

<i>CHAPITRE 3 : MILIEU SEMI-INFINI</i>	- 3.1 -
<i>3.1. Introduction</i>	- 3.1 -
<i>3.2. Température imposée en surface (Condition de Dirichlet)</i>	- 3.2 -
3.2.1. <i>Température constante imposée en surface</i>	- 3.2 -
3.2.2. <i>Température sinusoïdale imposée en surface, régime périodique établi</i>	- 3.6 -
A) Théorie	- 3.6 -
B) Commentaires	- 3.6 -
<i>3.3. Flux imposé en surface (Condition de Neumann)</i>	- 3.11 -
<i>3.4. Coefficient de transfert imposé en surface (Condition de Newton - Fourier)</i>	- 3.13 -
3.4.1. <i>Température du fluide constante</i>	- 3.13 -
3.4.2. <i>Température périodique du fluide</i>	- 3.15 -
<i>3.5. Contact brusque entre deux solides semi-infinis</i>	- 3.17 -

CHAPITRE 3 : MILIEU SEMI-INFINI

3.1. Introduction

Un milieu semi-infini est une paroi d'épaisseur suffisamment grande que la perturbation appliquée sur une face ne soit pas ressentie par l'autre face. Un tel système représente l'évolution d'un mur d'épaisseur finie pendant un temps suffisamment court pour que la perturbation créée sur une face n'ait pas atteint l'autre face.

Le corps semi-infini est défini comme un solide à résistance interne non négligeable ($Bi \gg 1$). Ce solide est également appelé "thermiquement épais".

En quoi cette hypothèse est-elle utile ?

- ▶ solution facilement obtenue pour trois types de conditions aux frontières à la face 1;
- ▶ idéalisation utile pour des problèmes pratiques;
- ▶ cependant, solution dans le temps valide tant qu'une partie du solide reste non-perturbée par le changement de condition à la frontière;
- ▶ solution superposable aux solutions analytiques du cylindre infini et de la plaque infinie pour considérer des géométries finies (cas multidimensionnels traités dans la thématique suivante)

Considérons un solide s'étendant à l'infini à partir d'une surface plane. Les axes x et z d'un repère orthonormé sont situés dans le plan de la surface, l'axe z est dirigé vers l'intérieur du solide. Supposons que la température soit uniforme dans tout le plan parallèle à la surface et ne dépende que de la coordonnée z et du temps t , $T(z, t)$.

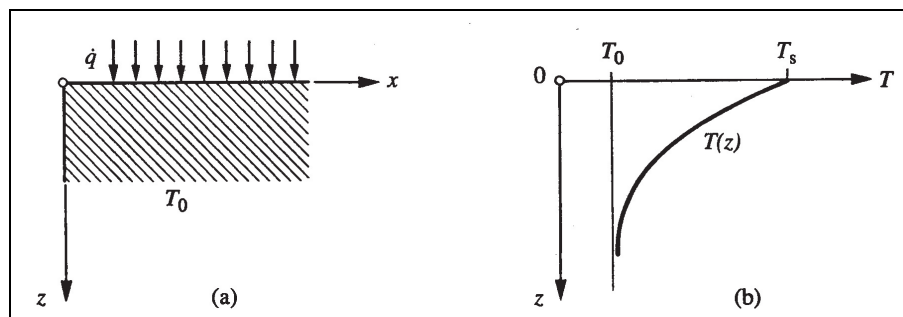


fig. 3.1. - Propagation de la chaleur dans un corps semi-infini :
(a) flux de chaleur; (b) température

Pour résoudre l'équation générale ou les équations plus simples dans le domaine de l'espace occupé par le corps conducteur de la chaleur, il faut s'imposer une condition initiale (en général, la distribution initiale de la température) et des conditions aux limites à la surface du corps conducteur, conditions que l'on classe en trois types principaux :

- 1) distribution de température imposée (variable ou non dans le temps) ou condition de Dirichlet⁽¹⁾ ($Bi \rightarrow \infty$ ($Bi > 100$));
- 2) distribution imposée de densité de flux de chaleur (variable ou non dans le temps) ou condition de Neumann⁽²⁾;
- 3) relation entre la densité de flux de chaleur à la surface du corps et la température au même endroit. Si cette relation est linéaire, on appelle cette condition la condition de Newton - Fourier ($0.1 < Bi < 100$ (∞)).

⁽¹⁾ Dirichlet, Peter Gustav Lejeune- (1805-1859) : mathématicien allemand.

⁽²⁾ Neumann, Carl Gottfried (1832-1925) : physicien allemand.

- A la limite entre deux corps conducteurs homogènes, on doit avoir les deux conditions suivantes :
- ▶ égalité des températures en chaque point de cette limite;
 - ▶ égalité des composantes normales des densités de flux de chaleur.

La première de ces deux dernières conditions correspond à un bon contact thermique. Le plus souvent, il existe une différence de température proportionnelle à la composante normale de la densité de flux de chaleur, le coefficient de proportionnalité étant la résistance thermique de contact.

3.2. Température imposée en surface (Condition de Dirichlet)

3.2.1. Température constante imposée en surface

$$C.I. \quad T_{(z,0)} = T_0 \quad \text{et} \quad T_{(0,t)} = T_s$$

Méthode :

Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

Le milieu semi-infini est initialement à la température uniforme T_0 . On impose brutalement la température T_s sur sa surface (en $z = 0$), cette condition limite est appelée condition de Dirichlet et on obtient dans chaque abscisse z quelconque, une température $T_{(z,t)}$ égale à :

$$\frac{T_{(z,t)} - T_s}{T_0 - T_s} = \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) = \operatorname{erf}(u) \quad (\text{éq. 3.6.})$$

Remarques :

- 1) Ce n'est qu'en 1983 que Butler⁽³⁾ fait la dérivation de la solution du problème du changement soudain de température à la limite d'un milieu à température initiale constante. Cette solution utilise une température normalisée : $\Theta = \frac{T_{(z,t)} - T_0}{T_s - T_0}$ et la

fonction d'erreur complémentaire *erfc*. On rencontre celle-ci très souvent, dans la solution de l'équation de la conduction, la fonction d'erreur de Gauss⁽⁴⁾ (courbe normale canonique) *erf* :

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-\eta^2} d\eta \quad \text{avec} \quad u = \frac{z}{2\sqrt{at}}$$

qui est une fonction de la borne supérieure d'une intégrale. Pour plus d'informations, voir **Annexe 3.**

- 2) Pour vérifier qu'un solide est "infini" ou non, il faut définir l'épaisseur de la couche limite thermique. Nous avons vu, en introduction, que celle-ci est fonction de \sqrt{at} . Si nous définissons la couche limite thermique *arbitrairement* comme étant celle pour laquelle il y a une atténuation de 90 %, c'est-à-dire pour $\Theta = 0.1$ nous aurons dans ce cas :

$$u = \frac{z}{2\sqrt{at}} \quad (\text{via les tables } \text{Annexe 3.}), \quad \text{ce qui donne une épaisseur :}$$

⁽³⁾ Butler, William Hill (-) : physicien américain.

⁽⁴⁾ Gauss, Carl Friedrich (1777-1855) : mathématicien allemand.

$$z_{clt} = 2.32 \sqrt{a t} \quad (\text{éq. 3.12.})$$

(Si l'on veut 99 % d'atténuation : $u = 1.82 \Rightarrow z_{clt} = 3.64 \sqrt{a t}$)

Autrement dit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } z > z_{clt} \Rightarrow \text{solide semi-infini} \\ \text{Si } z < z_{clt} \Rightarrow \text{solide fini} \end{array} \right.$$

- 3) L'application brutale d'une température de surface revient à avoir un ($h \rightarrow \infty$) et donc un $Bi = \infty$ (en pratique $Bi > 100$).

On peut noter que l'on retrouve la forme générale de l'équation des phénomènes dont la vitesse d'évolution est proportionnelle à l'écart entre la valeur de la variable et une valeur constante, équation de la forme : $z = A(1 - \exp(-t/\tau))$ dans laquelle un seul paramètre τ , ou constante de temps, définit l'évolution.

Le gradient de température en fonction de l'espace (dT/dz) :

En partant de l'équation (éq. 3.6.) on peut écrire :

$$\frac{d(T_{(z,t)} - T_0)}{dz} = (T_s - T_0) \frac{d(\text{erfc}(u))}{dz}$$

et si on se rappelle que :

$$\frac{d(\text{erfc}(u))}{dz} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) \frac{d(-u^2)}{dz} \quad (\text{Voir Annexe 3.})$$

et que : $u = \frac{z}{2\sqrt{a t}}$,

on obtient :

$$\frac{dT}{dz} = (T_s - T_0) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) \frac{1}{2\sqrt{a t}}$$

et donc :
$$\frac{dT}{dz} = (T_s - T_0) \frac{1}{\sqrt{\pi a t}} \exp(-u^2) \quad (\text{éq. 3.24.})$$

Et en surface, ($z = 0$), on trouve :

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} = (T_s - T_0) \frac{1}{\sqrt{\pi a t}} \quad (\text{éq. 3.26.})$$

Ce gradient thermique épidermique (la pente à l'origine) pour une variation brève, facteur caractéristique des contraintes d'origine thermique engendrées en surface des structures, est donc inversement proportionnel à la racine carrée de la diffusivité thermique du matériau.

C'est ce gradient épidermique qui est responsable du démarrage des fissurations dans les structures soumises à choc thermique.

Le flux de chaleur instantané (en W) à la surface s'obtient, aisément, à partir de l'équation (éq.

3.26.) en évaluant le gradient de température à la surface, soit :

$$\dot{Q}|_{z=0} = -\lambda A \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} = (T_s - T_0) \frac{\lambda A}{\sqrt{\pi a t}} \quad (\text{éq. 3.27.})$$

Quant à la *quantité de chaleur* (en J) qui a pénétré dans le mur, pendant Δt secondes, elle se calcule par :

$$Q = \int_{\Delta t} \dot{Q} dt = \int_{\Delta t} (T_s - T_0) \frac{\lambda A}{\sqrt{\pi a t}} dt = 2 \lambda A (T_s - T_0) \sqrt{\frac{\Delta t}{\pi a}} \quad (\text{éq. 3.28.})$$

Application 3.1. Du thé chaud à la température $70\text{ }^{\circ}\text{C}$ est versé dans une tasse de porcelaine dont la paroi est à une température initiale $T_0 = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$. Supposez que la surface de la paroi de porcelaine est instantanément à la température du thé $T_s = 70\text{ }^{\circ}\text{C}$. L'épaisseur de la paroi de porcelaine est de 6 millimètres, estimez le temps nécessaire pour que la température de la paroi s'élève à $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ à un point situé à 2 millimètres sous la surface. Prouvez que pendant ce court laps de temps le processus de conduction peut être modélisé selon l'hypothèse du milieu semi-infini avec température de surface imposée. Prendre : $a_{\text{porcelaine}} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$.

Solution :

Pertinence du modèle "gradient nul"

Si la température est imposée en surface cela implique que $h \rightarrow \infty$ et donc que $Bi \rightarrow \infty$. Le modèle "gradient nul" sera toujours inapplicable si on impose la température en surface d'un solide.

Hypothèse

La température ($T = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$) à l'endroit $z = 2 \text{ mm}$ sous la surface de chauffe est presque identique à la température initiale en chaque point à l'intérieur de la paroi de porcelaine. Cela signifie que la majeure partie du chauffage qu'éprouve le mur est localisée à la gauche de $z = 2 \text{ mm}$, près de la surface à $70\text{ }^{\circ}\text{C}$. Le modèle que nous pouvons utiliser est la conduction unidirectionnelle pour un solide semi-infini.

Problème de corps semi-infini avec conditions initiales de température

$$\frac{T_{(z,t)} - T_s}{T_0 - T_s} = \frac{30 - 70}{25 - 70} = 0.889 = \text{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right)$$

Et donc :

$$\text{erf}(u) = 0.889 \approx \sqrt{1 - \exp\left(\frac{-4u^2}{\pi}\right)} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{\pi}{-4} \ln(1 - 0.889^2)} = 1.108$$

Le temps recherché est

$$\frac{z}{2\sqrt{at}} = 1.108 \Rightarrow t = \frac{z^2}{4u^2 a} = \frac{0.002^2}{4 \times 1.108^2 \times 4 \cdot 10^{-7}} = 2.04 \text{ s}$$

Pertinence du modèle utilisé

Maintenant que nous avons une estimation du temps nécessaire pour que la température de $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ atteigne la profondeur de $z = 2 \text{ mm}$, nous pouvons évaluer la qualité du modèle "solide semi-infini" adopté. Pour ce faire nous utiliserons la notion de couche limite :

$$z_{clt} = 2.32 \sqrt{at} = 2.32 \sqrt{4 \cdot 10^{-7} \times 2.04} = 0.002 \text{ m} = 2 \text{ mm}$$

Cette épaisseur de couche limite est plus petite que l'épaisseur globale de la paroi de porcelaine et de ce fait le modèle semi-infini est valable.

3.2.2. Température sinusoïdale imposée en surface, régime périodique établi

A) Théorie

$$C.I. \quad T_{(0,t)} - T_{s\text{ moy}} = \Delta T_s \sin(\omega t)$$

$$\begin{aligned} \text{Notations :} \quad \Delta T_s & \quad \text{amplitude imposée en surface} & \left(\frac{T_{s\text{ max}} - T_{s\text{ min}}}{2} \right) \\ T_{s\text{ moy}} & \quad \text{température moyenne en surface} & \left(\frac{T_{s\text{ max}} + T_{s\text{ min}}}{2} \right) \end{aligned}$$

Méthode :

Décomposition en produit de fonctions et recherche d'une solution de même fréquence que l'excitation.

Toute variation cyclique de température appliquée à une face étant décomposable en série de Fourier, nous n'envisageons qu'une variation purement sinusoïdale de part et d'autre d'une température $T_{s\text{ moy}}$.

On ne s'occupera ici que du régime quasi stationnaire : on suppose que le régime périodique pur est établi, c'est-à-dire que le terme transitoire relatif aux premiers instants s'est éteint. Le solide a complètement oublié la distribution initiale de température, de laquelle il ne reste plus de trace.

La solution de ce système est (harmonique fondamentale) :

$$\frac{T_{(z,t)} - T_{s\text{ moy}}}{\Delta T_s} = \exp(-\beta z) \sin(\omega t - \beta z) \quad (\text{éq. 3.42.}) \quad \text{avec :} \quad \beta = \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \quad [m^{-1}]$$

Remarque :

Chaque onde de température progresse avec un amortissement proportionnel :

- ▶ à la racine carrée de la fréquence du flux;
- ▶ à la racine carrée de la résistivité $1/\lambda$ du milieu.

B) Commentaires

1) Le gradient thermique en fonction du temps dans un plan, parallèle à la surface d'entrée, d'abscisse z . La température y varie sinusoïdalement avec une fréquence (période), indépendante de z , égale à celle qui existe en surface ($z = 0$) :

- ▶ Entre les températures T_1 et T_2 de deux points distants respectivement de z_1 et z_2 de la surface, il existe un déphasage, en angle, égal à $\Delta\tau' = \beta z$. La connaissance de la pulsation ω et la mesure de température au sein du milieu en deux points situés à des distances connues z_1 et z_2 de la surface peut permettre d'évaluer la diffusivité thermique a .

$$\text{Il y correspond à un déphasage en temps de : } \Delta\tau = \frac{\Delta\tau'}{\omega} = \frac{\beta z}{\omega} = z \sqrt{\frac{1}{2a\omega}} \quad (\text{éq. 3.47.})$$

- ▶ avec une amplitude qui décroît exponentiellement avec z croissant, d'autant plus rapidement que les oscillations sont plus rapides. Autrement dit, les oscillations rapides ($v \uparrow$), celles s'amortissant le plus vite, se propagent donc plus vite que les oscillations lentes ($v \downarrow$).

- 2) La vitesse apparente de propagation de l'onde est : $w = \frac{z}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{2 a \omega}$ (éq. 3.48.) (Voir équation (éq. 3.47.)). Cette notion signifie simplement que le maximum (ou minimum) envisagé en surface se retrouve en une abscisse z après une temps Δt , mais elle n'a rien à voir avec la propagation de la chaleur même.
- 3) Le gradient thermique en fonction de l'espace dans un plan perpendiculaire à la face d'entrée :
- à un instant t , la courbe $T_{(z, t)}$ est une sinusoïde amortie, de période temporelle $(T_v = \frac{2 \pi}{\omega})$ constante;
 - à l'instant $(t + \Delta t)$, tous les maxima se sont déplacés vers $(z + \Delta z)$ et leur valeur a décré de la valeur de l'amortissement : $\exp(-\beta z)$ (éq. 3.52.). On peut montrer, au moyen d'un exemple pratique, que la décroissance de l'amplitude de la température est rapide.

Application 3.2. Calculons la profondeur à laquelle cette amplitude est réduite au centième pour un corps conducteur comme l'aluminium (pour lequel le coefficient de diffusivité est de l'ordre de $a = 8.038 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$) pour un moteur 4 temps tournant à 4000 t/min.

Solution :

Calculons cette profondeur

En effet, si on fait le rapport de l'amplitude de la température à une profondeur z rapportée à l'amplitude de la température de surface, si on pose que :

$\theta_{(z, t)} = T_{(z, t)} - T_{s \text{ moy}}$, on obtient :

$$\frac{\theta_{(z, t)}}{\theta_{(0, t)}} = \frac{\Delta T_s \exp(-\beta z) \sin(\omega t - \beta z)}{\Delta T_s \sin(\omega t)} \text{ et en ne tenant pas compte du déphasage } \beta z :$$

$$\frac{\theta_{(z, t)}}{\theta_{(0, t)}} = \exp(-\beta z) \Rightarrow z = -\frac{\ln(\theta_{(z, t)} / \theta_{(0, t)})}{\beta} = -\frac{\ln(0.01)}{\beta} = 4.03 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\text{Avec : } \beta = \sqrt{\frac{\omega}{2 a}} = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{2 \times \pi \times 4000}{60}} = 1141.4 \text{ m}^{-1}$$

Remarque :

Dans le cas d'un moteur à 4 temps, la fréquence des pulsations est divisée par 2.

Ainsi dans la paroi d'un cylindre de moteur à piston, les oscillations de température dues à la combustion sont pratiquement nulles à 4 mm de profondeur, mais les *variations de régime* provoquent des variations de température beaucoup plus importantes en amplitude qui pénètrent beaucoup plus profondément et sont, de ce fait, plus nocives. Il s'agit bien d'un effet "*pelliculaire*" analogue à celui de la répartition de l'intensité du courant alternatif dans un conducteur électrique.

Il sera intéressant de comparer ce résultat à celui où c'est le fluide et non la température qui varie périodiquement.

4) La longueur d'onde (ou période spatiale) est définie par :

$$\lambda_v = w T_v = 2 \sqrt{a \pi T_v} = \frac{2 \pi}{\beta} \text{ (éq. 3.58).}$$

On définit aussi la demi longueur d'onde comme étant la "profondeur d'inversion". En effet, lorsqu'un point est au maximum, une demi longueur d'onde plus loin le point est au minimum.

5) Remarque : cas du mur

Pour un mur d'épaisseur *finie e*, l'onde progressive se réfléchit partiellement sur l'extrémité et se propage en s'amortissant dans la direction des *z* négatifs (onde régressive).

La résolution complète du mur *fini* montre que, si $\lambda \leq 1.2 e$, le mur se comporte dans ses deux premiers tiers à partir de la surface d'origine comme un mur semi-infini.

Pour un mur d'épaisseur faible telle que $\lambda \gg 1.2 e$ le phénomène de propagation peut-être négligé, le champ de température est uniforme, les oscillations ont lieu en phase (équivalent à *Biot* < 0.1).

6) Résumé

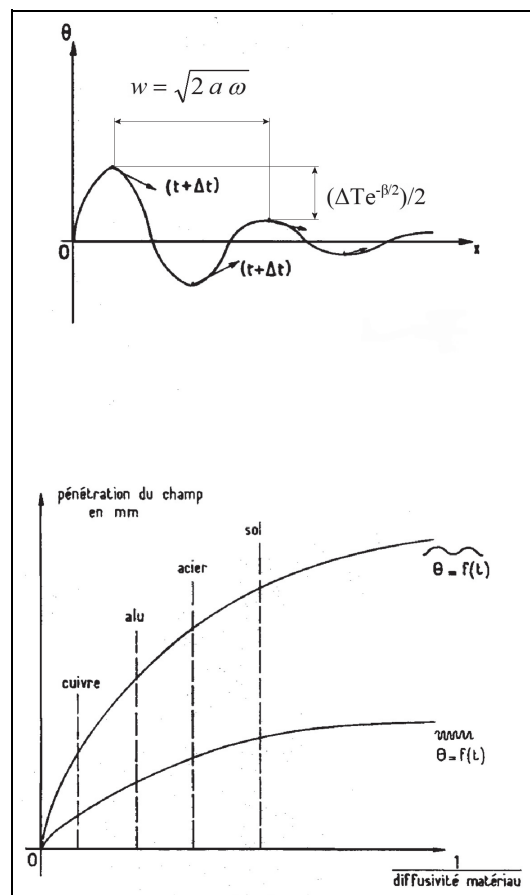


fig. 3.3. - Propagation d'un flux thermique cyclique en fonction de la diffusivité du matériau et de la fréquence de l'onde thermique.

Application 3.3. Un mur en béton très épais est soumis à une variation de température quotidienne due aux rayons du soleil. La température de surface varie entre 15 °C et 50 °C, respectivement la nuit et le jour (de façon sinusoïdale).

Les propriétés du béton sont : $\lambda = 1.2 \text{ W/mK}$; $c_p = 880 \text{ J/kgK}$; $\rho = 2\,200 \text{ kg/m}^3$.

- A quelle profondeur l'amplitude de variation vaut-elle 10 % de celle de la surface ?
- Au moment où la température en ce point est à son maximum, quelle est la température en surface ?
- Au moment où la température est maximum en surface, quelle est la température en ce même point ?

Solution :

Hypothèse : mur très épais → milieu semi-infini.

Calculons les différentes caractéristiques

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} = \frac{1.2}{2\,200 \times 880} = 6.2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times \pi}{24 \times 3\,600} = 7.272 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega}{2a}} = \sqrt{\frac{7.272 \cdot 10^{-5}}{2 \times 6.2 \cdot 10^{-7}}} = 7.657 \text{ m}^{-1}$$

a) Recherche de la profondeur

$$\frac{\theta_{(z,t)}}{\theta_{(0,t)}} = \exp(-\beta z) \Rightarrow z = -\frac{\ln(\theta_{(z,t)} / \theta_{(0,t)})}{\beta} = -\frac{\ln(0.1)}{7.657} = 0.3 \text{ m}$$

b) Recherche de la température en surface

L'équation **éq. 3.42.** est maximale si son sinus est égal à 1 (pour $z = 0.3 \text{ m}$).

$$\sin(\omega t - \beta z) = 1 \Rightarrow 7.272 \cdot 10^{-5} t - 7.657 \times 0.3 = \pi/2$$

$$t = \frac{\pi/2 + 7.657 \times 0.3}{7.272 \cdot 10^{-5}} = 53\,189 \text{ s}$$

Calculons la température de surface ($z = 0$) pour ce temps là :

$$T_{(0.3, 53\,189.5)} = T_{s \text{ moy}} + \Delta T_s \exp(-\beta z) \sin(\omega t - \beta z)$$

$$= \left(\frac{15 + 50}{2}\right) + \left(\frac{50 - 15}{2}\right) \exp(0) \sin(7.272 \cdot 10^{-5} \times 53\,189 - 0)$$

$$= 20.9 \text{ }^\circ\text{C}$$

c) Recherche de la température en $z = 0.3 \text{ m}$

L'équation **éq. 3.42.** est maximale si son sinus est égal à 1 (pour $z = 0 \text{ m}$).

$$\sin(\omega t - 0) = 1 \Rightarrow 7.272 \cdot 10^{-5} t - 0 = \pi/2$$

$$t = \frac{\pi/2}{7.272 \cdot 10^{-5}} = 21\,600 \text{ s}$$

Calculons la température en $z = 0.3 \text{ m}$ pour ce temps là :

$$\begin{aligned} T_{(0.3, 43201.2)} &= T_{s \text{ moy}} + \Delta T_s \exp(-\beta z) \sin(\omega t - \beta z) \\ &= \left(\frac{15 + 50}{2} \right) + \left(\frac{50 - 15}{2} \right) \exp(-7.657 \times 0.3) \\ &\quad \times \sin(7.272 \cdot 10^{-5} \times 21600 - 7.657 \times 0.3) \\ &= 31.3 \text{ } ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

3.3. Flux imposé en surface (Condition de Neumann)

$$C.I. \quad T_{(z,0)} = T_0 \quad \text{et} \quad -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \dot{q}$$

Méthode :

Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

Considérons la même configuration mais en imposant brutalement une densité de flux de chaleur uniforme et constant \dot{q} [W/m^2] à la surface du milieu semi-infini. Cette condition limite est appelée condition de Neumann.

La résolution de l'équation différentielle avec ces conditions initiales donne la distribution de température :

$$T_{(z,t)} - T_0 = \dot{q} \frac{2\sqrt{at}}{\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) - u(1 - \text{erf}(u)) \right) \quad (\text{éq. 3.79.})$$

avec :
$$u = \frac{z}{2\sqrt{at}}$$

ou :
$$T_{(z,t)} - T_0 = \dot{q} \frac{2\sqrt{at}}{\lambda} \text{ierfc}(u) \quad (\text{éq. 3.81.})$$

La température de surface T_s s'obtient en faisant $z = 0$ dans l'équation ci dessus :

$$T_s = T_0 + \dot{q} \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{at}{\pi}} \quad (\text{éq. 3.83.})$$

On peut remarquer que, contrairement aux deux autres conditions limites, si le temps $t \rightarrow \infty$, nous avons que $T_{(z,t)} \rightarrow \infty$ aussi. Ce qui est assez logique puisque nous apportons continuellement de la puissance calorifique.

Application 3.4. La surface d'un mur de brique, initialement à une température uniforme de $T_0 = 10^\circ C$, absorbe une radiation solaire équivalent à $100 W/m^2$ commençant au temps $t = 0$. Les caractéristiques thermiques du mur sont : $\lambda = 0.5 W/mK$ et $a = 0.005 cm^2/s$. Calculez :

- a) La température de surface après une heure d'exposition au flux solaire;
 b) La température après une heure d'exposition en un point situé à $10 cm$ sous la surface exposée.

Solution :

Vérification du modèle semi-infini

$$z_{clt} = e_{mur} > ? 2.32 \sqrt{a t} = 2.32 \sqrt{0.005 \cdot 10^{-4} \times 3600} = 0.0984 m \approx 10 cm \quad (\text{OK})$$

a) Température de surface T_s :

$$T_s = T_0 + \dot{q} \frac{2 \sqrt{a t}}{\lambda \sqrt{\pi}} = 10 + 100 \times \frac{2 \times \sqrt{0.005 \cdot 10^{-4} \times 3600}}{0.5 \times \sqrt{\pi}}$$

$$= 19.57^\circ C$$

b) Température sous la surface exposée :

$$T_{(z,t)} - T_0 = \dot{q} \frac{2 \sqrt{a t}}{\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) - u (1 - \text{erf}(u)) \right)$$

$$\text{Avec : } u = \frac{z}{2 \sqrt{a t}} = \frac{0.1}{2 \sqrt{0.005 \cdot 10^{-4} \times 3600}} = 1.1785$$

$$\text{et } \text{erf}(u) \approx \sqrt{1 - \exp\left(\frac{-4 u^2}{\pi}\right)} = \sqrt{1 - \exp\left(\frac{-4 \cdot 1.1785^2}{\pi}\right)} = 0.9107$$

$$T_{(z,t)} - T_0 = 100 \times \frac{2 \sqrt{0.005 \cdot 10^{-4} \times 3600}}{0.5} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-1.1785^2) - 1.1785 (1 - 0.9107) \right)$$

$$\approx 0.6^\circ C$$

$$T_{(-0.1, 3600)} = 10.6^\circ C \quad (\text{La perturbation est faible, OK pour le modèle semi-infini}).$$

3.4. Coefficient de transfert imposé en surface (Condition de Newton - Fourier)

3.4.1. Température du fluide constante

$$C.I. \quad \boxed{T_{(z,0)} = T_0 \quad \text{et} \quad -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = h(T_\infty - T_{(0,t)})}$$

Méthode :

Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

Considérons le cas où le coefficient de transfert de chaleur par convection h entre un milieu semi-infini à température initiale T_0 et le milieu ambiant à température T_∞ est imposé, cette condition limite est appelée condition de Newton - Fourier.

On obtient dans ce cas :

$$\boxed{\frac{T_{(z,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \operatorname{erf}(u) + \exp\left(\frac{h^2}{\lambda^2} a t + \frac{h z}{\lambda}\right) (1 - \operatorname{erf}(v))} \quad (\text{éq. 3.94.})$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-\eta^2) d\eta & \text{et} \quad u = \frac{z}{2\sqrt{a t}} \\ \operatorname{erf}(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^v \exp(-\eta^2) d\eta & \text{et} \quad v = \frac{z}{2\sqrt{a t}} + \frac{h}{\lambda} \sqrt{a t} \end{cases}$$

Remarque :

Si $h \rightarrow \infty$, on peut démontrer que le second terme tend vers 0 (en utilisant la règle de l'Hospital⁽⁵⁾ pour lever la forme indéterminée " $\infty \cdot 0$ ") et on retombe, comme il se doit, sur la solution du problème des milieux semi-infinis avec condition de Dirichlet (éq. 3.6.).

La température de surface T_s s'obtient en faisant $z = 0$ dans l'équation ci dessus, sachant que :

$$\operatorname{erf}(u) = \operatorname{erf}(0) = 0$$

On obtient :

$$\boxed{\frac{T_s - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp\left(\frac{h^2}{\lambda^2} a t\right) \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{h}{\lambda} \sqrt{a t}\right)\right)} \quad (\text{éq. 3.99.})$$

⁽⁵⁾ Guillaume François Antoine de L'Hospital (1661-1704) : marquis, mathématicien français.

Application 3.5. Une pièce de bronze très épaisse (diffusivité thermique $a = 0.86 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ et conductivité $\lambda = 26 \text{ W/mK}$) est initialement à une température de $250 \text{ }^\circ\text{C}$. Soudainement sa surface est exposée à un fluide à $25 \text{ }^\circ\text{C}$ et le coefficient d'échange est de $150 \text{ W/m}^2\text{K}$. Déterminer la température dans le bronze à 5 cm sous la surface après 10 minutes d'exposition.

Solution :

Hypothèse : Si pièce très épaisse $\Rightarrow Bi > 0.1$

Vérification du modèle semi-infini

$$z_{clt} = e_{pièce} > ? 2.32 \sqrt{a t} = 2.32 \sqrt{0.86 \cdot 10^{-5} \times 600} = 0.167 \text{ m}$$

(L'épaisseur de la pièce de bronze doit être supérieure à 16.7 cm)

Coefficient de transfert imposé en surface (Condition de Newton - Fourier)

$$\frac{T_{(z,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \text{erf}(u) + \exp\left(\frac{h^2}{\lambda^2} a t + \frac{h z}{\lambda}\right) (1 - \text{erf}(v))$$

Avec :

$$\begin{cases} \text{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-\eta^2) d\eta & \text{et } u = \frac{z}{2\sqrt{a t}} \\ \text{erf}(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^v \exp(-\eta^2) d\eta & \text{et } v = \frac{z}{2\sqrt{a t}} + \frac{h}{\lambda} \sqrt{a t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{z}{2\sqrt{a t}} = \frac{0.05}{2\sqrt{0.86 \cdot 10^{-5} \times 600}} = 0.348 \\ v = \frac{z}{2\sqrt{a t}} + \frac{h}{\lambda} \sqrt{a t} = 0.348 + \frac{150}{26} \sqrt{0.86 \cdot 10^{-5} \times 600} = 0.762 \\ \text{erf}(u) \approx \sqrt{1 - \exp\left(\frac{-4 u^2}{\pi}\right)} = \sqrt{1 - \exp\left(\frac{-4 \times 0.348^2}{\pi}\right)} = 0.378 \\ \text{erf}(v) \approx \sqrt{1 - \exp\left(\frac{-4 v^2}{\pi}\right)} = \sqrt{1 - \exp\left(\frac{-4 \times 0.762^2}{\pi}\right)} = 0.723 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{(5 \text{ cm}, 10 \text{ min})} - 25}{250 - 25} &= 0.378 + \exp\left(\frac{150^2}{26^2} \times 0.816 \cdot 10^{-5} \times 600 + \frac{150 \times 0.05}{26}\right) (1 - 0.723) \\ &= 0.817 \\ \Rightarrow T_{(5 \text{ cm}, 10 \text{ min})} &= 209 \text{ }^\circ\text{C} \end{aligned}$$

3.4.2. Température périodique du fluide

{Réf. 2}

$$C.I. \quad T_f - \bar{T}_f = \Delta T_f \sin(n \omega t) \quad \text{et} \quad -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = h(\bar{T}_f - T_{(0,t)})$$

Notations : n $n = 1, 2, \dots$ selon l'harmonique

$$\Delta T_f \quad \text{amplitude de la température du fluide} \quad \left(\frac{T_{f \max} - T_{f \min}}{2} \right)$$

$$\bar{T}_f \quad \text{température moyenne du fluide} \quad \left(\frac{T_{f \max} + T_{f \min}}{2} \right)$$

La température moyenne du fluide est donc prise comme référence. C'est-à-dire que l'on considère la température initiale du solide égale à la température moyenne du fluide.

Comme les équations qui régissent le problème du transfert thermique sont linéaires, on peut considérer séparément l'effet des différentes harmoniques de la série de Fourier qui représente la variation périodique (de période $2\pi/\omega$) de la température du fluide au voisinage de la paroi exposée au gaz.

La solution de ce système est :

$$\frac{T_{(z,t)} - \bar{T}_f}{\Delta T_f} = M \exp(-\beta_n z) \sin(n \omega t - (N + \beta_n z)) \quad (\text{éq. 3.111.})$$

avec :

$$M = \frac{1}{\sqrt{1 + 2k_n + 2k_n^2}} \quad \text{et} \quad N = \arctan\left(\frac{k_n}{k_n + 1}\right)$$

$$\beta_n = \sqrt{\frac{n\omega}{2a}} \quad \text{et} \quad k_n = \beta_n \frac{\lambda}{h}$$

On comprend mieux le sens physique des paramètres M et N si, dans l'équation (éq. 3.111.), on fait $z = 0$, de façon à obtenir la température de surface :

$$\frac{T_{(0,t)} - \bar{T}_f}{\Delta T_f} = M \sin(n \omega t - N) \quad (\text{éq. 3.114.})$$

Ceci exprime que la température en surface subit une loi harmonique de même période T_v que celle de la température du fluide mais avec un déphasage (en angle) égal à N et un déphasage (en temps) égal à N/ω . De plus, l'amplitude en surface ($\Delta T_f M$) de la température du solide a été réduite par rapport à celle de la température du fluide ambiant, par suite de la présence du facteur M , inférieur à l'unité.

On voit de même qu'en $z = 0$, le retard de l'oscillation de température sur celle de $(T_{(z,t)} - \bar{T}_f)$ est $(N + \beta_n z)$ en angle, ou encore cette même expression divisée par ω , en temps.

Enfin, les équations précédentes permettent aussi de constater que la température de surface suit d'autant mieux la température du fluide que la valeur du nombre (π/k_n^2) est grande, en particulier si h est grand ou si λ est petit. Également, le terme exponentiel de l'équation (éq. 3.111.) montre à nouveau que la pénétration d'une onde (amplitude) est d'autant plus profonde que la fréquence $1/T_v$ est faible. Dans le cas d'une excitation non plus harmonique mais quelconque (série de Fourier), ceci conduit à dire que les oscillations de haute fréquence sont rapidement amorties par rapport aux faibles harmoniques ou à l'harmonique fondamental.

La théorie précédente est particulièrement importante dans l'étude des moteurs à combustion interne où les gaz chauds, et variant de façon périodique en température, n'endommagent pas les parois du cylindre par suite de l'amortissement considérable des températures (faible valeur de M).

Application 3.6. Calculons l'amplitude de température en surface d'un piston en aluminium d'un moteur 4 temps tournant à 4000 t/min. Le coefficient de convection gaz-piston peut-être estimé à 550 W/m²K, le coefficient de diffusivité de l'aluminium est de l'ordre de 8.037 10⁻⁵ m²/s. ($\lambda = 204$ W/mK ; $c = 960$ J/kgK ; $\rho = 2700$ kg/m³).

Solution :

Cela revient à calculer le facteur M . Calculons le pour la première harmonique ($n = 1$).

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{n \omega}{2 a}} = \sqrt{\frac{1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2 \pi 4000}{60}}{2 \times 8.038 \cdot 10^{-5}}} = 1141.4 \text{ m}^{-1}$$

$$k_1 = \beta_1 \frac{\lambda}{h} = 1141.4 \times \frac{204}{550} = 423.4$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 k_1 + 2 k_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \times 423.4 + 2 \times 423.4^2}} = 0.00167 \approx 0.17 \%$$

Remarque :

Dans le cas d'un moteur à 4 temps, la fréquence des pulsations est divisée par 2.

$M = 0.17 \%$ étant très faible il en va, de même pour l'amplitude de la variation de température (harmonique fondamental) de la paroi en surface ($\Delta T_f M$). Ainsi, si $\Delta T_f = 1600^\circ C$, l'amplitude en surface du fondamental vaut :

$$\Delta T_f M = 1600 \times 0.00167 = 2.67^\circ C$$

Autrement dit, la paroi ne suit pas la variation de température des gaz. Et c'est encore plus vrai pour les harmoniques d'ordre supérieur. Dans les calculs de transfert de chaleur vers le cylindre ou le piston, on peut donc prendre comme température des gaz sa température moyenne $T_{f moy}$ supposée constante.

3.5. Contact brusque entre deux solides semi-infinis

Méthode :

Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

Considérons deux milieux semi-infinis initialement à deux températures uniformes différentes T_{01} et T_{02} . A l'instant initial, on place les deux milieux en contact et l'on recherche l'évolution de la température au sein des deux milieux.

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_1(z,t) - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} &= \frac{b_2}{b_1 + b_2} \operatorname{erfc}(u_1) \\ \frac{T_2(z,t) - T_{02}}{T_{01} - T_{02}} &= \frac{b_1}{b_1 + b_2} \operatorname{erfc}(u_2) \end{aligned} \right\} \text{(éq. 3.128.) avec : } u_1 = \frac{|z|}{2\sqrt{a_1 t}} \text{ et } u_2 = \frac{z}{2\sqrt{a_2 t}}$$

Notations : $T_{(z,t)1}$ température du corps (1) en fonction de z et de t
 $T_{(z,t)2}$ température du corps (2) en fonction de z et de t

Lorsque l'on met en contact deux solides qui sont à des températures différentes, T_{01} et T_{02} , les surfaces des deux corps se mettent immédiatement à la même température T comprise entre T_{01} et T_{02} . A cet instant et sur les faces intéressées, se produit un phénomène thermocinétique d'une intensité considérable, dont la violence se limite à un temps très court et ne s'exerce que sur une très faible profondeur. En conséquence les paramètres (temps, dimensions, caractéristiques physiques, ...) des lois de la thermocinétique qui, en régime permanent, sont affectés de l'exposant 1 sont, lors de ce régime transitoire, généralement affectés de l'exposant $\frac{1}{2}$ (\sqrt{t} croît plus vite que t au voisinage de 0). Chacun des deux corps étant infiniment étendu de part et d'autre de la face de contact (supposée située dans le plan $z = 0$), le phénomène calorifique progresse dans l'espace par diffusion, s'épanouissant telle une goutte d'encre tombée sur un buvard. A travers ce plan $z = 0$, un flux thermique s'établit, qui peut être rapporté à l'un quelconque des deux corps. On a donc :

$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial z} \text{ et } \dot{Q}_1 = \dot{Q}_2$$

De par l'équation (éq. 3.27.), on peut trouver :

$$\frac{\lambda_1}{\sqrt{\pi a_1 t}} (T_{01} - T) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\pi a_2 t}} (T - T_{02}) \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}} (T_{01} - T_c) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}} (T_c - T_{02})$$

Il y a apparition du facteur directeur de la loi des échanges thermiques superficiels et brefs :

$$b = \frac{\lambda}{\sqrt{a}} = \sqrt{\lambda \rho c} \text{ (éq. 3.136.) } \quad [Jm^{-2}K^{-1}s^{-0.5}] \text{ ou } [Wm^{-2}K^{-1}s^{0.5}]$$

b est appelé coefficient d'arrachement thermique ou effusivité thermique.

La température au contact T_c devient :

$$T_c = \frac{b_1 T_{01} + b_2 T_{02}}{b_1 + b_2} \text{ (éq. 3.137.)}$$

Ce qui revient à faire dans l'équation (éq. 3.128.) : $z = 0$, T_1 (ou T_2) devenant la température de

contact T_c .

Le corps qui impose sa température est donc celui qui possède le plus grand coefficient d'arrachement thermique b ; la sensation que l'on ressent en saisissant une barre de cuivre et un morceau de bois, tous deux à la même température, est effectivement très différente; dans le second cas, c'est la main ($b_{main} = 420 \text{ Jm}^{-2} \text{ K}^{-1} \text{ s}^{-0.5}$) qui impose sa température au contact du bois ($b_{sapin} = 389 \text{ Jm}^{-2} \text{ K}^{-1} \text{ s}^{-0.5}$) alors que, dans le premier cas, c'est le cuivre ($b_{cuivre} = 37137 \text{ Jm}^{-2} \text{ K}^{-1} \text{ s}^{-0.5}$) qui commande.

Application 3.7. Deux gros blocs, l'un en cuivre l'autre de béton, sont à température ambiante de la pièce (23°C). Lequel de ces deux blocs vous semblera plus froid au toucher, sachant que l'on peut les considérer comme solide semi-infini et que votre main est à température de 37°C ?

Caractéristiques des matériaux :

$$\rho_{cuivre} = 8933 \text{ kg/m}^3 ; c_{cuivre} = 385 \text{ J/kgK} ; \lambda_{cuivre} = 401 \text{ W/mK} .$$

$$\rho_{béton} = 2300 \text{ kg/m}^3 ; c_{béton} = 880 \text{ J/kgK} ; \lambda_{béton} = 1.4 \text{ W/mK} .$$

Solution :

Solide semi-infini avec température imposée en surface

Comparons les deux coefficients d'arrachement thermique (la différence de température entre la main et les matériaux étant la même) :

$$\frac{b_{cuivre}}{b_{béton}} = \frac{(\sqrt{\lambda \rho c})_{cuivre}}{(\sqrt{\lambda \rho c})_{béton}} = \frac{\sqrt{401 \times 8933 \times 385}}{\sqrt{1.4 \times 2300 \times 880}} = 22.1$$

Le flux vers le cuivre est plus de $20 \times$ supérieur à celui vers le béton : conclusion le cuivre semblera beaucoup plus froid que le béton.
