

<i>CHAPITRE 4 : TRANSFERT UNIDIRECTIONNEL DANS LES MILIEUX LIMITÉS</i>	<i>- 4.1 -</i>
<i>4.1. Température constante imposée en surface (Condition de Dirichlet)</i>	<i>- 4.1 -</i>
4.1.1. <i>Plaque infinie</i>	<i>- 4.1 -</i>
4.1.2. <i>Cylindre infini</i>	<i>- 4.2 -</i>
4.1.3. <i>Sphère</i>	<i>- 4.2 -</i>
<i>4.2. Flux imposé imposée en surface (Condition de Neumann)</i>	<i>- 4.5 -</i>
4.2.1. <i>Plaque infinie</i>	<i>- 4.5 -</i>
4.2.2. <i>Cylindre infini</i>	<i>- 4.5 -</i>
4.2.3. <i>Sphère</i>	<i>- 4.6 -</i>
<i>4.3. Coefficient de transfert imposé en surface (Condition de Newton - Fourier)</i>	<i>- 4.8 -</i>
4.3.1 <i>Relations en température</i>	<i>- 4.8 -</i>
4.3.2. <i>Energie transférée</i>	<i>- 4.9 -</i>
<i>4.4. Cas particuliers</i>	<i>- 4.13 -</i>
4.4.1. <i>Cas particuliers de la plaque isolée sur une face</i>	<i>- 4.13 -</i>
4.4.2. <i>Utilisation des conditions de Newton-Fourier pour une condition de Dirichlet</i> .	<i>- 4.15 -</i>
4.4.3. <i>Utilisation de la méthode des milieux limités en lieu et place de la méthode du gradient nul</i>	<i>- 4.17 -</i>
<i>4.5. Cas particulier : source de chaleur interne constante</i>	<i>- 4.19 -</i>
4.5.1. <i>Relation en température</i>	<i>- 4.19 -</i>

4.1. Température constante imposée en surface (Condition de Dirichlet)

Hypothèse :

On impose brutalement une température T_s à la surface de la pièce initialement à la température uniforme T_0 .

4.1.1. Plaque infinie

Nous allons traiter dans ce qui suit le cas de la plaque d'épaisseur $2l$ et de dimensions latérales suffisamment grandes pour que l'on puisse considérer que le transfert de chaleur est unidirectionnel.

On fixe l'origine de l'axe z au milieu de la plaque d'épaisseur $2l$ ($z=l \Rightarrow$ surface).

$$C.I. \quad T_{(z,0)} = T_0 \quad \text{et} \quad T_{(l,t)} = T_{(-l,t)} = T_s \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{(0,t)} = 0$$

1^{ère} méthode :

Transformée de Laplace, développement en série et inversion terme à terme par les tables.

Ce qui, après résolution, nous donne :

$$\frac{T_{(z,t)} - T_0}{T_s - T_0} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{2l(n+1) - z}{2\sqrt{at}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{2nl + z}{2\sqrt{at}} \right) \right] \quad (\text{éq. 4.3})$$

Cette solution converge rapidement pour des faibles valeurs de t (petites valeurs de Fo).

2^{ème} méthode :

Décomposition de la température en un produit de fonctions et superposition des solutions.

$$\frac{T_{(z,t)} - T_s}{T_0 - T_s} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \exp \left(- (n\pi/2)^2 Fo_r \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \left(\frac{z}{l} + 1 \right) \right) \quad (\text{éq. 4.4})$$

Notation : Fo_r nombre de Fourier tel que défini dans l'Annexe 1 (ici $Fo_r = Fo$)

Cette méthode convient bien pour les temps longs (grandes valeurs de Fo).

Comparaison des méthodes :

Compte-tenu de la puissance des ordinateurs, l'application des formules obtenues ne pose aucune difficulté, un nombre de termes égal à 5 suffit pour obtenir une bonne précision pour les formules de la 1^{ère} et 2^{ème} méthode.

Remarques :

- 1) La température dans le plan médian du mur commence à changer de façon notable (1 % de la température sous forme adimensionnelle) à partir de $Fo \approx 0.06$.
- 2) Le régime stationnaire est pratiquement atteint (99 %) à partir de $Fo \approx 1.5$ (pour le

plan médian c'est $Fo \approx 1.97$.

3) Si $Fo > 0.3$ un seul terme suffit.

4.1.2. Cylindre infini

On considère dans ce paragraphe un cylindre infini de rayon r_0 (longueur très grande par rapport au diamètre : $long/r \geq 10$), on peut faire l'hypothèse dans ce cas que le transfert de chaleur est uniquement radial.

On fixe l'origine de l'axe radial au milieu du cylindre de rayon r_0 .

$$C.I. \quad \boxed{T_{(r,0)} = T_0 \quad et \quad T_{(r_0,t)} = T_s}$$

Méthode :

Décomposition de la température en un produit de fonction et transformation de Hankel.

On en déduit finalement, si la température initiale T_0 est uniforme sur toute la surface extérieure, que :

$$\boxed{\frac{T_{(r,t)} - T_s}{T_0 - T_s} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_n} \exp(-M_n^2 Fo_r) \frac{J_0(M_n r/r_0)}{J_1(M_n)}} \quad (éq. 4.12.)$$

Où M_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) sont les racines de l'équation $J_0(M_n) = 0$. (Voir *Annexe 4. - Tableau A4.2*).

Remarques :

- 1) La température sur l'axe du cylindre commence à changer de façon notable (1 % de la température sous forme adimensionnelle) quand $Fo_r \geq 0.047$.
- 2) Le processus de refroidissement (réchauffement) a pratiquement (99 %) atteint le régime stationnaire à partir de $Fo_r = 0.88$.
- 3) La série de l'éq. 4.12. converge rapidement et, si Fo_r , n'est pas trop petit, on peut se contenter d'un seul terme.

4.1.3. Sphère

On considère dans ce paragraphe une sphère de rayon r_0 .

On fixe l'origine des axes au centre de la sphère.

$$C.I. \quad \boxed{T_{(r,0)} = T_0 \quad et \quad T_{(r_0,t)} = T_s}$$

Ce qui permet d'obtenir le résultat suivant :

$$\boxed{\frac{T_{(r,t)} - T_s}{T_0 - T_s} = \frac{2 r_0}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp(-(n\pi)^2 Fo_r) \sin\left(\frac{n\pi r}{r_0}\right)} \quad (éq. 4.18.)$$

La température *au centre* est donnée par la limite de la relation (éq. 4.18.) quand r tend vers zéro et s'écrit :

$$\frac{T_{(0,t)} - T_s}{T_0 - T_s} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \exp\left(- (n \pi)^2 Fo_r\right) \quad (\text{éq. 4.19.})$$

Remarques :

- 1) La température au centre de la sphère commence à changer de façon notable (1 % de la température sous forme adimensionnelle) quand $Fo_r \geq 0.04$.
- 2) Le processus de refroidissement (réchauffement) a pratiquement (99 %) atteint le régime stationnaire à partir de $Fo_r = 0.54$.
- 3) Nous pouvons aussi utiliser les formules du § 4.3. avec $h = \infty$ (voir § 4.4.).
- 4) Si $Fo_r \leq 0.08$ on préférera utiliser les formules suivantes {Réf. 2} :

$$\frac{T_{(r,t)} - T_s}{T_0 - T_s} = 1 - \frac{r_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{erfc}\left(\frac{(2n-1) - r/r_0}{2\sqrt{Fo_r}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{(2n-1) + r/r_0}{2\sqrt{Fo_r}}\right) \right) \quad (\text{éq. 4.24.})$$

La température *au centre* est donnée par la limite de la relation (éq. 4.24.) quand r tend vers zéro et s'écrit :

$$\frac{T_{(0,t)} - T_s}{T_0 - T_s} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi Fo_r}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(- \frac{(2n-1)^2}{4 Fo_r}\right) \quad (\text{éq. 4.25.})$$

Application 4.1. Connaissant la température initiale T_0 d'une plaque de verre, ainsi que son épaisseur et sa diffusivité, calculer, si on applique brutalement une température T_s à sa surface :

- a) le temps qu'il faut pour que le milieu de la plaque se refroidisse de 50 %;
- b) le gradient de température maximum à cet instant.

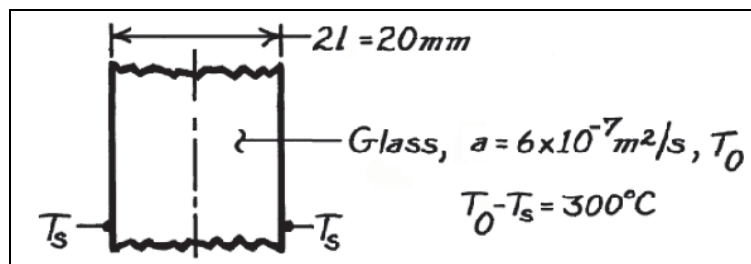


fig. 4.1. - Application 4.1.

Solution :

Hypothèses :

- ▶ conduction unidimensionnelle;
- ▶ les propriétés des matériaux sont constantes;
- ▶ Comme on cherche la température au milieu de la plaque, l'hypothèse "milieu infini" est à rejeter.

a) Temps

Calcul du nombre de Biot

L'application brutale d'une température de surface revient à avoir un $h \rightarrow \infty$ et de ce fait un $Bi = \infty$. La méthode du gradient nul est inapplicable.

Condition de Dirichlet pour une plaque infinie (en $z = 0$)

Hypothèse (à vérifier a posteriori) : $Fo_r > 0.2$ (on se contente de 1! terme)

$$\frac{T_{(z,t)} - T_s}{T_0 - T_s} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-\left(n\pi/2\right)^2 Fo_r\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\left(\frac{z}{l} + 1\right)\right)$$

$$0.5 = \frac{4}{\pi} \exp\left(-\left(\pi/2\right)^2 Fo_r\right) \quad (1! \text{ terme} \Rightarrow n=1)$$

$$Fo_r = \frac{-4}{\pi^2} \ln\left(\frac{0.5 \times \pi}{4}\right) = 0.379 \quad (Fo_r > 0.2 \text{ OK})$$

Recherche du temps

$l_c = l/2$ épaisseur de la plaque

$$Fo_r = \frac{a t}{l^2} \Rightarrow t = \frac{Fo_r}{a} l^2 = \frac{0.379}{610^{-7}} \times (10 \cdot 10^{-3})^2 = 63.1 \text{ s}$$

b) Gradient de température

$$\frac{T_{(z,t)} - T_s}{T_0 - T_s} = \frac{4}{\pi} \exp\left(-\left(\pi/2\right)^2 Fo_r\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{z}{l} + 1\right)\right)$$

Dérivons :

$$\frac{\partial T_{(z,t)}}{\partial z} = (T_0 - T_s) \frac{4}{\pi} \exp\left(-\left(\pi/2\right)^2 Fo_r\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{z}{l} + 1\right)\right) \left(\frac{\pi}{2l}\right)$$

Le maximum se trouve en surface $z = l$:

$$\left. \frac{\partial T_{(z,t)}}{\partial z} \right|_{\max \Rightarrow z=l} = (T_0 - T_s) \frac{4}{\pi} \exp\left(-\left(\pi/2\right)^2 Fo_r\right) (-1) \left(\frac{\pi}{2l}\right)$$

$$= -\frac{300 \times 2}{10 \cdot 10^{-3}} \times \exp\left(-\frac{\pi^2 \times 0.379}{4}\right)$$

$$= -2.36 \cdot 10^4 \text{ K/m}$$

(Choc thermique !)

4.2. Flux imposé imposée en surface (Condition de Neumann)

Hypothèse :

On impose brutalement une densité de flux \dot{q} uniforme et constant sur les 2 faces de la pièce initialement à la température uniforme T_0 .

4.2.1. Plaque infinie

On fixe l'origine des axes z au milieu de la plaque d'épaisseur $2l$.

$$C.I. \quad T_{(z,0)} = T_0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \text{et} \quad -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=l} = \dot{q}$$

Notation : \dot{q} densité de flux W/m^2

En utilisant les deux premières méthodes du paragraphe précédent, on arrive aux résultats suivants :

$$T_{(z,t)} - T_0 = \frac{\dot{q} t}{\rho c l} + \frac{\dot{q} l}{\lambda} \left[\frac{3z^2 - l^2}{6l^2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \exp\left(- (n\pi)^2 Fo_r\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{l}\right) \right] \quad (\text{éq. 4.40.})$$

avec, pour les grandes valeurs de t , la solution quasi stationnaire :

$$T_{(z,t)} - T_0 = \frac{\dot{q} t}{\rho c l} + \frac{\dot{q} l}{\lambda} \left[\frac{3z^2 - l^2}{6l^2} \right] \quad (\text{éq. 4.41.})$$

qui peut être utilisée pour déterminer la conductivité thermique.

Cette solution quasi stationnaire montre qu'après un certain temps la série contenue dans l'éq. 4.40. s'approche de zéro. Alors, la température en tout point z du mur est une fonction linéaire du temps, tandis que la distribution de la température en fonction de z est purement parabolique.

Nous avons aussi pour les faibles valeurs de Fo (la convergence étant plus rapide) :

$$T_{(z,t)} - T_0 = \frac{2\dot{q}\sqrt{at}}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\text{ierfc}\left(\frac{(2n+1)l-z}{2\sqrt{at}}\right) + \text{ierfc}\left(\frac{(2n+1)l+z}{2\sqrt{at}}\right) \right] \quad (\text{éq. 4.42.})$$

4.2.2. Cylindre infini

On fixe l'origine de l'axe radial au milieu du cylindre de rayon r_0 .

$$C.I. \quad T_{(r,0)} = T_0 \quad \text{et} \quad -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \dot{q}$$

La solution est la suivante :

$$T_{(r,t)} - T_0 = \frac{\dot{q} r_0}{\lambda} \left(2 Fo_r - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\omega_n^2 Fo_r) \frac{J_0(\omega_n r/r_0)}{\omega_n^2 J_0(\omega_n)} \right) \quad (\text{éq. 4.44.})$$

Où ω_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) sont les racines de l'équation $J_1(\omega) = 0$. (Voir *Annexe 4. - Tableau A4.2*).

Remarque :

Pour un Fo_r suffisamment grand ($Fo_r \geq 0.6$), la série contenue dans *éq. 4.44.* s'approche de zéro et on rencontre le régime quasi-stationnaire.

4.2.3. Sphère

On fixe l'origine de l'axe radial au milieu de la sphère de rayon r_0 .

$$C.I. \quad \left[T_{(r,0)} = T_0 \quad \text{et} \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \dot{q} \right]$$

La solution est la suivante :

$$T_{(r,t)} - T_0 = \frac{\dot{q} r_0}{\lambda} \left(3 Fo_r + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - \frac{3}{10} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\omega_n^2 Fo_r) \frac{\sin(\omega_n r/r_0)}{\omega_n^2 \sin(\omega_n)} \left(\frac{r_0}{r} \right) \right) \quad (\text{éq. 4.49.})$$

Où ω'_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) sont les racines positive de l'équation $\tan \omega' = \omega'$.

Remarque :

Pour un Fo_r suffisamment grand ($Fo_r \geq 0.5$), la série contenue dans *éq. 4.49.* s'approche de zéro et on rencontre le régime quasi-stationnaire.

Application 4.2. On étudie le réchauffement d'une plaque en polymère, de grandes dimensions transversales, de conductivité $\lambda = 0.2 \text{ W/m}^2 \text{ K}$, de capacité calorifique volumique $\rho c = 1.8 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3 \text{ K}$ et d'épaisseur $2l = 0.01 \text{ m}$ au moyen de lampes infrarouges. On supposera que le rayonnement, constant et uniforme, issu des lampes est absorbé superficiellement sur chaque face à raison d'une densité de flux $\dot{q} = 640 \text{ W/m}^2$. La plaque est initialement à température $T_0 = 30^\circ \text{ C}$. Calculer le temps pour que les faces extérieures de la plaque atteignent 70° C .

Solution :

Hypothèses :

- ▶ conduction unidimensionnelle;
- ▶ les propriétés des matériaux sont constantes;
- ▶ pas de déperditions par convection ou rayonnement.

Recherche du temps

Pour ce donner une idée du temps, utilisons l'éq. 4.41. (avec $z = l = 0.005 \text{ m}$)

$$T_{(l,t)} - T_0 = \frac{\dot{q} t}{(\rho c) l} + \frac{\dot{q} l}{\lambda} \left[\frac{3l^2 - l^2}{6l^2} \right]$$
$$\Rightarrow t = \left((T_{(l,t)} - T_0) - \frac{\dot{q} l}{3\lambda} \right) \frac{(\rho c) l}{\dot{q}} = \left((70 - 30) - \frac{640 \times 0.005}{3 \times 0.2} \right) \frac{1.8 \cdot 10^6 \times 0.005}{640}$$
$$t = 487.5 \text{ s}$$

Vérifions par l'équation complète l'éq. 4.40., avec $z = l = 0.005 \text{ m}$ et $n = 1$ (1! terme). Calculons la valeur du terme "somme" uniquement. Soit :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \exp\left(- (n \pi)^2 Fo_r\right) \cos\left(\frac{n \pi z}{l}\right) = \frac{(-1)^1}{1^2} \exp\left(- (1 \pi)^2 Fo_r\right) \cos\left(\frac{1 \pi l}{l}\right)$$
$$= \exp\left(- \pi^2 Fo_r\right)$$

Si on prend $t = 487.5 \text{ s}$, le nombre de Fo_r devient :

$$Fo_r = \frac{a t}{l^2} = \frac{\lambda}{(\rho c) l^2} t = \frac{0.2}{1.8 \cdot 10^6 \times 0.005^2} \times 487.5 = 2.17$$

Et donc :

$$\exp\left(- \pi^2 Fo_r\right) = 5.16 \cdot 10^{-10}$$

Ce qui implique que le terme "somme" est quasi nul. L'approximation de la formule des temps longs est donc tout-à-fait pertinente.

4.3. Coefficient de transfert imposé en surface (Condition de Newton - Fourier)

4.3.1 Relations en température

Hypothèse :

On impose brutalement un échange de chaleur par convection avec un coefficient de convection h à la surface de la pièce initialement à la température uniforme T_0 .

$$C.I. \quad \left. \begin{array}{l} T_{(z,0)} \left\langle \text{ou } T_{(r,0)} \right\rangle = T_0 \quad \text{et} \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L} \left\langle \text{ou } -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \right\rangle = h \left(T_{(z,t)} - T_\infty \right) \left\langle \text{ou } h \left(T_{(r,t)} - T_\infty \right) \right\rangle \end{array} \right\}$$

On peut montrer que les 3 solutions sont du même type, soit :

$$\Theta = \frac{T_{(z,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \left\langle \text{ou } \frac{T_{(r,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n \exp\left(-\hat{\lambda}_n^2 Fo_r\right) \quad \{\text{éq. 4.63.}\} \quad \{\text{Réf. 7}\}$$

	A_n	f_n	$\hat{\lambda}_n$ [rad]
A) Plaque infinie	$\frac{2 \sin \hat{\lambda}_n}{\hat{\lambda}_n + \sin \hat{\lambda}_n \cos \hat{\lambda}_n}$	$\cos\left(\hat{\lambda}_n \frac{z}{l}\right)$	$\hat{\lambda}_n \tan \hat{\lambda}_n = Bi_r$
B) Cylindre infini	$\frac{2 J_1(\hat{\lambda}_n)}{\hat{\lambda}_n \left(J_0^2(\hat{\lambda}_n) + J_1^2(\hat{\lambda}_n) \right)}$	$J_0\left(\hat{\lambda}_n \frac{r}{r_0}\right)$	$\hat{\lambda}_n J_1(\hat{\lambda}_n) = Bi_r J_0(\hat{\lambda}_n)$
C) Sphère	$2 \frac{\sin \hat{\lambda}_n - \hat{\lambda}_n \cos \hat{\lambda}_n}{\hat{\lambda}_n - \sin \hat{\lambda}_n \cos \hat{\lambda}_n}$	$\left(\frac{r_0}{\hat{\lambda}_n r}\right) \sin\left(\frac{\hat{\lambda}_n r}{r_0}\right)$	$\frac{\hat{\lambda}_n}{\tan \hat{\lambda}_n} = 1 - Bi_r$

Tableau 1. - Valeurs des différents coefficients. (Voir aussi **Annexe 06**. pour les valeurs numériques)

Ces différentes solutions se retrouvent sous forme d'abaque dite de Heisler ⁽¹⁾.

Remarque :

Dans le cas de la sphère, pour calculer la **température au centre** (en $r = 0$), il faut se

rappeler que : $\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{r_0}{\hat{\lambda}_n r} \sin\left(\frac{\hat{\lambda}_n r}{r_0}\right) \right) = 1$ et donc que pour ce cas $f_n = 1$.

On remarquera par la même occasion que pour la plaque et le cylindre, nous avons aussi $f_n = 1$ pour le centre.

Cependant, si le nombre de Fourier Fo_r est supérieur à 0.2, on peut ne prendre que le premier terme de ces différentes suites et donc :

⁽¹⁾ Heisler, M,P :

$$\Theta = \frac{T_{(z,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \left\langle \text{ou} \frac{T_{(r,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right\rangle \approx A_1 f_1 \exp\left(-\hat{\lambda}_1^2 Fo_r\right) \quad (\text{éq. 4.74.})$$

- Les valeurs des coefficients A_1 et $\hat{\lambda}_1$ sont donnés à l'Annexe 6.

4.3.2. Energie transférée

Dans beaucoup de situations, il est intéressant de connaître l'énergie transférée, reçue ou perdue, lors d'un processus de conduction transitoire. Cette énergie transférée peut être exprimée par :

$$Q = - \int \rho c (T_{(z,t)} - T_0) dV$$

En introduisant la quantité :

$$Q_0 = \rho c V (T_0 - T_\infty)$$

qui peut être interprétée comme l'énergie initiale contenue dans le volume V par rapport à la température du fluide. C'est donc aussi la quantité maximale transférable pour un temps infini.

Pour avoir, à nouveau, une relation adimensionnelle, on utilisera le rapport Q/Q_0 pour déterminer cette énergie transférée.

$$\frac{Q}{Q_0} = \int \frac{-(T_{(z,t)} - T_0)}{T_0 - T_\infty} \frac{dV}{V}$$

que l'on peut mettre sous la forme d'une série infinie :

$$Q/Q_0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} D_n \exp\left(-\hat{\lambda}_n^2 Fo_r\right) \quad (\text{éq. 4.80.})$$

Les coefficients D_n sont différentes fonctions de $\hat{\lambda}_n$ pour les plaques, cylindres et sphères.

	D_n
A) <u>Plaque infinie</u>	$A_n \frac{\sin \hat{\lambda}_n}{\hat{\lambda}_n}$
B) <u>Cylindre infini</u>	$A_n \frac{2 J_1(\hat{\lambda}_n)}{\hat{\lambda}_n}$
C) <u>Sphère</u>	$A_n \frac{3}{\hat{\lambda}_n^3} (\sin \hat{\lambda}_n - \hat{\lambda}_n \cos \hat{\lambda}_n)$

Tableau 2. - Voir aussi **Annexe 06.** pour les valeurs numériques.

Ces différentes solutions se retrouvent sous forme d'abaque dite de Gröber ⁽²⁾.

Cependant, si le nombre de Fourier Fo_r est supérieur à 0.2, on peut ne prendre que le premier

⁽²⁾ Gröber, Heinrich (Prof. Ing. Dr) (1880-1949) :

terme de cette suite et donc :

$$Q/Q_0 \approx 1 - D_1 \exp(-\hat{\lambda}_1^2 Fo_r) \quad (\text{éq. 4.83.})$$

- La valeur du coefficient Q_1 est donné à l'Annexe 6.

On peut relier aussi la quantité Q/Q_0 à la température moyenne du solide au temps t ($\bar{T}(t)$) par :

$$1 - \frac{Q}{Q_0} = \frac{\bar{T}(t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad (\text{éq. 4.86.})$$

Application 4.3. Problème de la trempe d'une sphère dans un bain d'huile à température constante.

Calculer :

- le temps pour que la surface atteigne 415 K;
- le flux de chaleur à cet instant;
- l'énergie perdue par la sphère pendant son refroidissement.

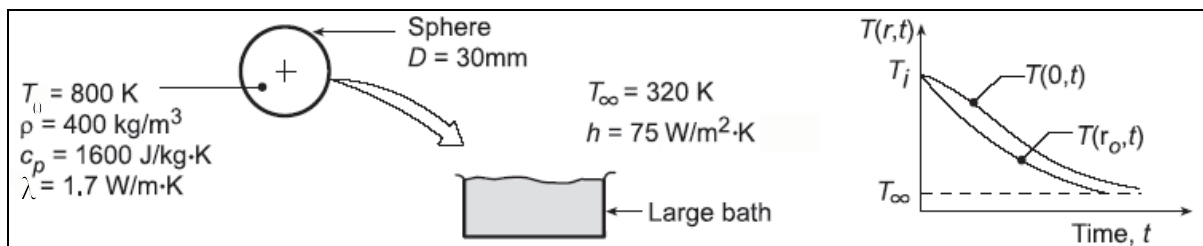


fig. 4.8. - Application 4.3.

Solution :

Calcul du nombre de Biot

$$Bi = \frac{h(V/A)}{\lambda} = \frac{h(r_0/3)}{\lambda} = \frac{75 \times (0.015/3)}{1.7} = 0.22 \Rightarrow Bi > 0.1$$

⇒ La résistance interne est non négligeable ⇒ méthode analytique.

a) Coefficient de transfert imposé en surface (Condition de Newton - Fourier)

[1] ⇒ Utilisation des abaques de Heisler

Pour savoir l'utiliser, il faut d'abord connaître la température au centre de la sphère lorsque sa surface aura atteint 415 K.

$$Bi_r = \frac{h l_c}{\lambda} = \frac{h r_0}{\lambda} = \frac{75 \times 0.015}{1.7} = 0.662 \approx 0.66 \Rightarrow \frac{1}{Bi_r} = 1.51$$

Sur l'abaque donnant la relation entre la température au centre et à la surface ($r/r_0 = 1$), on trouve :

$$\frac{T_{(r_0,t)} - T_\infty}{T_{(0,t)} - T_\infty} = \frac{415 - 320}{T_{(0,t)} - 320} \approx 0.74 \Rightarrow T_{(0,t)} \approx 448 \text{ K}$$

On peut maintenant utiliser l'abaque de Heisler. Avec :

$$\Theta = \frac{T_{(0,t)} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{448 - 320}{800 - 320} = 0.267$$

On recherche le nombre de Fourier (Fo_r) sur l'abaque : $Fo_r \approx 0.87$

Déduction du temps :

$$Fo_r = \frac{a t}{r_0^2} \Rightarrow t = \frac{Fo_r r_0^2}{a} = \frac{Fo_r r_0^2}{\left(\frac{\lambda}{\rho c}\right)} = \frac{0.87 \times 0.015^2}{\left(\frac{1.7}{400 \times 1600}\right)} = 73.7 \text{ s}$$

[2] \Rightarrow Méthode analytique

Comme le nombre de Fourier est supérieur à 0.2, nous pouvons utiliser la formule approximative :

$$\Theta = \frac{T_{(r_0,t)} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \approx A_1 f_1 \exp\left(-\hat{\lambda}_1^2 Fo_r\right) \Rightarrow Fo_r = -\frac{\ln\left(\frac{\Theta}{A_1 f_1}\right)}{\hat{\lambda}_1^2}$$

Avec : $\Theta = \frac{415 - 320}{800 - 320} = 0.198$ et pour un $Bi_r = 0.662$, nous avons, pour $r = r_0$:

$$\begin{cases} A_1 = 1.18773; & \hat{\lambda}_1 = 1.31903 \\ f_1 = \left(\frac{r_0}{\hat{\lambda}_1 r}\right) \sin\left(\frac{\hat{\lambda}_1 r}{r_0}\right) = \left(\frac{1}{1.31903}\right) \times \sin(1.31903) = 0.73423 \end{cases}$$

$$Fo_r = -\frac{\ln\left(\frac{\Theta}{A_1 f_1}\right)}{\hat{\lambda}_1^2} = -\frac{\ln\left(\frac{0.198}{1.18773 \times 0.73423}\right)}{1.31903^2} = 0.852$$

Déduction du temps :

$$t = \frac{Fo_r r_0^2}{a} = \frac{Fo_r r_0^2}{\left(\frac{\lambda}{\rho c}\right)} = \frac{0.852 \times 0.015^2}{\left(\frac{1.7}{400 \times 1600}\right)} = 72.2 \text{ s}$$

Vérification, *a posteriori*, de la pertinence du modèle "corps limités"

$$z_{clt} = d/2 = 0.015 \text{ m} < ? 2.32 \sqrt{a t} = 2.32 \sqrt{\frac{1.7}{400 \times 1600} \times 73.7} = 0.032 \text{ m} \quad (OK)$$

Et donc théorie des corps limités.

b) Flux de chaleur

Donné par la loi de Newton pour la convection. Soit :

$$\dot{q} = h \left(T_{(r_0,t)} - T_{\infty}\right) = 75 \times (415 - 320) = 7125 \text{ W/m}^2$$

c) Energie perdue

[1] \Rightarrow Utilisation des abaques de Heisler

L'énergie perdue par la sphère durant le processus de refroidissement peut être déterminée par les abaques de Gröber.

Avec : $Bi_r = 0.66$ et $Bi_r^2 Fo_r = 0.66^2 \times 0.87 = 0.38$; l'abaque nous donne :

$$\begin{aligned}
Q/Q_0 \approx 0.75 &\Rightarrow Q = 0.75(\rho V c (T_0 - T_\infty)) \\
&= 0.75 \times \left(400 \times \frac{4}{3} \times \pi \times 0.015^3 \times 1600 \times (800 - 320) \right) \\
&= 3257 \text{ J}
\end{aligned}$$

[2] \Rightarrow *Méthode analytique*

Comme le nombre de Fourier est supérieur à 0.2, nous pouvons utiliser la formule approximative :

$$Q/Q_0 \approx 1 - D_1 \exp(-\hat{\lambda}_1^2 Fo_r)$$

Avec : $Fo_r = 0.852$ et $Bi_r = 0.662$

$$\hat{\lambda}_1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Bi_r \\ 0.6 \rightarrow 1.26440 \\ 0.7 \rightarrow 1.35252 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Bi_r \\ 0.662 \rightarrow 1.26986 \end{array} \right.$$

$$D_1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Bi_r \\ 0.6 \rightarrow 0.9994 \\ 0.7 \rightarrow 0.9925 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Bi_r \\ 0.662 \rightarrow 0.9990 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow Q/Q_0 &\approx 1 - 0.990 \exp(-1.26986^2 \times 0.852) \\
&\approx 0.747
\end{aligned}$$

Et donc l'énergie perdue vaut :

$$\begin{aligned}
Q &= Q/Q_0 (\rho V c (T_0 - T_\infty)) \\
&= 0.747 \times \left(400 \times \frac{4}{3} \times \pi \times 0.015^3 \times 1600 \times (800 - 320) \right) \\
&= 3244 \text{ J}
\end{aligned}$$

4.4. Cas particuliers

4.4.1. Cas particuliers de la plaque isolée sur une face

Il est possible d'utiliser les solutions générales du **Chapitre 5** lorsque l'une des faces de la plaque est isolée. En effet lors de l'immersion complète d'une plaque, la surface à $z = 0$ (milieu) est une surface adiabatique.

Exemple : Dans un moteur-fusée (dont les parois ne sont pas refroidies par un réfrigérant), au moment de l'allumage, les parois sont subitement léchées par des gaz chauds : il est nécessaire de calculer la durée de fonctionnement compatible avec des températures de la paroi ne correspondant pas à des contraintes thermiques intolérables. Il faut donc calculer les courbes (t, T) de la paroi.

Les pertes thermiques vers l'extérieur sont généralement négligeables et on peut supposer que la paroi est isolée vers l'extérieur. Si l'épaisseur de la paroi est faible (vis-à-vis de celle de la chambre), on pourra appliquer la théorie du mur, l'épaisseur de la paroi du moteur étant appelée (e (et non $2e$)) dans la théorie précédente ainsi que dans les abaques.

Application 4.4. *Rentrée dans l'atmosphère d'une capsule ou d'une navette spatiale* : pendant combien de temps un objet rentrant dans l'atmosphère peut-il endurer les dures conditions thermiques qui l'accompagnent, sachant que le matériau utilisé ne peut supporter des températures supérieures à 1100°C .

Le nez de la capsule sera assimilé à une plaque de 24 mm d'épaisseur, en acier spécial. ($\lambda = 42\text{ W/mK}$; $c = 420\text{ J/kgK}$; $\rho = 8000\text{ kg/m}^3$), initialement à la température uniforme de 40°C . Il n'y a pas de refroidissement interne. L'air entourant la paroi sera pris en première approximation à 2200°C , tandis qu'on choisira pour h , la valeur de $2800\text{ W/m}^2\text{K}$. L'échange thermique par rayonnement est supposé inclus dans l'évaluation du coefficient d'échange h .

Solution :

Hypothèse :

On ramène ce problème au modèle du mur de demi-épaisseur e égale à 24 mm , dont l'une des faces est adiabatique et l'autre soumise brusquement aux paramètres convectifs ($T_f = 2200^\circ\text{C}$,

$$h = 2800\text{ W/m}^2\text{K}$$

Calcul du nombre de Biot

Dans ce cas $V/A = e$.

$$Bi = \frac{h(V/A)}{\lambda} = \frac{he}{\lambda} = \frac{2800 \times 0.024}{42} = 1.6 \Rightarrow Bi > 0.1$$

\Rightarrow La résistance interne est non négligeable \Rightarrow méthode analytique.

Vérification de l'hypothèse : solide semi-infini

On demande la température de paroi interne, l'hypothèse des milieux semi-infinis n'est pas valable. D'où : milieux limités.

Plaque infinie avec condition de Newton-Fourier

$$\Theta = \frac{T_{(z,t)} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\hat{\lambda}_n^2 Fo_r) f_n$$

On suppose que $Fo_r \geq 0.2$. On ne prendra que 1! terme (vérification à posteriori).

$$\Theta = \frac{T_{(z,t)} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \approx A_1 f_1 \exp(-\hat{\lambda}_1^2 Fo_r) \Rightarrow Fo_r = -\frac{\ln\left(\frac{\Theta}{A_1 f_1}\right)}{\hat{\lambda}_1^2}$$

Avec : $\Theta = \frac{1100 - 2200}{40 - 2200} = 0.5093$ et pour un $Bi_r = Bi = 1.6$, nous avons dans les tables :

$$\begin{cases} A_1 = 1.1593; & \hat{\lambda}_1 = 1.00842 \\ f_1 = \cos\left(\frac{\hat{\lambda}_1 z}{e}\right) & \begin{cases} \Rightarrow \text{en surface : } z = e \Rightarrow f_1 = 0.53320 \\ \Rightarrow \text{sur la surface adiabatique : } z = 0 \Rightarrow f_1 = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Paroi extérieure :

$$Fo_r = -\frac{\ln\left(\frac{\Theta}{A_1 f_1}\right)}{\hat{\lambda}_1^2} = -\frac{\ln\left(\frac{0.5093}{1.1593 \times 0.53320}\right)}{1.00842^2} = 0.1906$$

Comme $Fo_r < 0.2$ il faudrait prendre plusieurs termes...

Déduction du temps :

avec :

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} = \frac{42}{8000 \times 420} = 1.25 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

et, dans notre cas :

$$l_c = e$$

$$\Rightarrow Fo_r = \frac{a t}{e^2} \Rightarrow t = \frac{Fo_r e^2}{a} = \frac{0.1906 \times 0.024^2}{1.25 \cdot 10^{-5}} = 8.8 \text{ s}$$

Paroi adiabatique :

Température à la paroi pour $t = 8.8 \text{ s}$:

$$\begin{aligned} \frac{T_{(0,8.8s)} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} &\approx A_1 f_1 \exp(-\hat{\lambda}_1^2 Fo_r) = 1.1593 \times 1 \times \exp(-1.00842^2 \times 0.1906) \\ &= 0.955 \\ \Rightarrow T_{(0,8.8s)} &= 0.955 \times (40 - 2200) + 2200 = 137.2 \text{ } ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

4.4.2. Utilisation des conditions de Newton-Fourier pour une condition de Dirichlet

Il est possible d'utiliser les formules du § 4.3. concernant les milieux limités (coefficient de transfert imposé en surface (Condition de Newton - Fourier)) pour les milieux limités avec condition de Dirichlet.

En effet, lorsqu'une température est imposée sur une surface, c'est l'équivalent de poser un nombre de Biot infini (∞) ($Bi > 100$) dans les équations (ou les abaques de Heisler !). La condition de Dirichlet, température imposé en surface, revient à avoir un coefficient de convection h égal à l'infini.

Application 4.5. On veut calculer l'épaisseur à donner à un mur pare-feu en amiante (placé entre 2 minces feuilles d'acier à négliger dans le problème) en se fixant une protection pendant une heure sur la base suivante :

- ▶ la température en surface, côté "feu", est supposé être de $900\text{ }^\circ\text{C}$ dès le début de l'incendie;
 $T_0 = 28\text{ }^\circ\text{C}$;
- ▶ la température du côté opposé ne peut dépasser $115\text{ }^\circ\text{C}$ durant cette période.

La diffusivité thermique de l'amiante est de $a = 10\text{ cm}^2/h$.

Solution :

Hypothèses :

- 1) $Bi \rightarrow \infty$ car condition de Dirichlet.
- 2) Solide semi-infini :
Hypothèse à rejeter puisque la surface adiabatique sera perturbée (température différente de la température initiale).

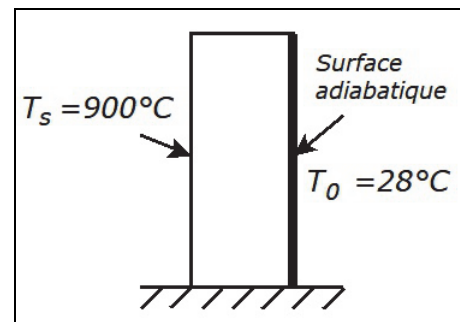


fig. 4.13. - Application 4.5.

1^{ère} approche : milieu limité avec condition de Dirichlet

Soit $For > 0.2 \Rightarrow$ 1! terme (hypothèse)

Nous sommes en $z = 0$

$$\frac{T_{(z,t)} - T_s}{T_0 - T_s} = \frac{4}{\pi} \exp\left(-(\pi/2)^2 For\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow For = \ln\left(\frac{\pi}{4} \frac{T_{(z,t)} - T_s}{T_0 - T_s}\right) \left(-\frac{4}{\pi^2}\right) = \ln\left(\frac{\pi}{4} \frac{115 - 900}{28 - 900}\right) \left(-\frac{4}{\pi^2}\right)$$

$$= 0.1405$$

Comme $For < 0.2$ en principe plusieurs termes...

$$For = \frac{a t}{l_c^2} \Rightarrow l_c = e_{plaque} = \sqrt{\frac{a t}{For}} = \sqrt{\frac{10 \times 1}{0.1405}} = 8.44\text{ cm}$$

2^{ème} approche : milieu limité avec condition de Newton-Fourier avec $Bi = \infty$

Soit $For > 0.2 \Rightarrow$ 1! terme (hypothèse)

Nous sommes en $z = 0$

$$\Theta = \frac{T_{(z,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \approx A_1 f_1 \exp\left(-\hat{\lambda}_1^2 Fo'\right)$$

Recherche de coefficients pour un $Bi = \infty$

$$\begin{cases} A_1 = 1.2732; & \hat{\lambda}_1 = 1.57080 \\ f_1 = \cos\left(\hat{\lambda}_1 \frac{z}{L}\right) = 1 \text{ (pour } z = 0) \end{cases}$$

$$T_\infty \rightarrow T_s = 900^\circ C$$

$$\Rightarrow Fo_r = -\frac{1}{\hat{\lambda}_1^2} \ln\left(\frac{\Theta}{A_1 f_1}\right) = -\frac{1}{1.57080^2} = 0.1405$$

Et donc : $e = 8.44 \text{ cm}$

3^{ème} approche : abaque de Heisler avec $Bi = Bi_r = \infty$

$$Bi_r = \infty \Rightarrow \frac{1}{Bi_r} = 0$$

$$\frac{T_c - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{115 - 900}{28 - 900} = 0.90$$

Lecture sur l'abaque : $Fo_r \approx 1.4$

Et donc : $e = 8.44 \text{ cm}$

Conclusions

Les résultats des différentes méthodes sont très cohérents.

4.4.3. Utilisation de la méthode des milieux limités en lieu et place de la méthode du gradient nul

La méthode du gradient nul n'est en fait qu'un cas particulier de la théorie des milieux limités. Cette dernière théorie est évidemment toujours valable. La méthode du gradient nul n'est qu'une approximation.

Application 4.6. Un axe en acier au carbone (AISI 1010) de 0.1 m de diamètre est chauffé, en vue d'un traitement thermique, dans un four à gaz. Ceux-ci sont à une température de 1200 K et on considère le coefficient de convection égal à 100 W/m²K. Si l'axe est introduit dans le four à une température de 300 K, quel temps faudra-t'il pour que la température à coeur atteigne 800 K ?

Propriétés du AISI 1010 ($\bar{T} = 550 \text{ K}$) : $\rho = 7832 \text{ kg/m}^3$; $\lambda = 51.2 \text{ W/mK}$; $c = 541 \text{ J/kgK}$;
 $a = 1.21 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

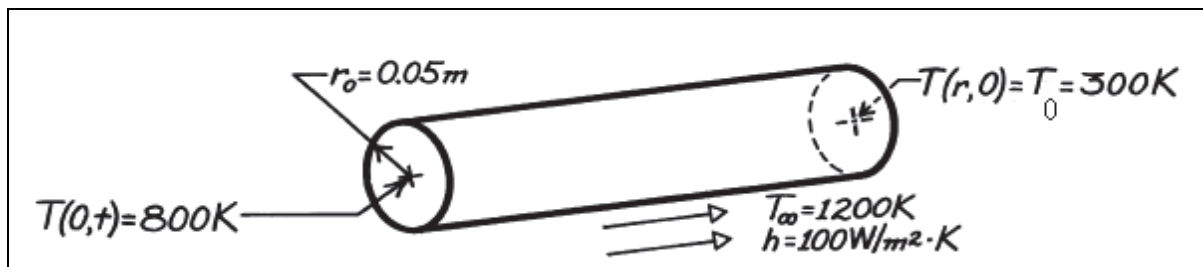


fig. 4.15. - Application 4.6.

Solution :

Hypothèses :

- 1) Conduction unidimensionnel ($l \gg r_0$)
- 2) Propriétés du matériaux constants.

Calcul du nombre de Biot

$$Bi = \frac{h(V/A)}{\lambda} = \frac{100 \times (0.1/4)}{51.2} = 0.0488 \Rightarrow Bi < 0.1$$

La résistance interne est négligeable.

Prenons la formule de la méthode du gradient nul

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp(-t/\tau) \Rightarrow t = -\tau \ln\left(\frac{T(t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right)$$

Calcul de τ

$$\tau = \frac{m c}{h A} = \frac{\rho c}{h} \left(\frac{V}{A}\right) = \frac{7832 \times 541}{100} \times \left(\frac{0.1}{4}\right) = 1059.3 \text{ s}$$

Calcul du temps

$$t = -\tau \ln\left(\frac{T(t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right) = -1059.3 \times \ln\left(\frac{800 - 1200}{300 - 1200}\right) = 859 \text{ s}$$

Méthode des corps limités avec coefficient de transfert imposé en surface

Vérifions si nous pouvons ne prendre qu'un seul terme (sur base du résultat obtenu par la méthode du gradient nul, autrement il aurait fallu le vérifier à posteriori)

$$Fo_r = \frac{a t}{r_0^2} = \frac{1.2110^{-5} \times 859}{0.05^2} = 4.16 > 0.2 \Rightarrow \text{OK ! terme}$$

$$\Theta = \frac{T_{(r,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \approx A_1 f_1 \exp(-\hat{\lambda}_1^2 Fo_r)$$

Recherche des différents coefficients (*Annexe 6.*) :

$$Bi_r = \frac{h r_0}{\lambda} = \frac{100 \times 0.05}{51.2} = 0.09766$$

$$\hat{\lambda}_1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Bi_r \\ 0.08 \rightarrow 0.39603 \\ 0.10 \rightarrow 0.44168 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Bi_r \\ 0.09766 \rightarrow 0.43634 \end{array} \right. \hat{\lambda}_1$$

$$f_1 \Rightarrow f_1 = J_0\left(\hat{\lambda}_1 \frac{r}{r_0}\right) = J_0(0) = 1 \text{ (Voir table des fonctions de Bessel *Annexe 4.*)}$$

$$A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{2 J_1(\hat{\lambda}_1)}{\hat{\lambda}_1 (J_0^2(\hat{\lambda}_1) + J_1^2(\hat{\lambda}_1))}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\lambda}_1 \\ 0.4 \rightarrow 0.96040 \\ 0.5 \rightarrow 0.93847 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{\lambda}_1 \\ 0.43634 \rightarrow 0.95243 \end{array} \right. J_0(\hat{\lambda}_1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\lambda}_1 \\ 0.4 \rightarrow 0.19603 \\ 0.5 \rightarrow 0.24227 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{\lambda}_1 \\ 0.43634 \rightarrow 0.21283 \end{array} \right. J_1(\hat{\lambda}_1)$$

$$A_1 = \frac{2 \times 0.21283}{0.43634 \times (0.95243^2 + 0.21283^2)} = 1.0243$$

$$Fo_r = -\frac{1}{\hat{\lambda}_1^2} \ln\left(\frac{T_{(r,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \frac{1}{A_1 f_1}\right) = -\frac{1}{0.43634^2} \ln\left(\frac{800 - 1200}{300 - 1200} \times \frac{1}{1.0243 \times 1}\right)$$

$$= 4.385$$

Déduction du temps :

$$Fo_r = \frac{a t}{r_0^2} \Rightarrow t = \frac{Fo_r r_0^2}{a} = \frac{4.385 \times 0.05^2}{1.2110^{-5}} = 906 \text{ s}$$

Remarque

La méthode du gradient nul sous-estime la valeur du temps.

4.5. Cas particulier : source de chaleur interne constante

4.5.1. Relation en température

Ci-après les différentes solutions pour le problème en transitoire de la plaque, cylindre et sphère initialement à température uniforme T_0 et soumis à $t > 0$ à une source interne uniforme et constante \dot{q}_v (en W/m^3) et à des conditions aux limites de Fourier (h, T_∞).

$$C.I. \quad \left. \begin{array}{l} T_{(z,0)} \left\langle \text{ou } T_{(r,0)} \right\rangle = T_0 \quad \text{et} \\ -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=L} \left\langle \text{ou } -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} \right\rangle = h \left(T_{(z,t)} - T_\infty \right) \left\langle \text{ou } h \left(T_{(r,t)} - T_\infty \right) \right\rangle \end{array} \right\}$$

On peut montrer que, ici aussi, les 3 solutions sont du même type, soit :

{Réf. 2A}

$$\Theta = \frac{T_{(z,t)} - T_0}{T_\infty - T_0} \left\langle \text{ou } \frac{T_{(r,t)} - T_0}{T_\infty - T_0} \right\rangle = 1 + C_n - \sum_{n=1}^{\infty} B_n A_n f_n \exp\left(-\hat{\lambda}_n^2 Fo_r\right) \quad (\text{éq. 4.166.})$$

	B_n	C_n
A) <u>Plaque infinie</u>	$1 + \frac{\dot{q}_v l^2}{\lambda (T_\infty - T_0) \hat{\lambda}_n^2}$	$\frac{1}{2} \frac{\dot{q}_v l^2}{\lambda (T_\infty - T_0)} \left(1 - \frac{z^2}{l^2} + \frac{2\lambda}{hl} \right)$
B) <u>Cylindre infini</u>	$1 + \frac{\dot{q}_v r_0^2}{\lambda (T_\infty - T_0) \hat{\lambda}_n^2}$	$\frac{1}{4} \frac{\dot{q}_v r_0^2}{\lambda (T_\infty - T_0)} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} + \frac{2\lambda}{hr_0} \right)$
C) <u>Sphère</u>	$1 + \frac{\dot{q}_v r_0^2}{\lambda (T_\infty - T_0) \hat{\lambda}_n^2}$	$\frac{1}{6} \frac{\dot{q}_v r_0^2}{\lambda (T_\infty - T_0)} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} + \frac{2\lambda}{hr_0} \right)$

Tableau 3. - Valeurs des différents coefficients.

Concernant les coefficient A_n, f_n et $\hat{\lambda}_n$, voir **Annexe 6**.

On remarquera que si $\dot{q}_v = 0$, on retrouve bien les équations **éq. 4.63**.

Application 4.7. Considérons une tranche de steak, à une température initiale T_0 et d'épaisseur e , mis à cuire dans un four à micro-ondes. Déterminez :

- 1) le temps pour que le centre du steak atteigne $71\text{ }^\circ\text{C}$;
- 2) la température en surface à ce moment.

Données pratiques :

Caractéristiques du steak de 350 g, assimilé à de l'eau : $\lambda = 0.6\text{ W/mK}$; $\rho = 998\text{ kg/m}^3$; $c = 4186\text{ J/kgK}$; $T_0 = 20\text{ }^\circ\text{C}$; $e = 16\text{ mm}$. Puissance du four à micro-onde : 650 W.

On considérera que la température de l'air à l'intérieur du four comme constante et égale à $25\text{ }^\circ\text{C}$.

La convection, à l'intérieur de four, pourra être prise à $h = 5\text{ W/m}^2\text{K}$.

Solution :

Hypothèse :

On considérera que chauffer au moyen d'un micro-onde équivaut à une source de chaleur interne.

Calcul du nombre de Biot

$$Bi = \frac{h(V/A)}{\lambda} = \frac{5 \times (16 \cdot 10^{-3} / 2)}{0.6} = 0.0667 \Rightarrow Bi < 0.1$$

La résistance interne est négligeable, on pourrait donc prendre la méthode du gradient nul. Cependant, on demande la température en surface alors que la température au centre vaut $71\text{ }^\circ\text{C}$. On prendra donc les milieux limités pour plus de précision.

Méthode des corps limités avec source de chaleur interne constante

- 1) Temps pour que le centre du steak atteigne $71\text{ }^\circ\text{C}$:

$$\dot{q}_v = \frac{Q}{(m/\rho)} = \frac{650}{(0.35/998)} = 1853429\text{ W/m}^3$$

Hypothèse : $Fo > 0.2 \Rightarrow 1^{\text{er}} \text{ terme}$ (à vérifier a posteriori)

$$\Theta = \frac{T_{(z,t)} - T_0}{T_\infty - T_0} = 1 + C_1 - B_1 A_1 f_1 \exp(-\hat{\lambda}_1^2 Fo_r) \Rightarrow Fo_r = -\frac{1}{\hat{\lambda}_1^2} \ln\left(\frac{1 + C_1 - \Theta}{B_1 A_1 f_1}\right)$$

Recherche des différents coefficients (**Annexe 6.**) :

$$\hat{\lambda}_1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Bi_r \quad \hat{\lambda}_1 \\ 0.06 \rightarrow 0.24253 \\ 0.08 \rightarrow 0.27913 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Bi_r \quad \hat{\lambda}_1 \\ 0.0667 \rightarrow 0.25473 \end{array} \right.$$

$$f_1 \Rightarrow \text{en } z=0 \Rightarrow f_1 = \cos\left(\hat{\lambda}_1 \frac{z}{l}\right) = 0$$

$$A_1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Bi_r \quad A_1 \\ 0.06 \rightarrow 1.0098 \\ 0.08 \rightarrow 1.0130 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Bi_r \quad A_1 \\ 0.0667 \rightarrow 1.010867 \end{array} \right.$$

$$B_1 \Rightarrow 1 + \frac{\dot{q}_v l^2}{\lambda (T_\infty - T_0) \hat{\lambda}_1^2} = 1 + \frac{1853429 \times (8 \cdot 10^{-3})^2}{0.6 (25 - 20) 0.25473^2} = 610.3606$$

$$C_1 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\dot{q}_v l^2}{\lambda (T_\infty - T_0)} \left(1 - \frac{z^2}{l^2} + \frac{2\lambda}{hl} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{1853429 \times (8 \cdot 10^{-3})^2}{06(25 - 20)} \left(1 - 0 + \frac{2 \times 0.6}{5 \times 8 \cdot 10^{-3}} \right) = 612.8672$$

Dès lors :

$$Fo_r = 0.33651 = \frac{a t}{(V/A)^2} = \frac{\lambda t}{\rho c (e/2)^2} \quad (Fo > 0.2 \Rightarrow \text{1! terme Ok})$$

$$\Rightarrow t = \frac{Fo_r \rho c (e/2)^2}{\lambda} = \frac{0.33651 \times 998 \times 4186 \times 8 \cdot 10^{-3}}{0.6}$$

$$\Rightarrow t = 149.95 \approx 150 \text{ s} = 2.5 \text{ min}$$

2) Ta température en surface en $t = 150 \text{ s}$:

Recherche des différents coefficients (**Annexe 6**) :

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_1 = 0.25473 \\ f_1 = \cos\left(\hat{\lambda}_1 \frac{z}{l}\right) \text{ en } z = l \Rightarrow f_1 = 0.967731 \\ B_1 = 610.3606 \\ C_1 = 593.0973 \end{cases}$$

$$\Theta = \frac{T_{(z,t)} - T_0}{T_\infty - T_0} = 1 + C_1 - B_1 A_1 f_1 \exp\left(-\hat{\lambda}_1^2 Fo_r\right)$$

$$\Rightarrow T_{(8 \text{ mm}, 150 \text{ s})} = (T_\infty - T_0) \left(1 + C_1 - B_1 A_1 f_1 \exp\left(-\hat{\lambda}_1^2 Fo_r\right) \right) + T_0$$

$$\Rightarrow T_{(8 \text{ mm}, 150 \text{ s})} = 69.55^\circ \text{ C}$$

Conclusion

La température de surface est très proche de 71° C et qui confirme que l'on aurait pu utiliser la méthode du gradient nul.

Cependant, en utilisant la méthode du gradient nul avec source de chaleur interne (Voir **Chapitre 2**), on obtient un temps $t \approx 1.93 \text{ min}$ pour atteindre cette température de 71° C . La méthode du gradient nul sous-estime la valeur du temps.