CHAPITRE 2 : MÉTHODE DU GRADIENT NUL

2.1. *Introduction*

Nous allons étudier le transfert de chaleur vers un milieu à température uniforme, ce qui est à priori contradictoire car il est nécessaire qu'il y ait un gradient thermique pour qu'il y ait transfert de chaleur. Cette approximation du milieu à température uniforme peut néanmoins être justifiée dans certain cas que l'on va préciser. Considérons par exemple la trempe d'une bille métallique qui consiste à immerger une bille initialement à la température T_0 dans un bain à température T_∞ maintenue constante. Si l'on suppose que la température à l'intérieure de la bille est uniforme, ce qui sera d'autant plus vrai que sa dimension est petite et sa conductivité thermique élevée, on peut trouver l'équation qui régit ce genre de problème.

La connaissance des nombres de Biot et de Fourier permet de déterminer l'évolution de température de tout système à température uniforme souvent appelé : "*systèmes minces*". En effet, un faible nombre de Biot indique une faible baisse de température dans le solide, un grand nombre de Biot indique un grand gradient de température dans le solide.

La méthode du gradient nul est donc valable pour de faibles nombres de Biot et donc l'hypothèse d'uniformité de la température est justifiée lorsque (***Bi < 0.1***).

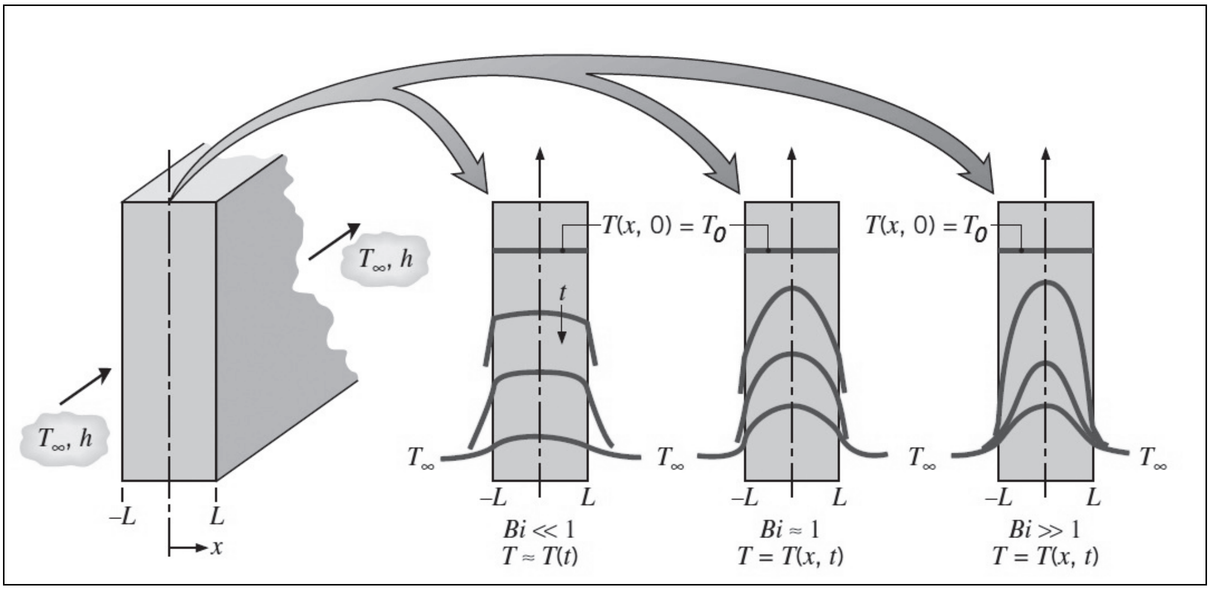

fig. 2.1. - *Gradient de température.*

2.2. *Relation générale*

Bien que la conduction transitoire dans un solide soit généralement déclenchée par un transfert de chaleur par convection à partir d'un fluide adjacent, d'autres processus peuvent induire des conditions thermiques transitoires dans le solide. Si les températures du solide et de l'environnement diffèrent, l'échange par *rayonnement* pourrait intervenir. Des changements pourraient également être induits en appliquant un *flux de chaleur* sur une partie ou la totalité de la surface ou s'il existe une génération d'énergie thermique au sein du solide.

La figure ***fig. 2.2.*** illustre la situation générale pour laquelle les conditions thermiques à l'intérieur d'un solide peuvent être influencé simultanément par de la *convection* (condition de Newton-Fourier), du *rayonnement*, un *flux de chaleur* en surface (condition de Neumann) et *une génération d'énergie interne*.

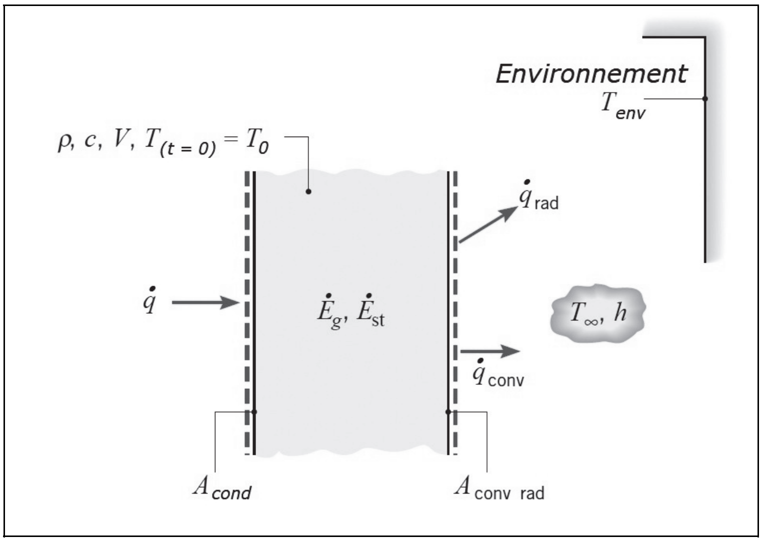

fig. 2.2. *- Méthode du gradient nul - flux entrants et sortants.*

On suppose que, initialement (en $t = 0$), que la température initiale du solide T_0 diffère de celle du fluide T_∞ et de celle de l'environnement T_{env}. De plus le flux $\dot{q}$, ainsi que la génération de chaleur interne $\dot{q}_V$ sont initiées). Bien qu'en général convection et rayonnement agissent sur une même surface, celles-ci peuvent, en fait, être différentes (A_{conv} - A_{ray}).

Appliquant la conservation de l'énergie à tout instant *t*, il en résulte l'équation générale suivante :

$$\textit{flux entrants} - \textit{flux sortants} = \textit{flux accumulé dans le solide}$$

$$\dot{q}\ A_{flux} + \dot{q}_V\ V - \dot{q}_{conv}\ A_{conv} - \dot{q}_{ray}\ A_{ray} = \rho\, V\, c\,\frac{dT}{dt}$$

$$\boxed{\dot{q}\ A_{flux} + \dot{q}_V\ V + h\ A_{conv}\left(T_\infty - T\right) + \varepsilon\,\sigma\ A_{ray}\left(T_{rayv}^4 - T^4\right) = \rho\, V\, c\,\frac{dT}{dt}} \quad \textbf{\textit{(éq. 2.5.)}}$$

<u>*Notations*</u> : $\dot{q}$	densité de flux thermique	W/m^2
$\dot{q}_V$	densité volumique de flux thermique	W/m^3
ε	émissivité	-
σ	constante de Stéfan-Boltzmann ($\sigma = 5.675\,10^{-8}$)	W/m^2K^4
A_{flux}	surface du solide soumise au flux	m^2
A_{conv}	surface du solide soumise à la convection	m^2
A_{ray}	surface du solide soumise au rayonnement	m^2
T_{ray}	température de rayonnement	K
ρ	masse volumique	kg/m^3
c	chaleur massique	J/kgK
h	coefficient de convection	W/m^2K
V	volume du solide	m^3

Cette équation est une équation différentielle, non linéaire, du premier ordre, non homogène qui est non intégrable de manière exacte. Cependant, des solutions exactes peuvent être obtenues pour des cas particuliers.

2.3. *Cas particulier : coefficient de transfert imposé en surface*

2.3.1. Relation en température

L'équation générale ***éq. 2.5.*** devient (en négligeant le rayonnement) :

$$-h\,A_{conv}\left(T-T_\infty\right)=m\,c\,\frac{dT}{dt}\quad\Rightarrow\quad\left(T_\infty-T\right)=\frac{m\,c}{h\,A_{conv}}\,\frac{dT}{dt}=\tau\,\frac{dT}{dt}$$

On remarque que le groupement $\frac{m\,c}{h\,A}$ est homogène équivalent d'un temps, on l'appellera τ la *constante de temps* du système :

$$\boxed{\tau=\frac{m\,c}{h\,A_{conv}}=\frac{\rho\,c\left(V/A_{conv}\right)}{h}}\;\textbf{\textit{(éq. 2.11.)}}$$

Notations :	τ	constante de temps thermique	*s*
	A_{conv}	surface exposée au fluide (à la convection)	m^2
	m	masse	*kg*
	ε	chaleur massique	*J/kgK*
	ρ	masse volumique	kg/m^3
	c	chaleur massique	*J/kgK*
	h	coefficient de convection	W/m^2K

L'équation finale devient :

$$\boxed{\tau\,\frac{dT}{dt}+T=T_\infty}\;\textbf{\textit{(éq. 2.12.)}}\qquad\left(\frac{dT}{dt}\text{ étant le taux de refroidissement }\right)$$

et la solution de cette équation est :

$$\boxed{T_{(t)}=T_\infty+\left(T_0-T_\infty\right)\exp\left(-t/\tau\right)}$$ ou sous forme adimensionnelle :

$$\boxed{\frac{T_{(t)}-T_\infty}{T_0-T_\infty}=\exp\left(-t/\tau\right)}\;\textbf{\textit{(éq. 2.15.)}}$$

Notation :	T_0	température initiale du corps	*K*

Si on se rappelle la définition du nombre de Biot :

$$\left(Bi=\frac{h\left(V/A\right)}{\lambda}\right)$$

ainsi que celle du nombre de Fourier :

$$\left(Fo=\frac{a\,t}{\left(V/A\right)^2}\right),$$

nous pouvons en déduire l'expression de la température du corps sous la forme :

$$\boxed{\frac{T_{(t)}-T_\infty}{T_0-T_\infty}=\exp\left(-Bi\;Fo\right)}\;\textbf{\textit{(éq. 2.18.)}}$$

Application 2.1. Déterminer le temps nécessaire pour qu'une petite pièce d'aluminium moulée initialement à 16 *°C* soit portée à 510 *°C* par les gaz d'un haut fourneau à 1204 *°C*. La dimension caractéristique de la pièce (V/A) est égale à 15 *cm* et le coefficient de convection entre la pièce et les gaz est 85 W/m^2K.
On prendra comme valeur de conductivité thermique de l'alliage d'aluminium 210 *W/mK*.
De plus : $\rho_{aluminium} = 2\,700\ kg/m^3$ et $c_{aluminium} = 940\ J/kgK$.

Solution :

Calcul du nombre de Biot

$$Bi = \frac{h\left(V/A\right)}{\lambda} = \frac{85 \times 0.15}{210} = 0.0607 \quad \Rightarrow \quad Bi < 0.1 \quad \text{La résistance interne est négligeable.}$$

Prenons la formule du solide soumis à une réponse indicielle (méthode du gradient nul)

$$\frac{T_{(t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp\left(-\,t/\tau\right) \quad \Rightarrow \quad t = -\,\tau \ln\left(\frac{T_{(t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right)$$

Calcul de τ

$$\tau = \frac{m\,c}{h\,A} = \frac{\rho\left(V/A\right)c}{h} = \frac{2\,700 \times 0.15 \times 940}{85} = 4\,479\ s$$

Calcul du temps

$$t = -\,\tau \ln\left(\frac{T_{(t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right) = -\,4\,479 \times \ln\left(\frac{510 - 1204}{16 - 1204}\right) = 2\,408\ s = 0.668\ h$$

Le temps nécessaire pour chauffer brusquement la pièce moulée de 16 *°C* à 510 *°C* est 2408 *s*.

<u>Remarques</u> :

1) L'équation précédente est l'équivalente de la charge du condensateur dans un circuit {R; C} (Voir analogie)

2) Cette solution de l'équation différentielle est valable aussi bien pour un réchauffage ($T_\infty > T_0$) qu'un refroidissement ($T_\infty < T_0$). Cependant, à l'arrêt, les tourbillons d'air provoqués par la marche et la pulsion de l'air par les ventilateurs attelés (ex. : machines électriques, etc...) cessent. Le coefficient de convection est moins bon, par conséquent la constante de temps thermique τ à l'arrêt est plus longue qu'en marche.

3) La constante de temps τ est fondamentale dans la mesure où elle donne l'ordre de grandeur de temps du phénomène physique, on à en effet :

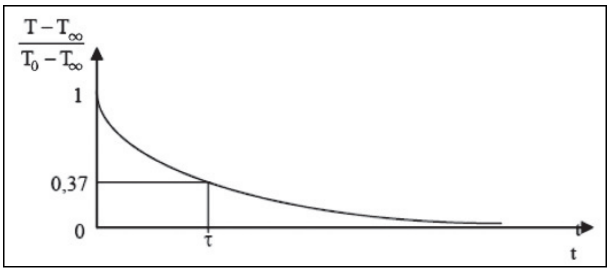

fig. 2.3. *- Constante de temps.*

2.3.2. Energie transférée

Quant à *l'énergie transférée* (en *J*) elle peut se calculer de la façon suivante :

$$Q=\int_0^t \dot{Q}\,dt = h\,A\int_0^t\left(T_{(t)}-T_\infty\right)dt$$

En remplaçant $T_{(t)}-T_\infty$ par l'équation (***éq. 2.15.***) et en intégrant, on obtient :

$$\boxed{Q=m\,c\left(T_0-T_\infty\right)\left(1-\exp\left(-t/\tau\right)\right)} \quad \textbf{\textit{(éq. 2.27.)}}$$

2.3.3 Cas particulier : marche intermittente régulière

Pendant le temps de marche t_m, le système reçoit la puissance $\dot{Q}_e$, sa constante de temps est τ_m; il est arrêté pendant t_a avec une constante de temps τ_a. Après quelques cycles, la température oscille régulièrement entre $T_{\min}$ et $T_{\max}$.

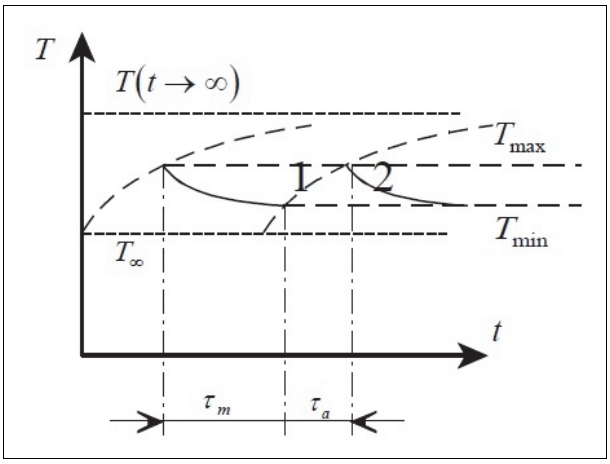

fig. 2.4. - *Marche intermittente.*

A l'échauffement (1), on part de $T_{\min}$ pour aboutir à $T_{\max}$. L'équation (***éq. 2.15.***) nous donne, avec :

$$\begin{cases} T_0 = T_{\min} \\ T_{(t)} = T_{\max} \\ T_\infty = T_{(t\to\infty)} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{T_{\max}-T_{(t\to\infty)}}{T_{\min}-T_{(t\to\infty)}}=\exp\left(-t_m/\tau_m\right)} \quad \textbf{\textit{(éq. 2.30.)}}$$

De même, au refroidissement (2), on part de $T_{\max}$ pour aboutir à la température $T_{\min}$ à la fin de la période t_a. L'équation (***éq. 2.15.***) nous donne, avec :

$$\begin{cases} T_0 = T_{\max} \\ T_{(t)} = T_{\min} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{T_{\min}-T_\infty}{T_{\max}-T_\infty}=\exp\left(-t_a/\tau_a\right)} \quad \textbf{\textit{(éq. 2.32.)}}$$

Les températures $T_{\min}$ et $T_{\max}$ sont inconnues, mais on peut les déterminer en résolvant le système fourni par les deux équations précédentes. Et donc :

$$\boxed{\frac{T_{\max}-T_\infty}{T_{(t\to\infty)}-T_\infty}=\frac{1-\exp\left(-t_m/\tau_m\right)}{1-\exp\left(-\left(t_m/\tau_m+t_a/\tau_a\right)\right)}} \quad \textbf{\textit{(éq. 2.33.)}}$$

$T_{(t\to\infty)}-T_\infty$: représentant l'échauffement lors du régime permanent.

Pour la température minimale il suffira de remplacer $T_{\max}$ dans l'équation (***éq. 2.32.***).

Application 2.2. Un embrayage multidisque fonctionne à sec dans l'air. Les disques sont alternativement en acier et en bronze fritté. On cherche la température maximale du corps de l'embrayage.

Travail dissipé pendant la synchronisation W_p	: 2150 J
Durée d'un cycle t_{cycle}	: 25.14 s
Durée de synchronisation t_s	: 1.14 s
Durée de l'état enclenché t_e	: 14 s
Durée de l'état déclenché t_d	: 10 s
Surface réfrigérante extérieure A_{ext}	: 0.046 m^2
Surface de frottement A_f	: 19.6 cm^2
Masse de l'embrayage m	: 4.8 kg
Chaleur massique de l'acier c	: 460 J/kgK
Température de l'air ambiant T_a	: 30 $°C$

Compte tenu de la rotation, on estime le coefficient de convection h à 28 W/m^2K.

Solution :

Puissance calorifique moyenne pendant la synchronisation

$$\dot{Q} = \frac{W_p}{t_s} = \frac{2150}{1.14} = 1886\, W$$

Echauffement en régime permanent

Toute la puissance est dissipée par convection et donc :

$$\dot{Q} = \left(T_{(t \to \infty)} - T_\infty\right) h\ A \quad \Rightarrow \quad T_{(t \to \infty)} - T_\infty = \frac{1}{h\ A}\dot{Q} = \frac{1}{28 \times 0.046} \times 1886 = 1464\ K$$

Calculons la constante de temps thermique de l'embrayage (la constante de temps en marche est celle de l'arrêt)

$$\tau_m = \tau_a = cst$$

$$\tau_m = \frac{m\, c}{h\ A} = \frac{4.8 \times 460}{28 \times 0.046} = 1714.3\, s$$

Recherche de la température maximale

Sachant que dans notre cas :

$$t_m = t_s = 1.14\ s$$

$$t_a = t_e + t_d = 24\ s$$

$$T_{\max} = T_\infty + \frac{1 - \exp\left(-\ t_m / \tau_m\right)}{1 - \exp\left(-\ \left(t_m / \tau_m + t_a / \tau_a\right)\right)} \left(T_{(t \to \infty)} - T_\infty\right)$$

$$= 30 + \frac{1 - \exp\left(-\ 1.14/1714\right)}{1 - \exp\left(-\ 24/1714\right)} \times 1464 = 30 + 70 = 100\,°C$$

La température minimale vaut :

$$T_{\min} = T_\infty + \left(T_{\max} - T_\infty\right) \exp\left(-\ t_a / \tau_a\right) = 30 + \left(100 - 30\right) \exp\left(-\ 24/1714\right)$$

$$= 30 + 69.0 = 99.0\,°C$$

La température varie peu car l'inertie thermique est grande.

2.4. ***Cas particulier : source de chaleur interne***

Considérons un corps initialement à température initiale T_0, baignant dans un fluide à température T_∞ supposé constant. Au temps $t = 0$, on impose un dégagement interne de chaleur, uniforme et constant, dû à une source uniformément répartie $\dot{q}_V$ en *W/m*^{3}.

On désire connaître l'évolution de la température $T_{(t)}$ du corps en fonction du temps *t*, et notamment, la température qui s'établira en régime.

L'équation générale ***éq. 2.5.*** devient (en négligeant le rayonnement) :

$$\boxed{\dot{q}_V\, V + \left(T_\infty - T\right) h\, A = m\, c\, \frac{dT}{dt}} \quad \textit{(éq. 2.45.)}$$

Notations :	V	volume du corps	m^3
	A	surface exposée au fluide	m^2
	m	masse	kg
	c	chaleur massique	J/kgK
	h	coefficient de convection	W/m^2K
	τ	constante de temps thermique $\left(\tau = \dfrac{\rho\, c\left(V/A\right)}{h}\right)$	s

L'équation finale devient :

$$\boxed{\tau \frac{dT}{dt} + \left(T - T_\infty\right) = \dot{q}_V \frac{\left(V/A\right)}{h}} \quad \textit{(éq. 2.47.)}$$

et la solution de cette équation est, sachant qu'au $t = 0$, $T_{t=0} = T_0$:

$$\boxed{T_{(t)} - T_\infty = \dot{q}_V \frac{\left(V/A\right)}{h}\left(1 - \exp\left(-t/\tau\right)\right) + \left(T_0 - T_\infty\right)\exp\left(-t/\tau\right)} \quad \textit{(éq. 2.50.)}$$

Si $\dot{q}_V = 0$, on retombe bien sur l'***éq. 2.32.***.

Quant à la température de régime, il suffit de faire ($t \to \infty$) (ou faire $\dfrac{dT}{dt} = 0$ dans l'***éq. 2.45.***).

Quant à l'équation pour trouver le temps pour arriver à $T_{(t)}$:

$$\boxed{t = -\,\tau \ln\left(\frac{\left(T_{(t)} - T_{(\infty)}\right) - \dot{q}_V \dfrac{\left(V/A\right)}{h}}{\left(T_0 - T_{(\infty)}\right) - \dot{q}_V \dfrac{\left(V/A\right)}{h}}\right)} \quad \textit{(éq. 2.54.)}$$

Application 2.3. Un composant électronique, comme un transistor monté sur un mince radiateur, peut être modélisé comme un objet spatial isotherme avec une source interne de chaleur et une résistance externe de convection.
Sachant que la puissance de la source interne est $\dot{Q} = 60\ W$, que la masse m du radiateur en aluminium est de 0.31 kg et, que si le composant est initialement à 20 °C, il atteint 100 °C dans un air ambiant de 20 °C en régime. Quelle température atteint-il après 5 minutes après avoir enclenché la puissance si cette fois-ci sa température initiale est de 30 °C ? Prendre : $c_{alu} = 918\ J/kgK$.

Solution :

Hypothèse

“Mince radiateur” : méthode du gradient nul.

Régime établit

$$T_{(t\to\infty)} - T_\infty = \dot{q}_V\ \frac{(V/A)}{h} = \frac{\dot{Q}}{h\ A} \quad \Rightarrow \quad h\ A = \frac{\dot{Q}}{T_{(t\to\infty)} - T_\infty} = \frac{60}{100-20} = 0.75\ W/K$$

Recherche de la température

$$T_{(t)} - T_\infty = \dot{q}_V\ \frac{(V/A)}{h}\left(1 - \exp\left(-t/\tau\right)\right) + \left(T_0 - T_\infty\right)\exp\left(-t/\tau\right)$$

Avec :

- $\dot{q}_V\ \dfrac{(V/A)}{h} = \dfrac{\dot{Q}}{h\ A}$
- $\tau = \dfrac{m\,c}{h\ A} = \dfrac{0.31\times 918}{0.75} = 379.44\ s$

Et donc :

$$\begin{aligned} T_{(t\,=\,5\,\text{min})} &= \frac{60}{0.75}\left(1 - \exp\left(-(5\times 60)/379.44\right)\right) + (30-20)\exp\left(-(5\times 60)/379.44\right) + 20 \\ &= 68.25\,^\circ C \end{aligned}$$

2.5. *Cas particulier : flux de chaleur*

Considérons un corps initialement à température initiale T_0, baignant dans un fluide à température T_∞ supposé constant. Au temps $t = 0$, on impose un flux de chaleur, uniforme et constant, $\dot{q}$ en W/m^2.

On désire connaître l'évolution de la température $T_{(t)}$ du corps en fonction du temps t, et notamment, la température qui s'établira en régime.

L'équation générale ***éq. 2.5.*** devient (en négligeant le rayonnement) :

$$\dot{q}\, A_{flux} + \left(T_\infty - T\right) h\, A = m\, c \frac{dT}{dt} \quad \textbf{\textit{(éq. 2.62.)}}$$

Notations :			
	A_{flux}	surface soumise au flux	m^2
	m	masse	kg
	c	chaleur massique	J/kgK
	h	coefficient de convection	W/m^2K
	τ	constante de temps thermique $\left(\tau = \dfrac{\rho\, c\left(V/A\right)}{h}\right)$	s

L'équation finale devient :

$$\tau \frac{dT}{dt} + \left(T - T_\infty\right) = \frac{\dot{q}}{h} \quad \textbf{\textit{(éq. 2.64.)}}$$

et la solution de cette équation est, sachant qu'au $t = 0$, $T_{t=0} = T_0$:

$$T_{(t)} - T_\infty = \frac{\dot{q}}{h}\left(1 - \exp\left(-t/\tau\right)\right) + \left(T_0 - T_\infty\right)\exp\left(-t/\tau\right) \quad \textbf{\textit{(éq. 2.67.)}}$$

Si $\dot{q}_V = 0$, on retombe bien sur l'***éq. 2.32.***.

Quant à la température de régime, il suffit de faire ($t \to \infty$) (ou faire $\dfrac{dT}{dt} = 0$ dans l'***éq. 2.64.***).

Quant à l'équation pour trouver le temps pour arriver à $T_{(t)}$:

$$t = -\,\tau \ln\left(\frac{\left(T_{(t)} - T_{(\infty)}\right) - \dfrac{\dot{q}}{h}}{\left(T_0 - T_{(\infty)}\right) - \dfrac{\dot{q}}{h}}\right) \quad \textbf{\textit{(éq. 2.71.)}}$$

Application 2.4. Un four solaire fourni un flux de 8000 *W/m²* afin de chauffer une plaque de titane de 10 *mm* d'épaisseur sur une de ces faces. L'autre face est exposé à une convection ($T_\infty = 20\,°C$; $h = 40\,W/m^2K$). Les propriétés de la plaque sont : $\rho = 4\,500\,kg/m^3$; $c = 522\,J/kgK$ et $\lambda = 21.9\,W/mK$. La température initiale de la plaque est de 20 *°C*. On demande :

a) le temps pour que la plaque atteigne 100 *°C*;
b) la température de la plaque après 6 *min*.

Solution :

Vérification méthode du gradient nul

$$Bi = \frac{h\,(V/A)}{\lambda} = \frac{40 \times 0.01}{21.9} = 1.83\;10^{-2} < 0.1 \quad OK$$

Remarque :
Comme la plaque est soumise à une convection que d'un seul côté, on prendra pour (V/A) l'épaisseur et non l'épaisseur demi.

a) *Recherche du temps*

Soit :

$$t = -\,\tau \ln\left(\frac{\left(T_{(t)} - T_{(\infty)}\right) - \dfrac{\dot{q}}{h}}{\left(T_0 - T_{(\infty)}\right) - \dfrac{\dot{q}}{h}}\right)$$

Calcul de τ :

$$\tau = \frac{m\,c}{h\,A} = \frac{\rho\,(V/A)\,c}{h} = \frac{4\,500 \times 0.01 \times 522}{40} = 587.3\,s$$

$$\Rightarrow \quad t = -\,587.3 \ln\left(\frac{(100-20) - 8\,000/40}{(20-20) - 8\,000/40}\right) = 300.0\,s$$

b) *Recherche de la température*

$$T_{(t)} = T_\infty + \frac{\dot{q}}{h}\left(1 - \exp(-\,t/\tau)\right) + \left(T_0 - T_\infty\right)\exp(-\,t/\tau)$$

$$= 20 + \frac{8\,000}{40}\left(1 - \exp\left(-\,\frac{6 \times 60}{587.3}\right) + (20-20)\exp\left(-\,\frac{6 \times 60}{587.3}\right)\right)$$

$$= 111.7\,°C$$

2.6. ***Cas particulier : rayonnement***

Considérons un corps initialement à température initiale T_0 soumis au temps $t = 0$, à un rayonnement uniforme et constant à température T_{ray}.

On désire connaître l'évolution de la température $T_{(t)}$ du corps en fonction du temps *t*, et notamment, la température qui s'établira en régime.

L'équation générale ***éq. 2.5.*** devient, en négligeant la convection :

$$\boxed{\varepsilon\, \sigma\, A_{ray} \left(T_{ray}^4 - T^4 \right) = \rho\, V\, c\, \frac{dT}{dt}} \quad \textbf{\textit{(éq. 2.79.)}}$$

Notations :	ε	émissivité	-
	σ	constante de Stéfan [1] -Boltzmann [2] ($\sigma = 5.67\, 10^{-8}$)	W/m^2K^4
	A_{ray}	surface du solide soumise au rayonnement	m^2
	T_∞	température de l'environnement	K
	ρ	masse volumique	kg/m^3
	c	chaleur massique	J/kgK
	h	coefficient de convection	W/m^2K
	V	volume du solide	m^3

L'équation finale devient :

$$\boxed{\frac{\varepsilon\, \sigma\, A}{\rho\, V\, c}\, dt = \frac{dT}{T_\infty^4 - T^4}} \quad \textbf{\textit{(éq. 2.81.)}}$$

et la solution de cette équation est, sachant qu'au $t = 0$, $T_{t=0} = T_0$:

$$\boxed{\frac{\varepsilon\, \sigma\, A}{\rho\, V\, c}\, t = \left[\frac{1}{4\, T_\infty^3} \ln \left| \frac{T_\infty + T}{T_\infty - T} \right| + \frac{1}{2\, T_\infty^3} \tan^{-1} \left(\frac{T}{T_\infty} \right) \right]_{T_0}^{T_f}} \quad \textbf{\textit{(éq. 2.84.)}}$$

Quant à la température de régime, il suffit de faire ($t \to \infty$) (ou faire $\frac{dT}{dt} = 0$ dans l'***éq. 2.79.***).

---

[1] *Stefan Jožef (1835 - 1893 : physicien et mathématicien austro-hongrois.*

[2] *Boltzmann Ludwig Eduard (1844 - 1906) : physicien et philosophe autrichien.*

Application 2.5. De la poussière de charbon, que l'on peut assimiler à des sphères de 1 *mm* de diamètre, doit être chauffé par radiation (température de la source radiante : $T_{ray} = 1200\,K$) de 300 *K* à 900 *K*. Déterminez le temps requis. Caractéristiques du charbon : $\rho = 1350\,kg/m^3$; $c = 1260\,J/kgK$; $\lambda = 0.26\,W/mK$.

Solution :

Hypothèse

On considérera le charbon comme un corps noir parfait, donc : $\varepsilon = 1$.

Vérification méthode du gradient nul

$$Bi = \frac{h_r\,(V/A)}{\lambda}$$

Dans le cas du rayonnement pur, il n'y a évidemment pas de convection, donc de "*h*". Cependant, on peut introduire un coefficient de transmission par rayonnement (voir ***Complément (2)***) de la forme :

$$\boxed{h_r = 4\,\sigma\,F_{1,2}\,T_{moy}^3}$$

avec, dans notre cas : $F_{1,2} = 1$.

Dès lors, le nombre de Biot devient :

$$Bi = \frac{4 \times 5.67\,10^{-8} \times 1 \times \left(\frac{1200+300}{2}\right)^3 \times (0.0005/3)}{0.26} = 6.13\,10^{-2} < 0.1\;OK$$

Recherche du temps

Soit :

$$t = \frac{\rho\,(V/A)\,c}{\varepsilon\,\sigma}\left[\frac{1}{4\,T_\infty^3}\ln\left|\frac{T_\infty + T}{T_\infty - T}\right| + \frac{1}{2\,T_\infty^3}\tan^{-1}\left(\frac{T}{T_\infty}\right)\right]_{T_0}^{T_f}$$

$$= \frac{1350 \times (0.001/3) \times 1260}{1 \times 5.67\,10^{-8}}\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{4\times 1200^3}\left(\ln\left|\dfrac{1200+900}{1200-900}\right| - \ln\left|\dfrac{1200+300}{1200-300}\right|\right) \\ + \dfrac{1}{2\times 1200^3}\left(\tan^{-1}\dfrac{900}{1200} - \tan^{-1}\dfrac{300}{1200}\right)\end{array}\right]$$

$$= 1.61\,s$$
