

CHAPITRE 6 : CONDUCTION MULTIDIRECTIONNELLE EN RÉGIME VARIABLE

.....	- 6.1 -
6.1. Produit de solutions unidirectionnelles	- 6.1 -
6.1.1. Introduction	- 6.1 -
6.1.2. Cas particulier : $ Fo_r $ supérieur à 0.2	- 6.3 -

CHAPITRE 6 : CONDUCTION MULTIDIRECTIONNELLE EN RÉGIME VARIABLE

6.1. Produit de solutions unidirectionnelles

6.1.1. Introduction

Certains problèmes bi- ou tridimensionnels peuvent être résolus par combinaison de 2 ou 3 solutions mono-dimensionnelles. Considérons par exemple le cas d'une barre rectangulaire infinie (longueur très grande devant les côtés $2L$ et $2H$), elle peut être considérée comme l'intersection de plaques infinies d'épaisseurs respectives $2L$ et $2H$. Le théorème de von Neumann ⁽¹⁾ permet d'affirmer que la température adimensionnelle de cette barre s'exprime comme le produit des températures adimensionnelles des deux plaques infinies dont elle peut être considérée comme étant l'intersection.

$$\left[\frac{T_{(x,y,t)} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right]_{\text{barre } 2L \times 2H} = \left[\frac{T_{(x,t)} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right]_{\text{plaque } 2L} \times \left[\frac{T_{(y,t)} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right]_{\text{plaque } 2H}$$

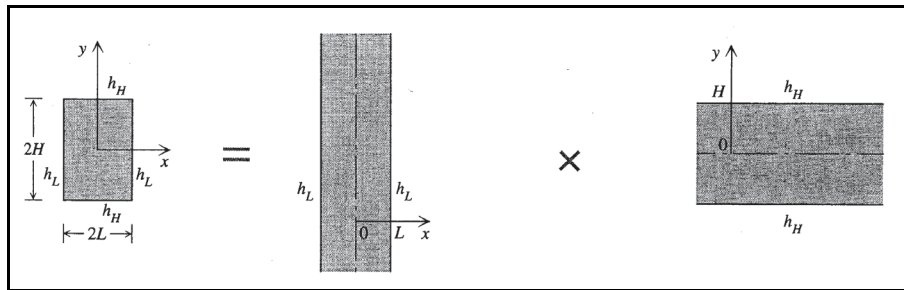


fig. 5.1. - Exemple de produit de solutions unidirectionnelles.

Remarque :

Il faut vérifier que les conditions initiales aux limites sont satisfaites sous forme adimensionnelle après décomposition de la géométrie considérée en intersection d'éléments simples.

Des géométries plus complexes peuvent également se décomposer en intersection d'éléments simples, comme par exemple :

- a) Cylindre hauteur $2L$ = Cylindre infini \cap Plaque épaisseur $2L$

$$\left[\frac{T_{(r,x,t)} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right]_{\text{petit cylindre } 2L \times r_0} = \left[\frac{T_{(r,t)} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right]_{\text{long cylindre } r_0} \times \left[\frac{T_{(x,t)} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right]_{\text{plaque } 2L}$$

⁽¹⁾ John von Neumann (né Neumann János) (1903-1957) : mathématicien et physicien américain d'origine hongroise.

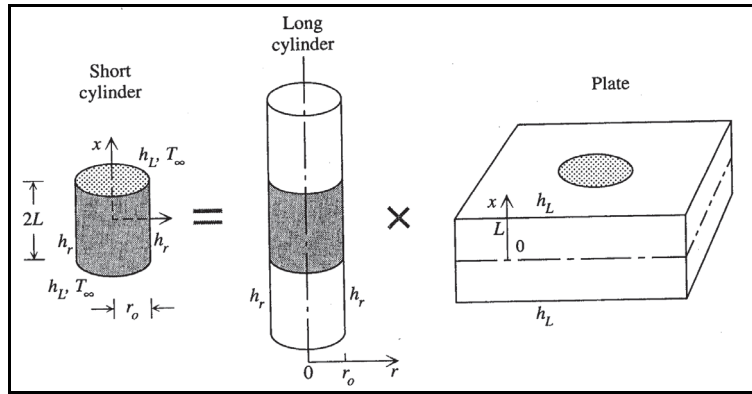


fig. 5.2. - Cylindre court.

b) Parallélépipède rectangle $2L \times 2H \times 2W =$ Plaque épaisseur $2L \cap$ Plaque épaisseur $2H \cap$ Plaque épaisseur $2W$

$$\left[\frac{T(x, y, z, t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right]_{\text{parallélépipède } 2L \times 2H \times 2W} = \left[\frac{T(x, t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right]_{\text{plaque } 2L} \times \left[\frac{T(y, t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right]_{\text{plaque } 2H} \times \left[\frac{T(z, t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right]_{\text{plaque } 2W}$$

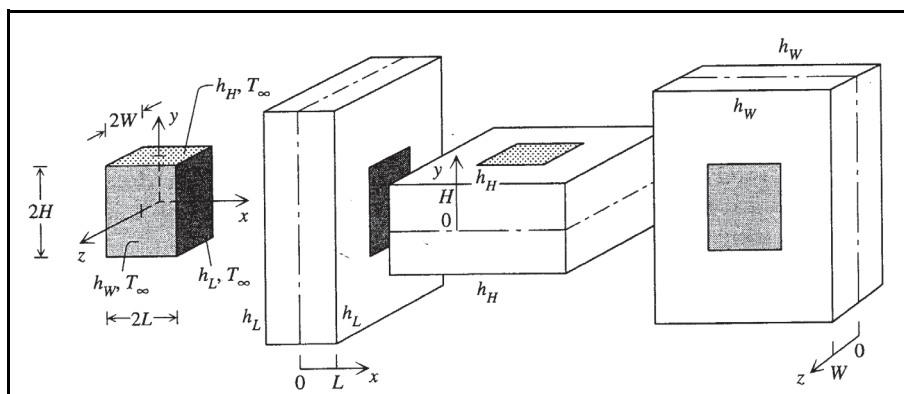


fig. 5.3. - Cube.

c) Plaque semi-infinie = Plaque infinie \cap Milieu semi-infini

$$\left[\frac{T(x, y, t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right]_{\text{plaque semi-infinie } 2L} = \left[\frac{T(x, t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right]_{\text{plaque infinie } 2L} \times \left[\frac{T(y, t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right]_{\text{milieu semi-infini } y}$$

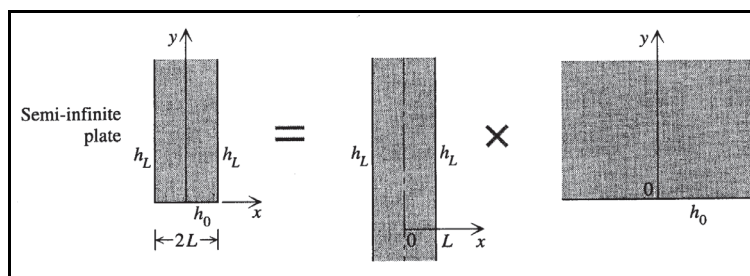


fig. 5.4. - Plaque semi-infinie.

d) Cylindre semi-infini = Cylindre infini \cap Milieu semi-infini

$$\left[\frac{T_{(r,x,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right]_{\text{cylindre semi-infini } r_0} = \left[\frac{T_{(r,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right]_{\text{cylindre infini } r_0} \times \left[\frac{T_{(x,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right]_{\text{milieu semi-infini } x}$$

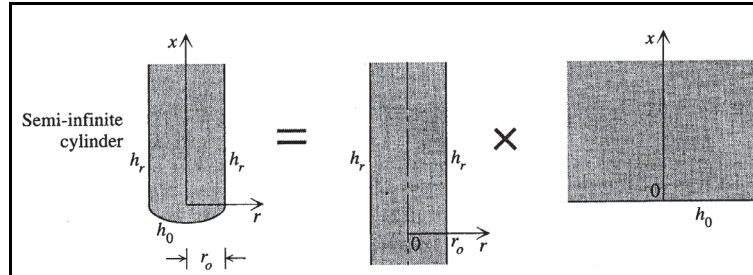


fig. 5.5. - Cylindre semi-infini.

6.1.2. Cas particulier : Fo_r supérieur à 0.2

Comme nous l'avons déjà dit dans le chapitre précédent, si le nombre de Fourier Fo_r , est supérieur à 0.2, on peut ne prendre que le premier terme des différentes suites (voir § 5.4.3.).

a) Si l'on recherche une *température* en un endroit particulier et que l'on connaît le *temps*, cela ne pose pas de problèmes de résolution. En sachant que :

$$Fo_{r_i} = \frac{a_i t}{l_{c_i}^2}$$

avec : $l_c = r_0$ pour le cylindre ou la sphère (r_0 étant le rayon extérieur)

et $l_c = e/2$ pour la plaque (e étant l'épaisseur)

a la diffusivité thermique, étant constante pour le solide.

on trouve :

$$\Theta = \frac{T_{(x,y,z,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \approx \prod_{i=1}^n \left(A_{1i} f_{1i} \exp\left(-\hat{\lambda}_{1i}^2 Fo_{r_i}\right) \right) \quad (\text{éq. 6.9.})$$

b) Si l'on recherche le *temps* en connaissant la *température* à atteindre à un endroit, on peut isoler le temps de la manière suivante :

$$t = - \frac{\ln \left(\frac{\Theta}{\prod_{i=1}^n (A_{1i} f_{1i})} \right)}{a \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{\lambda}_{1i}}{l_{1i}} \right)^2} \quad (\text{éq. 6.10.})$$

Application 6.1. La température initiale d'un lingot d'acier sous forme de parallélépipède de dimension $200 \times 400 \times 500 \text{ mm}$ était $T_0 = 20^\circ \text{C}$, puis le lingot a été placé dans un four à température $T_\infty = 1400^\circ \text{C}$. Calculer la température au centre du lingot 1.5 h après le chargement dans le four. Le coefficient de conductivité thermique et la diffusivité de l'acier sont respectivement $\lambda = 37.2 \text{ W/m K}$; $a = 6.94 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$; le coefficient de convection thermique à la surface du lingot $h = 186 \text{ W/m}^2 \text{ K}$.

Solution :

Calcul du nombre de Biot

$$Bi = \frac{h(V/A)}{\lambda} = \frac{186 \times \frac{0.2 \times 0.4 \times 0.5}{2(0.2 \times 0.4 + 0.2 \times 0.5 + 0.4 \times 0.5)}}{37.2}$$

$$= 3.85 \Rightarrow Bi > 0.1$$

La méthode du gradient nul n'est pas applicable.

Conduction multidimensionnelle

Donc la température sans dimension d'un point quelconque du parallélépipède est égale au produit des températures sans dimension de 3 plaques infinies, dont l'intersection forme le parallélépipède. Par conséquent, la température au centre de celui-ci est donné par l'équation :

$$\left[\frac{T_{(0,0,0,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right]_{\text{parallélépipède}} = \left[\frac{T_{(0,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right]_{\text{plaque 200}} \times \left[\frac{T_{(0,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right]_{\text{plaque 400}}$$

$$\times \left[\frac{T_{(0,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right]_{\text{plaque 500}}$$

1) Recherche de la solution au moyen des abaques

Calculons les nombres Bi_r et Fo_r

La longueur caractéristique d'une plaque infinie soumise à une convection sur les 2 faces est égale à sa demi épaisseur.

1) Plaque $2l = 200 \text{ mm}$ (suivant x) $Bi_r = \frac{h l_c}{\lambda} = \frac{186 \times 0.1}{37.2} = 0.5$

$$Fo_r = \frac{a t}{l_c^2} = \frac{6.94 \cdot 10^{-6} \times (1.5 \times 3600)}{0.1^2} = 3.748$$

Suivant l'abaque de Heisler nous avons :

$$\left[\frac{T_{(0,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right]_{\text{plaque 200}} \approx 0.22$$

2) Plaque $2l = 400 \text{ mm}$ (suivant y) $Bi_r = \frac{h l_c}{\lambda} = 1.0$

$$Fo_r = \frac{a t}{l_c^2} = 0.937$$

$$\text{Suivant l'abaque : } \left[\frac{T_{(0,t)} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right]_{\text{plaque 400}} \approx 0.57$$

$$3) \text{ Plaque } 2l = 500 \text{ mm (suivant } z) \quad Bi_r = \frac{h l_c}{\lambda} = 1.25$$

$$Fo_r = \frac{a t}{l_c^2} = 0.6$$

$$\text{Suivant l'abaque : } \left[\frac{T_{(0,t)} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right]_{\text{plaque 500}} \approx 0.68$$

Par conséquence

$$\left[\frac{T_{(0,0,0,t)} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right]_{\text{parallélépipède}} \approx 0.22 \times 0.57 \times 0.68 = 0.0853$$

Température au centre du lingot

$$T_{(0,0,0,t)} = 0.0853 (T_0 - T_{\infty}) + T_{\infty} = 0.0853 \times (20 - 1400) + 1400$$

$$= 1282 \text{ } ^\circ\text{C}$$

2) Méthode analytique

Hypothèse : $Fo_r > 0.2 \Rightarrow 1! \text{ terme}$

a) Plaque 200 mm :

$$\left[\frac{T_{(0,t)} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right]_{\text{plaque 200}} = \Theta_{\text{plaque 200}} = A_1 f_1 \exp(-\hat{\lambda}_1^2 Fo_r)$$

Avec : $Bi_r = 0.5$, nous avons, pour $z = 0 \text{ m}$:

$$\begin{cases} A_1 = 1.0701; & \hat{\lambda}_1 = 0.65327 \\ f_1 = \cos\left(\hat{\lambda}_1 \frac{z}{l}\right) = \cos(0) = 1 \\ Fo_r = 3.748 \end{cases}$$

b) Plaque 400 mm :

$$\left[\frac{T_{(0,t)} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right]_{\text{plaque 400}} = \Theta_{\text{plaque 400}} = A_1 f_1 \exp(-\hat{\lambda}_1^2 Fo_r)$$

Avec : $Bi_r = 1$, nous avons, pour $z = 0 \text{ m}$:

$$\begin{cases} A_1 = 1.1191; & \hat{\lambda}_1 = 0.86033 \\ f_1 = \cos\left(\hat{\lambda}_1 \frac{z}{l}\right) = \cos(0) = 1 \\ Fo_r = 0.937 \end{cases}$$

b) Plaque 500 mm :

$$\left[\frac{T_{(0,t)} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right]_{\text{plaque 500}} = \Theta_{\text{plaque 500}} = A_1 f_1 \exp(-\hat{\lambda}_1^2 Fo_r)$$

Avec : $Bi_r = 1.25$, nous avons, pour $z = 0 \text{ m}$:

$$\begin{cases} A_1 = 1.1378; & \hat{\lambda}_1 = 0.930505 \\ f_1 = \cos\left(\hat{\lambda}_1 \frac{z}{l}\right) = \cos(0) = 1 \\ Fo_r = 0.6 \end{cases}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{T_{(x,y,z,t)} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \approx \prod_{i=1}^3 \left(A_{1i} f_{1i} \exp(-\hat{\lambda}_{1i}^2 Fo_{ri}) \right) \\ &= (1.0701 \times 1) (1.1191 \times 1) (1.1378 \times 1) \\ &\quad \times \exp(-0.65327^2 \times 3.748) \times \exp(-0.86033^2 \times 0.937) \\ &\quad \times \exp(-0.930505^2 \times 0.6) \\ &= 0.0818 \\ \Rightarrow T_{(0,0,0,1.5h)} &= 0.0818 (20 - 1400) + 1400 = 1287 \text{ } ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Vérification de l'hypothèse :

Les 3 Fo_r , sont supérieur à 0.2, donc OK

Application 6.2. Un rôti de forme cylindrique (*diamètre* = $2r_0$ et de *longueur* = $2l$ avec $r_0 = l$) d'une masse de 2.25 kg, initialement à une température de $6 \text{ } ^\circ\text{C}$ est placé dans un four ($T_{\infty} = 175 \text{ } ^\circ\text{C}$) soumis à de la convection ($h = 15 \text{ W/m}^2\text{K}$). Trouver le temps nécessaire pour que le centre atteigne une température de $80 \text{ } ^\circ\text{C}$. On assimilera les caractéristiques du rôti à celles de l'eau.

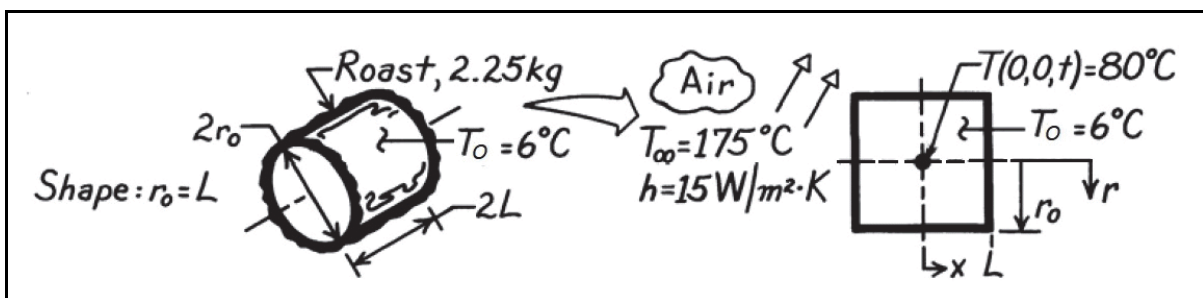


fig. 5.9. - Application 6.2.

Solution :

Hypothèses

- 1) Conduction bi-dimensionnelle suivant x et r
- 2) Propriétés uniformes et constantes
- 3) On approxime les propriétés de la viande à celle de l'eau.

Propriétés

On lit dans la table de l'eau, pour une température moyenne de 43 °C :

$$\rho = 991.1 \text{ kg/m}^3$$

$$c_p = 4179 \text{ J/kgK}$$

$$\lambda = 0.634 \text{ W/mK}$$

$$a = 1.531 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

Dimensions du rôti

Connaissant sa masse, sa masse volumique et sachant que $r_0 = l$, on en déduit :

$$m = \rho V = \rho (\pi r_0^2 2l) \Rightarrow r_0 = l = \sqrt[3]{\frac{m}{2\pi\rho}} = \sqrt[3]{\frac{2.25}{2 \times \pi \times 991.1}} = 0.0712 \text{ m}$$

Vérification du nombre de Biot

$$Bi = \frac{h(V/A)}{\lambda} = \frac{h \left(\frac{\pi r_0^2 2l}{2\pi r_0^2 + \pi 2r_0 2l} \right)}{\lambda} = \frac{h r_0}{3\lambda}$$
$$= \frac{15 \times 0.0712}{3 \times 0.634} = 0.562 \Rightarrow Bi > 0.1$$

Nous ne pouvons pas utiliser la méthode du gradient nul.

Cas de conduction bi-dimensionnelle

$$\left[\frac{T_{(0,0,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right]_{\text{plaque } 2L \times \text{cylindre } r_0} = \left[\frac{80 - 175}{6 - 175} \right] = 0.562$$
$$= \left[\frac{T_{(0,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right]_{\text{plaque } 2L} \times \left[\frac{T_{(0,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right]_{\text{cylindre } r_0}$$

Le produit de nos 2 solutions adimensionnelles doit donc valoir 0.562.

Recherche du Bi_r et Fo_r

N.B. : Bi_r et Fo_r sont identiques pour le cylindre et pour la plaque ($l_c = r_0$) dans les 2 cas.

$$Bi_r = \frac{h r_0}{\lambda} = \frac{15 \times 0.0712}{0.634} = 1.685 \Rightarrow Bi_r^{-1} = 0.594$$

$$Fo_r = \frac{a t}{r_0^2} = \frac{1.531 \cdot 10^{-7} \times t}{0.0712^2} = 3.020 \cdot 10^{-5} \times t$$

1) Recherche de la solution au moyen des abaques

On tente par essais successifs d'arriver à la bonne solution via les abaques.

- 1) On s'impose un nombre de Fo_r ,
- 2) On calcule le temps
- 3) Lecture sur les abaques des solutions unidirectionnelles adimensionnelles.
- 4) Vérification du produit

Essai	Fo_r	$t [h]$	$\Theta_{0\ mur}$	$\Theta_{0\ cylindre}$	Produit
1	0.4	3.68	0.72	0.5	0.36
2	0.3	2.75	0.78	0.68	0.53

2) Méthode analytique

Hypothèse : $Fo_r > 0.2 \Rightarrow$ 1! terme

a) Plaque :

$$\left[\frac{T_{(0,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right]_{\text{plaque } 2L} = \Theta_{\text{plaque } 2L} = A_1 f_1 \exp(-\hat{\lambda}_1^2 Fo_r)$$

Avec : $Bi_r = 1.685$, nous avons, pour $z = 0\ m$:

$$\begin{cases} A_1 = 1.163635; & \hat{\lambda}_1 = 1.023907 \\ f_1 = \cos\left(\hat{\lambda}_1 \frac{z}{l}\right) = \cos(0) = 1 \end{cases}$$

b) Cylindre :

$$\left[\frac{T_{(0,t)} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right]_{\text{cylindre } r_0} = \Theta_{\text{cylindre } r_0} = A_1 f_1 \exp(-\hat{\lambda}_1^2 Fo_r)$$

Avec : $Bi_r = 1.685$, nous avons, pour $r = 0\ m$:

$$\begin{cases} A_1 = 1.30343; & \hat{\lambda}_1 = 1.514041 \\ f_1 = J_0\left(\hat{\lambda}_1 \frac{r}{r_0}\right) = J_0(0) = 1 \end{cases}$$

c) Rôti :

$$\Theta_{\text{plaque } 2L \times \text{cylindre } r_0} = \frac{80 - 175}{6 - 175} = 0.562 = \underbrace{\Theta_{\text{plaque } 2L}}_{f(t)} \times \underbrace{\Theta_{\text{cylindre } r_0}}_{f(t)}$$

En isolant le temps t :

$$\begin{aligned} t &= - \left(\frac{1}{a \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\hat{\lambda}_{1i}}{l_{1i}} \right)^2} \right) \ln \left(\frac{\Theta_{\text{plaque } 2L \times \text{cylindre } r_0}}{\prod_{i=1}^2 (A_{1i} f_{1i})} \right) \\ &= - \left(\frac{1}{1.531 \cdot 10^{-7} \left(\left(\frac{1.023907}{0.0712} \right)^2 + \left(\frac{1.514041}{0.0712} \right)^2 \right)} \right) \ln \left(\frac{0.562}{1.163635 \times 1 \times 1.30343 \times 1} \right) \\ &= 9846\ s \approx 2.74\ h \end{aligned}$$

Vérification de l'hypothèse

$$Fo_r = \frac{a t}{r_0^2} = \frac{1.53110^{-7} \times 9846}{0.0712^2} = 0.3 > 0.2 \quad OK$$
