* : $$\boxed{u = \frac{z}{2\sqrt{a\,t}}}$$

<u>*Notations*</u> :	z	variable spatiale	m
	t	temps	s
	a	diffusivité thermique	m^2/s

Et l'équation de chaleur, en terme de variable de similarité, devient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 T}{du^2} = -2\,u\,\frac{dT}{du}} \textbf{\textit{(éq. 1.5.)}}$$

Essayons de voir quelle est l'épaisseur d'un milieu semi-infini. *{Réf. 1}*

Dans la région de la surface, d'épaisseur δ, la grandeur de l'amplitude de la courbure du profil de température est la même que la variation dans la courbe $\partial T/\partial z$ sur la distance δ.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \sim \frac{\left.\dfrac{\partial T}{\partial z}\right|_{z\,\sim\,\delta} - \left.\dfrac{\partial T}{\partial z}\right|_{z\,=\,0}}{\delta - 0} \quad \textbf{\textit{(éq. 1.7.)}}$$

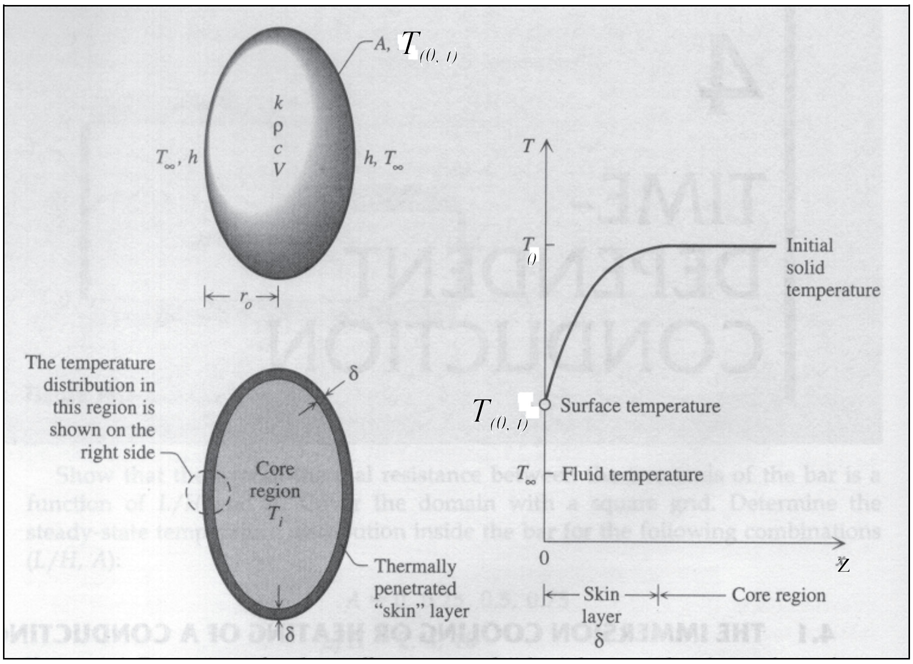

fig. 1.1. *- Formation d'une "peau" thermique sous la surface d'un corps plongé subitement dans un fluide.*

La figure ci-dessus suggère les gradients de températures suivants :

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z\,\sim\,\delta} \sim 0 \qquad \text{et} \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z\,=\,0} \sim \frac{T_0 - T_{(0,\,t)}}{\delta}$$

Après substitution de ces équations dans (***éq. 1.7.***), on obtient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \sim -\frac{T_0 - T_{(0,\,t)}}{\delta^2}$$

Quant au terme de droite de la formule, la dérivée de la température en fonction du temps peut être remplacée par la variation de cette température sur la variation du temps. Soit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \sim \frac{T_0 - T_{(0,\,t)}}{\Delta t}$$

En combinant ces deux résultats et en les remplaçant dans l'équation de départ, nous obtenons :

$$-\frac{T_0 - T_{(0,\,t)}}{\delta^2} \sim \frac{1}{a}\,\frac{T_0 - T_{(0,\,t)}}{\Delta t}$$

Et nous en concluons que l'épaisseur de la "*peau*" augmente avec la racine carré du temps,

$$\boxed{\delta \sim \sqrt{a\,\Delta t}}\ \textbf{\textit{(éq. 1.13.)}}$$

Du fait des valeurs élevées des capacités calorifiques, les phénomènes thermocinétiques non permanents présentent une inertie élevée, caractérisée par une constante de temps proportionnelle au carré du chemin le plus court : elle est donc *grande pour un corps épais, insignifiante pour une plaque mince*.

Le temps de transition t_c est atteint lorsque δ s'est développé au point qu'il est comparable à la dimension transversale de tout le solide.

$$\delta \sim r_0 \quad \Rightarrow \quad t \sim t_c$$

En se basant sur l'équation (***éq. 1.13.***), le temps de transition devient :

$$t_c \sim \frac{r_0^2}{a}$$

Ce temps permet de distinguer le *régime primaire*, lorsque la "*peau*" et le noyau du solide sont distincts :

$$\boxed{\Delta t << \frac{r_0^2}{a} \quad \Rightarrow \quad T = T_{(z,\,t)}}\ \textbf{\textit{(éq. 1.16.)}}$$

et le *régime secondaire*, lorsque la température instantanée a pratiquement la même valeur dans tout le solide.

$$\boxed{\Delta t >> \frac{r_0^2}{a} \quad \Rightarrow \quad T \approx T_{(t)}}\ \textbf{\textit{(éq. 1.17.)}}$$

Dans la suite nous étudierons les deux cas.

1.2. ***Nombres adimensionnels***

Il est toujours intéressant en physique de présenter les résultats sous forme adimensionnelle, on verra que deux nombres de ce type sont particulièrement importants dans la conduction en régime variable (voir ***Annexe 2.*** pour plus de détails).

1.2.1. Le nombre de Biot

Le nombre de Biot [1] *Bi* mesure le rapport entre la résistance thermique interne du milieu et la résistance thermique externe :

$$\boxed{Bi = \frac{h\left(V/A\right)}{\lambda}} = \frac{\dfrac{V/A}{\lambda\ A}}{\dfrac{1}{h\ A}} = \frac{Résistance\ \ interne}{Résistance\ \ externe} \quad \textbf{\textit{(éq. 1.19.)}}$$

Notations :	*V*	le volume de la pièce	m^3
	A	la surface d'échange offerte à l'ambiance	m^2
	V/A	représente la longueur caractéristique l_c du solide	*m*
	h	coefficient de convection	W/m^2K
	λ	coefficient de conductibilité thermique	*W/mK*

1.2.2. Le nombre de Fourier

Le nombre de Fourier [2] *Fo* mesure le rapport entre la vitesse de transfert et la vitesse de stockage de la chaleur :

$$\boxed{Fo = \frac{a\ t}{\left(V/A\right)^2}} = \frac{\lambda \dfrac{\Delta T}{l} A}{\dfrac{\rho\, c\, V\ \Delta T}{t}} = \frac{\left(\dfrac{\lambda\ A}{l}\ \Delta T\right)}{\left(\dfrac{d\left(m\, c\, T\right)}{dt}\right)} = \frac{Flux\ thermique\ à\ travers\ la\ surface\ (A)}{Flux\ (vitesse)\ de\ stockage\ dans\ le\ vol.\ (V)}$$

Notation :	*a*	la diffusivité thermique	m^2/s

[1] *Biot, Jean Baptiste (1774-1862) : Physicien français.*
[2] *Fourier, Jean Baptiste Joseph (1768-1830) : Mathématicien français.*