CHAPITRE 5 : MÉTHODE DES QUADRIPÔLES

{Réf. 10}

5.1. *Introduction*

L'équation de la chaleur simplifiée est une équation aux dérivées partielles linéaires du type parabolique. On pourra ainsi obtenir la solution générale d'un problème thermique en superposant linéairement des solutions particulières.

Des solutions analytiques ont été obtenues lorsque la température ne dépend que d'une seule variable d'espace, soit d'une façon rigoureuse (*problème du mur*), soit d'une façon approchée (*problème de la barre*).

5.2. *Ecoulement unidirectionnel dans les murs plans*

5.2.1. Mur simple

Nous avons pu remarquer que nous pouvions associer un quadripôle thermique à une situation particulière.

Cependant, nous remarquerons que les "éléments" constituant ce quadripôle sont des éléments de "base" : résistance, capacité. Si nous passons à la généralité, nous devrions associer des "impédances".

Nous allons expliciter la démarche pour un mur d'épaisseur e sans source de chaleur interne et à l'équilibre thermique à l'instant initial.

Nous avons donc : $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\,\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ avec, dans ce cas-ci : $T = 0$ à $t = 0$.

Appelons :

- θ_e et θ_s les transformés de Laplace [1] des températures T en $z = 0$ et T en $z = e$;
- Φ_e et Φ_s les transformés de Laplace des flux $\dot{Q}$ en $z = 0$ et $\dot{Q}$ en $z = e$.

De façon générale, le problème étant linéaire, il existe une relation linéaire entre les grandeurs d'entrées θ_e et Φ_e et les grandeurs de sorties θ_s et Φ_s, soit :

$$\begin{bmatrix} \theta_e \\ \Phi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_s \\ \Phi_s \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \theta_e = A\,\theta_s + B\,\Phi_s \\ \Phi_e = C\,\theta_s + D\,\Phi_s \end{cases}$$

où la matrice $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ est la matrice de transfert inverse du quadripôle associé au mur.

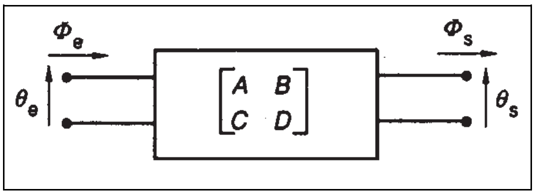


fig. 5.1. - Quadripôle d'un mur passif.

L'équation de la chaleur simplifiée devient après transformée de Laplace, sachant que : $\dfrac{\partial T}{\partial t} = s\,\theta$ si les conditions initiales sont nulles et s variables de Laplace.

---

[1] *Laplace, Pierre-Simon (1749 - 1827) : mathématicien, astronome et physicien français.*

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{a}\,\theta = \frac{d^2\theta}{d\,z^2}}$$

Dont la solution est : $\theta = C_1 \sinh(\alpha\, z) + C_2 \cosh(\alpha\, z)$ avec : $\alpha^2 = \dfrac{s}{a}$

A la température T, on associe le flux $\dot{Q}$: $\dot{Q} = -\,\lambda\,A\,\dfrac{\partial T}{\partial z}$

Après transformation de Laplace : $\Phi = -\,\lambda\,A\,\dfrac{d\theta}{dz}$

Nous trouvons aisément que :
$$\boxed{\begin{cases} \theta_e = \cosh(\alpha\, e)\,\theta_s + \dfrac{1}{\lambda\,A}\,\dfrac{\sinh(\alpha\, e)}{\alpha}\,\Phi_s \\ \Phi_e = \lambda\,A\,\alpha\,\sinh(\alpha\, e)\,\theta_s + \cosh(\alpha\, e)\,\Phi_s \end{cases}}$$
(éq. 5.20.)

avec :
$$\begin{cases} A = D = \cosh(\alpha\, e) \\ B = \dfrac{1}{\lambda\,A}\,\dfrac{\sinh(\alpha\, e)}{a} \\ C = \lambda\,A\,\alpha\,\sinh(\alpha\, e) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cosh(\alpha\, e) & \dfrac{1}{\lambda\,A}\,\dfrac{\sinh(\alpha\, e)}{a} \\ \lambda\,A\,\alpha\,\sinh(\alpha\, e) & \cosh(\alpha\, e) \end{bmatrix}$$
(éq. 5.21.)

Le système étant symétrique et passif, il existe bien deux relations entre les termes de la matrice :
$$\begin{cases} A = D & (Système\ symétrique) \\ A\,D - B\,C = 1 & (Système\ passif) \end{cases}$$

En pratique, ces quadripôles s'utilisent comme en électricité, soit par association de matrices (en cascade ou en parallèle), soit par association d'impédances. En effet, un quadripôle passif peut toujours se représenter par trois impédances en T ou en π.

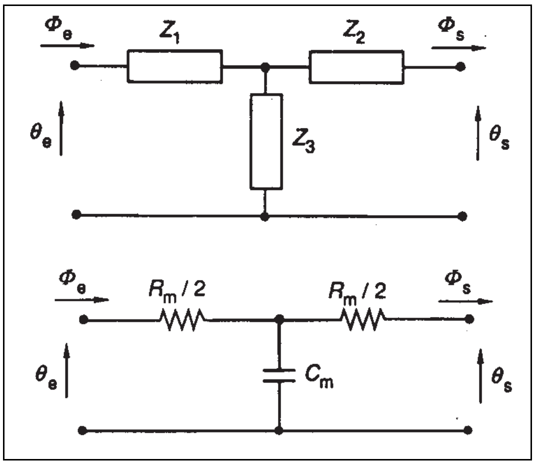


fig. 5.2. - *Représentation impédance et approximation pour les états quasi stationnaires*

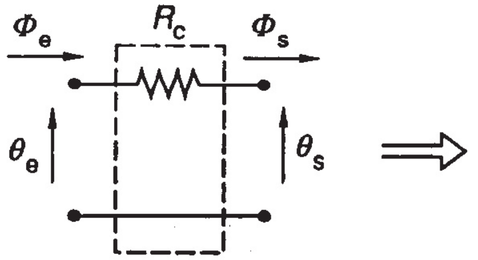
Dans le cas général de quadripôle passif :
$$\left\{ Z_3 = \frac{1}{C};\ Z_1 = \frac{A-1}{C};\ Z_2 = \frac{D-1}{C} \right\}$$

Dans le cas du mur :
$$\begin{cases} Z_1 = Z_2 = \dfrac{\cosh(\alpha\, e) - 1}{\lambda\,A\,\alpha\,\sinh(\alpha\, e)} \\ Z_3 = \dfrac{1}{\lambda\,A\,\alpha\,\sinh(\alpha\, e)} \end{cases}$$

Dans la limite de perturbation périodique de faible fréquence, ou pour des temps suffisamment longs, c'est-à-dire lorsque la nombre de Fourier associé est grand ($Fo = {}^{a\,t}\!/_{e^2} >> 1 \quad soit \quad \alpha\, e \to \infty$), on retrouve la schéma classique de la figure ***(fig. 5.2.)***, en effet :
$$\begin{cases} Z_1 = Z_2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{e}{2\,\lambda\,A} = \dfrac{R_m}{2} \\ \quad Z_3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{\rho\,c\,e\,A\,s} = \dfrac{1}{C_m\,s} \end{cases}$$

5.2.2. Résistance de contact (Quadripôle associé à un contact solide-solide)

La représentation des contacts thermiques en régimes transitoires fait appel à des modèles plus ou moins complexes qu'il est toujours possible d'interpréter en terme de quadripôle; dans la plupart des cas, le modèle résistif est suffisant. Avec dans ce cas : $R_c = R_{Conduction} = \dfrac{e}{\lambda\, A}$



$$\begin{bmatrix} 1 & R_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

fig. 5.3. - Quadripôle résistance.

5.2.3. Mur avec échange convectif (Quadripôle associé aux conditions aux limites de Fourier)

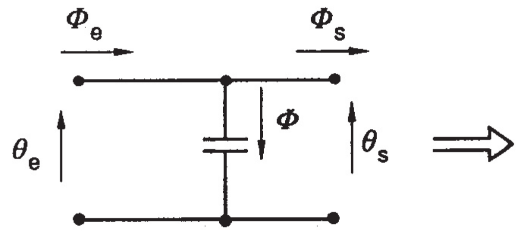
La représentation est identique au modèle résistif de contact. Et dans ce cas :

$$R_c = R_{convection} = \frac{1}{h\, A}$$

5.2.4. Mur à température uniforme (Quadripôle associé à la capacité)

Le mur à température uniforme implique, comme nous l'avons vu, un nombre de $Biot < 0.1$.

Après transformation de Laplace, l'expression ($\dot{Q} = m\,c\,\dfrac{dT}{dt}$) devient : $\Phi = m\,c\,s\,\theta$, et le quadripôle associé ($\Phi_e - \Phi_s = m\,c\,s\,\theta$) :



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ mc\,s & 1 \end{bmatrix}$$

fig. 5.4. - Quadripôle capacité.

> ***Application 5.1.*** Trouver l'équation d'un solide refroidit uniquement par convection par la méthode des analogies ainsi que par la méthode des quadripôles. On supposera que le solide possède une température uniforme ($Bi < 0.1$).

Solution :

A) *Analogies*

Considérons un solide de surface latérale A, soumise à un flux $\dot{Q}_e$, présentant une température uniforme T, refroidie uniquement par l'air ambiant T_∞.

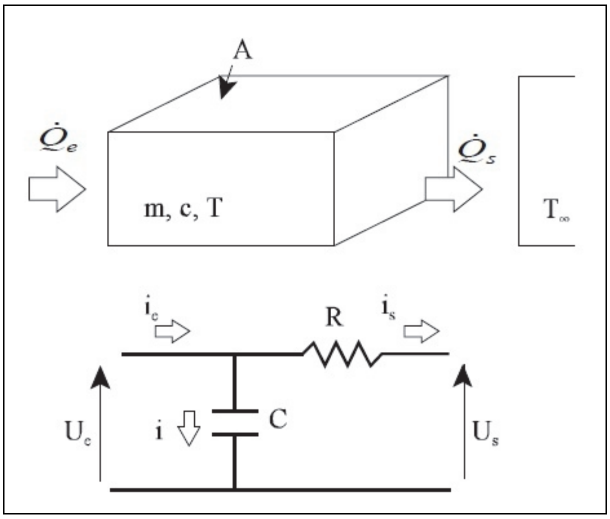


fig. 5.5. - Modèle thermique élémentaire.

Nous pouvons modéliser ce solide par une "*capacité*" et le refroidissement convectif par une "*résistance*". Le *flux d'entrée* représente la puissance thermique générée au sein de la pièce. Il n'y a donc pas de "*résistance*" d'entrée.

Dès lors on peut écrire les équations suivantes :

a) Equation électriques :

$$\begin{cases} i \rightarrow i_e - i_s = C \dfrac{dU}{dt} \\ U \rightarrow U_e - U_s = R\, i_s \end{cases}$$

b) Equations thermiques :

$$\begin{cases} \dot{Q} \rightarrow \dot{Q}_e - \dot{Q}_s = m\, c \dfrac{dT}{dt} \\ T \rightarrow T_e - T_s = \dfrac{1}{h\, A} \dot{Q}_s \end{cases}$$

et si on remplace la seconde dans la première, on obtient :

$$\dot{Q}_e - \left(T_e - T_s\right) h\, A = m\, c \frac{dT}{dt}$$

avec : T_e : variable T (température du solide)
T_s : température ambiante T_∞ (supposée constante)

$$\dot{Q}_e = \left(T - T_\infty\right) h\, A + m\, c \frac{dT}{dt}$$

L'équation générale devient :

$$\boxed{\tau \frac{dT}{dt} + T = T_\infty + \frac{1}{h\, A} \dot{Q}_e} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{m\, c}{h\, A}}$$

Notations :	τ	constante de temps thermique	s
	A	section	m^2
	c	chaleur massique	J/kgK
	h	coefficient de convection	W/m^2K

Dans le cas particulier du *régime permanent* ($\frac{dT}{dt} = 0$) :

$$\boxed{T_{(t \to \infty)} = T_\infty + \frac{1}{h\,A}\dot{Q}_e}$$

B) *Quadripôles*

L'équation du quadripôle devient dans ce cas précis :

$$\begin{bmatrix} \theta_e \\ \Phi_e \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ mc\,s & 1 \end{bmatrix}}_{\textit{Quadripôle capacité}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{h\,A} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\textit{Quadripôle résistance}} \begin{bmatrix} \theta_s \\ \Phi_s \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \theta_c = \theta_s + \frac{1}{h\,A}\Phi_s \\ \Phi_c = mc\,s\,\theta_s + \Phi_s \end{cases}$$

et si on remplace la seconde dans la première, on obtient : $\Phi_e = mc\,s\,\theta_s + \left(\theta_e - \theta_s\right) hA$

Avec les transformées de Laplace inverses : $\dot{Q}_e = mc\frac{dT}{dt} + \left(T_e - T_s\right) hA$

avec : T_e → T température du solide
T_s → T_∞ température ambiante (supposée constante)

L'équation générale devient :

$$\boxed{\tau\frac{dT}{dt} + T = T_\infty + \frac{1}{h\,A}\dot{Q}_e} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{m\,c}{h\,A}}$$
