COMPLÉMENT (1) : ANALOGIES

1.1. ***Tableau des analogies***

Domaine Physique	*Effort*		*Flux*	
Electrique	Tension U	V	Intensité I	$C/s = A$
Thermique	Température T	K	Flux thermique $\dot{Q}$	$J/s = W$
Hydraulique	Pression p	Pa	Débit volumique q_v	m^3/s
Pneumatique	Pression dp	Pa	Débit q_v	m^3/s
Mécanique de translation	Force F	N	Vitesse w	m/s
Mécanique de rotation	Couple C	Nm	Vitesse angulaire ω	rad/s
Chimique	Potentiel chimique	$J/mole$	Flux molaire	$mole/s$
Thermodynamique	Entropie E	J/K	Flux d'Entropie	J/s
Acoustique	Pression sonore P_r	Pa	Débit acoustique Q	m^3/s

Nous pouvons remarquer que le produit "Effort" - "Flux" donne la "Puissance". Exemples :

$$P_{électrique} = U \times I$$

$$P_{hydraulique} = \Delta p \times q_v$$

$$P_{méc\ translation} = F \times w$$

$$P_{mécanique\ rotation} = C \times \omega$$

$$P_{acoustique} = P_r \times D$$

Pour la puissance thermique, nous n'avons pas exactement cela.

* Définition du débit acoustique : $Q = \dfrac{dV}{dt}$ $[m^3/s]$

* Définition du flux de vitesse : $D = \int w\, dA$ $[m^3/s]$

1.2. *Eléments dissipatifs*

1.2.1. Electricité

Afin de montrer les analogies entres les différents systèmes, nous partirons à chaque fois des lois bien connues de l'électricité. Dans le cas de l'élément dissipatif, nous avons la résistance R et la loi d'Ohm qui s'écrit : $U = R\,i$.

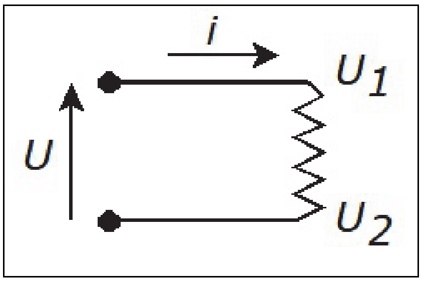


fig. Co1.1. - *Résistance.*

Et donc nous avons :

$$\boxed{U = U_1 - U_2 = R\,i}$$

1.2.2. Thermique

En thermique c'est la "*transmission*" de chaleur qui est l'équivalent de la "résistance". Cependant, il existe trois modes de transmission de la chaleur : *conduction, convection et rayonnement*. Etudions les trois cas.

A) *Conduction*

Soit un flux de chaleur traversant un corps de surface A et d'épaisseur e. Le transfert de chaleur se fait par conduction et progressivement, jusqu'à la stabilité du phénomène. C'est la loi de Fourier qui régit ce genre de transmission. Elle s'écrit traditionnellement sous la forme, en conduction unidimensionnelle :

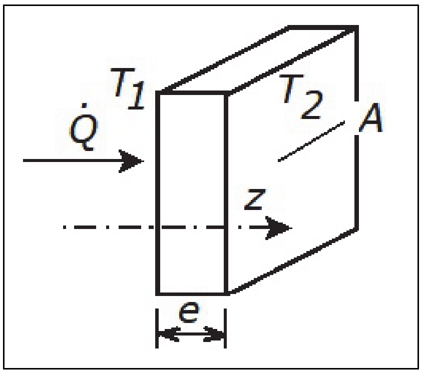


fig. Co1.2. - *Résistance thermique de conduction.*

$$\boxed{\dot{Q} = -\lambda\,A\,\frac{\partial T}{\partial z} \;\Rightarrow\; \dot{Q} = -\frac{\lambda\,A}{e}\,\Delta_i^f T}$$

Notations :

$\dot{Q}$	flux de chaleur	*J/s* ou W
λ	conductivité thermique	*W/mK*
e	épaisseur de la paroi	*m*
A	surface $\perp$ au flux	m^2

Le tableau des analogies nous indique :		
U	➜	T
I	➜	$\dot{Q}$

et donc, si on remet la loi de Fourier dans le bon ordre, nous obtenons :

$$\boxed{\Delta_i^f T = -\frac{e}{\lambda\,A}\,\dot{Q}}$$

qui est l'équivalent de la loi d'Ohm avec :

$$\boxed{R_{th\ cond} = \frac{e}{\lambda\,A}}\ [K/W]$$

L'inverse de cette résistance est désigné sous le nom de *conductance thermique*.

Remarque :
Quand Ohm voulut donner la relation entre le courant et la différence de potentiel vaux deux bouts d'un conducteur, après quelques essais infructueux, il transposa simplement la théorie de Fourier en électricité, remplaçant la *température* par le *potentiel*, la *quantité de chaleur* par celle *d'électricité*. La relation de Fourier s'écrit :

$$\dot{Q} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\lambda\, A \frac{\partial T}{\partial z} \;\Rightarrow\; \frac{\Delta Q}{\Delta t} = i = -\frac{1}{\rho}\, A \frac{\Delta V}{\Delta z} = \frac{V_1 - V_0}{\left(\frac{\rho\, z}{A}\right)} = \frac{U}{R}$$

λ représentant l'inverse de la résistivité.

On peut donc bien parler de la résistance thermique d'un conducteur de longueur l et de section A comme égale à $\frac{l}{\lambda\, A}$, à condition que l'extérieur du conducteur ne conduise pas la chaleur.

B) *Convection*

La loi générale de la convection s'écrit : $\boxed{\dot{Q} = h\, A\, \Delta T}$

Notations : h coefficient de convection *W/m²K*

Et donc :

$\boxed{\Delta T = \frac{1}{h\, A}\dot{Q}}$ l'équivalent de la loi d'Ohm avec : $\boxed{R_{th\ conv} = \frac{1}{h\, A}}$ [*K/W*]

C) *Rayonnement*

Le transfert de chaleur par rayonnement est un peu particulier. En effet, tout corps chauffé transmet de la chaleur sous forme rayonnante. Mais ce phénomène est particulièrement mis en valeur lorsque les températures sont élevées. L'échange net d'énergie par rayonnement entre deux corps est décris par la loi de Stéfan-Boltzmann.

Entre deux corps noirs, l'un chaud (température T_1), l'autre froid (température T_2), en vis-à- vis total (c'est-à-dire que tout le flux émis par l'un des corps est reçu par l'autre), le flux net échangé s'écrit :

$$\dot{Q} = \textit{flux émis} - \textit{flux absorbé} = A\,\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right).$$

Notations : σ la constante de Stéfan-Boltzmann ($\sigma = 5.67\, 10^{-8}$) *W/m²K⁴*

A la surface du corps émetteur *m²*

Remarque - rappel : *[Réf. (6)]*
Les propriétés d'émission des corps réels sont définies par rapport à celles du corps noir.
On définit l'émissivité ε d'un corps comme le rapport de sa luminance (ou de son émittance) à celle du corps noir. L'émissivité est un nombre strictement inférieur à 1. En toute rigueur, l'émissivité dépend de la direction et de la longueur d'onde.

Un corps réel est donc défini par :

- son émissivité ε en ce qui concerne le rayonnement qu'il émet;
- son coefficient d'absorption α en ce qui concerne le rayonnement reçu de son environnement.

La loi de Kirchhoff indique que $\alpha = \varepsilon$ pour la même longueur d'onde et la même direction.

On fait la plupart du temps l'hypothèse que les corps réels se comportent comme des corps gris à émission diffuse. Cette hypothèse entraîne que l'émissivité, et par conséquent le coefficient d'absorption, ne dépendent ni de la direction ni de la longueur d'onde. Un corps réel est alors caractérisé par une seule quantité son émissivité ε.

Si les deux corps ne sont pas en vis-à-vis total, on fait intervenir un facteur de forme ($F_{1,2}$) qui tint compte de la géométrie considérée.

De la même façon, le flux net échangé entre deux corps gris s'écrit :

$$\boxed{\dot{Q} = A_1\ F_{1,2}\ \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right)}$$

où le facteur de forme fait intervenir cette fois la géométrie considérée et les émissivités des deux corps. Exemple pour 2 surfaces grises :

$$F_{1,2} = \frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad \text{: 2 surfaces parallèles en vis-à-vis}$$

$$F_{1,2} = \frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{A_1}{A_2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} \quad \text{: 2 surfaces dont l'une } A_2 \text{ entoure complètement l'autre } A_1$$

$$F_{1,2} = \varepsilon_1 \quad \text{: si } A_1 \lll A_2$$

Il faut quand même remarquer que cette fois la relation entre "effort" T et "flux" $\dot{Q}$ n'est pas linéaire. Cependant, si *les écarts de température ne sont pas trop importants*, on peut linéariser $\left(T_1^4 - T_2^4\right)$ et le remplacer par : $4\ T_{moy}^3\ \left(T_1 - T_2\right)$ de sorte que :

$$\boxed{\dot{Q} \approx 4\ A_1\ F_{1,2}\ \sigma\ T_{moy}^3\ \left(T_1 - T_2\right)}$$

où T_{moy} est une température intermédiaire entre T_1 et T_2 qui pourra être considéré comme constante.

On a alors une relation du type Newton $\dot{Q} = h_r\ A\ \Delta T$ en introduisant un coefficient de transmission par rayonnement $\boxed{h_r = 4\ T_{moy}^3\ \sigma\ F_{1,2}}$. De la même façon que précédemment, on définira la résistance de surface au rayonnement :

$$\boxed{R_{th\ ray} = \frac{1}{h_r\ A}}\ [K/W]$$

1.2.3. Hydraulique

Lorsqu'on évoque le terme "*hydraulique*", on pense inévitablement aux écoulements des fluides. S'il s'agit d'eau, on implique directement la notion de niveau et de débit dans les réservoirs; s'il s'agit d'huile, on parle surtout de transmission de puissance.

Quel que soit le cas, l'écoulement est soit laminaire, soit turbulent. La description mathématique de tels systèmes est généralement difficile à mener en raison du caractère fortement non linéaire de certains de leurs paramètres. On tend généralement à linéariser les modèles en les analysant pour des petites variations autour de points de fonctionnement déterminés. Nous limiterons, dans le cadre de ce cours, aux fluides incompressibles.

La notion de résistance implique forcément l'existence d'obstacles (vanne, ajutage, etc...), sans oublier la perte de charge linéaire (perte de charge en ligne).

Pour l'hydraulique, l'équivalent d'un élément dissipatif est donc la "perte de charge" locale ou linéaire.

Le tableau des analogies nous indique :		
U	➜	p
I	➜	q_v

nous pouvons en déduire que d'une manière générale : $\Delta p = R_h\ q_v$

Notation : R_h résistance hydraulique Ns/m^5

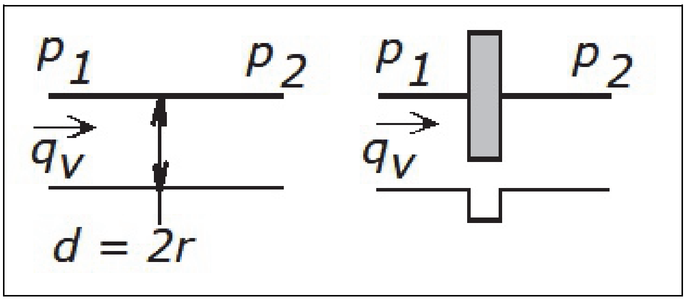


fig. Co1.3. *- Résistance hydraulique.*

Sans refaire toute les démonstrations (voir cours de mécanique des fluides), nous pouvons démontrer que *dans le cas d'un régime laminaire*, la perte de charge dans un tuyau circulaire de rayon r est donnée par la loi de Poiseuille-Hagen, qui dit que :

$$\boxed{\Delta p = R_h\ q_v = \frac{8\,\eta\,l}{\pi\,r^4}\,q_v}$$

Notations :	η	viscosité dynamique	*Pas*
	l	longueur de la tuyauterie	*m*
	r	rayon	*m*

Et la résistance hydraulique dans ce cas est : $\boxed{R_h = \frac{8\,\eta\,l}{\pi\,r^4}}$ [Ns/m^5]

Dans le cas *d'un écoulement turbulent*, toujours sans refaire toute la démonstration, on peut dire que :

$\boxed{\Delta p = R_h\, q_v^2 = \left(\lambda\,\frac{l}{d}\,\frac{\rho}{2\,A^2}\right) q_v^2}$ et la résistance hydraulique est : $\boxed{R_h = \lambda\,\frac{l}{d}\,\frac{\rho}{2\,A^2}}$ [kg/m^7]

Notations :	λ	coefficient en fonction du nombre de Reynolds	-
	d	diamètre intérieur du tuyau	m
	ρ	masse volumique du fluide	kg/m^3

Il faut remarquer que ici aussi la relation entre "*effort*" p et "*flux*" q_v n'est pas linéaire.

De *manière générale*, nous avons que la résistance hydraulique R_h qui est égale à :

$$\boxed{R_h = \frac{\Delta p}{q_v}}$$

1.2.4. Pneumatique

Sur l'exemple ci-contre, on peut remarquer que les pression p_1 et p_2 sont différentes du fait de la résistance qu'opposent la vanne d'étranglement et la canalisation à l'écoulement du gaz. La résistance à l'écoulement des gaz est définie par le rapport des variations de pression et du débit tel que : $\boxed{R_p = \frac{dp}{d\left(\rho\, q_v\right)}}$

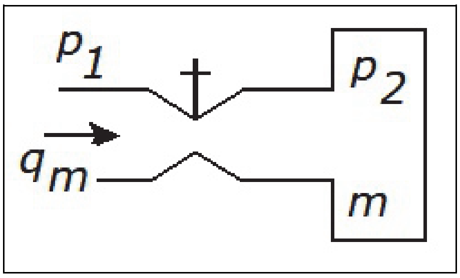


fig. Co1.4. - Résistance pneumatique.

Cette résistance est très difficile à calculer *du fait que le coefficient de dilatation des gaz dépend beaucoup de la pression*. Elle est déterminée généralement graphiquement sur la courbe de variation de la pression en fonction du débit.

Remarquons qu'ici aussi l'analogie est complète.

1.2.5. Mécanique de translation

Nous avons vu dans la partie "*mécanique*" de la dynamique des systèmes, que la "résistance" était donnée par le frottement du système étudié sur l'ambiance. Nous avons vu qu'il existe trois modes de "*frottement*" : coulombien (coefficient constant), visqueux (frottement fonction de la vitesse) et turbulent (frottement fonction de la vitesse au carré).

Dans la dynamique des systèmes on admet le plus souvent que l'amortissement présente un comportement visqueux caractérisé par une constante d'amortissement b, parce que :

- le traitement des équations différentielles est plus simple;
- le facteur d'amortissement relatif de la dissipation structurelle est pratiquement assez petit pour

que le comportement hystérétique des matériaux puisse être assimilé à un comportement visqueux;
- le comportement d'un dissipateur coulombien est très voisin d'un amortisseur visqueux tant que l'oscillateur n'est pas en résonnance d'amplitude.

La valeur numérique de la constante d'amortissement est difficile à déterminer, car elle dépend d'un grand nombre de paramètres. On préfère généralement choisir des valeurs empiriques du *facteur d'amortissement relatif* η qui intervient dans les équations différentielles et qui contient la constante d'amortissement b.

Au vu des hypothèses émises, nous avons que la force dissipatrice est fonction linéaire de la vitesse, et donc :

$$\boxed{F = b\, w}$$

avec b la constante d'amortissement visqueux.

C'est strictement l'équivalent de la loi d'Ohm, et *l'impédance mécanique* s'écrira :

$$\boxed{R_{m\,t} = \frac{F}{w} = b = f(\eta)} \; [Ns/m]$$

1.2.6. Mécanique de rotation

Par analogie stricte, nous avons : $\boxed{C = b_\theta\ \omega}$ avec : $\boxed{R_{m\,r} = b_\theta}$

1.2.7. <u>Résumé</u>

Domaine Physique	*Eléments dissipatifs*	
Electrique	$\Delta U = R\, I$	$R_e = R$
Thermique (*Conduction*)	$\Delta_i^f T = -\dfrac{e}{\lambda\, A}\,\dot{Q}$	$R_{th\ cond} = \dfrac{e}{\lambda\, A}$
Thermique (*Convection*)	$\Delta T = \dfrac{1}{h\, A}\,\dot{Q}$	$R_{th\ conv} = \dfrac{1}{h\, A}$
Thermique (*Rayonnement*)	$\Delta T^4 = \dfrac{1}{A\,\varepsilon\,\sigma}\,\dot{Q}$ $\Delta T \approx \dfrac{1}{4\, A_1\, F_{1,2}\,\sigma\, T_1^3}\,\dot{Q}$	$R_{th\ ray} = \dfrac{1}{A\,\varepsilon\,\sigma}$ $R_{th\ ray} \approx \dfrac{1}{h_r\, A}$ $h_r = 4\, F_{1,2}\,\sigma\, T_1^3$
Hydraulique (*Régime laminaire*) (tuyau)	$\Delta p = \dfrac{8\,\eta\, l}{\pi\, r^4}\, q_v$	$R_h = \dfrac{8\,\eta\, l}{\pi\, r^4}$
Hydraulique (*Régime turbulent*) (tuyau)	$\Delta p = R_h\, q_v^2 = \left(\lambda\,\dfrac{l}{d}\,\dfrac{\rho}{2\, A^2}\right) q_v^2$	$R_h = \dfrac{\Delta p}{q_v^2} = \lambda\,\dfrac{l}{d}\,\dfrac{\rho}{2\, A^2}$
Pneumatique	$dp = R_p\, d\left(\rho\, q_v\right)$	$R_p = \dfrac{dp}{d\left(\rho\, q_v\right)}$
Mécanique de translation	$F = b\, w$	$R_{m\ tr} = \dfrac{F}{w}$
Mécanique de rotation	$C = b_\theta\,\omega$	$R_{m\ r} = \dfrac{C}{\omega}$

1.3. *Eléments de stockage de l'énergie*

1.3.1. Electricité

En électricité, l'élément de stockage est le condensateur.

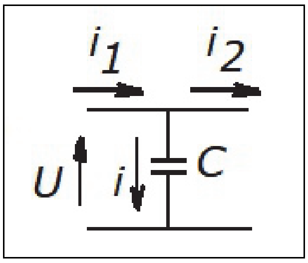


fig. Co1.5. - Capacité - Stockage d'énergie.

La relation de base s'écrit : $i = i_1 - i_2 = \frac{dq}{dt}$

Le courant étant la variation de la charge par unité de temps.

Sachant que la tension U est proportionnelle à la charge q, c'est-à-dire que : $dq = C\,dU$, avec C la capacité du condensateur en F, nous obtenons :

$$i = i_1 - i_2 = \frac{dq}{dt} = C\,\frac{dU}{dt}$$

$$\boxed{i = C\,\frac{dU}{dt} \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{C}\int i\,dt}$$

1.3.2. Thermique

Soit un corps homogène dans lequel on doit transférer une certaine quantité de chaleur Q d'un environnement externe. Ce corps a des caractéristiques propres, à savoir : sa masse m et sa chaleur spécifique c.

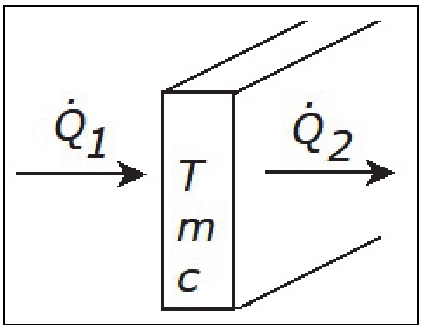


fig. Co1.6. - Stockage thermique.

Remarque :
Lorsqu'un solide de conductivité élevée, de faibles dimensions, est soumis à des transferts superficiels modérés, c'est-à-dire lorsque la résistance interne est négligeable devant la résistance externe (nombre de Biot associé à ce solide petit, en pratique inférieur à 0.1), nous pouvons alors considérer que sa température reste uniforme à chaque instant.

Le flux de chaleur étant la variation de la quantité de chaleur par unité de temps, la relation de base s'écrit : $\dot{Q} = \dot{Q}_1 - \dot{Q}_2 = \frac{dQ}{dt}$ (ou : la variation de l'énergie interne du solide est égale au flux transmis à travers l'interface pendant l'intervalle de temps dt.)

En thermique nous savons que : $Q = m\,c\,T$, et, si de plus la masse m et la chaleur spécifique c [*J/kgK*] sont constantes (c constant implique que la variation de température n'est pas (très) grande), la relation de base peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 - \dot{Q}_2 = \frac{d(m\,c\,T)}{dt} = m\,c\,\frac{dT}{dt}$$

$$\boxed{\dot{Q} = \dot{Q}_1 - \dot{Q}_2 = m\,c\,\frac{dT}{dt} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{m\,c}\int \dot{Q}\,dt}$$ avec : $\boxed{C_{th} = m\,c}$ *J/K*

1.3.3. Hydraulique

La capacité peut s'interpréter physiquement comme étant la quantité de fluide qu'il faut introduire *lentement* (sinon l'inertie intervient) dans un organe pour que la pression augmente.

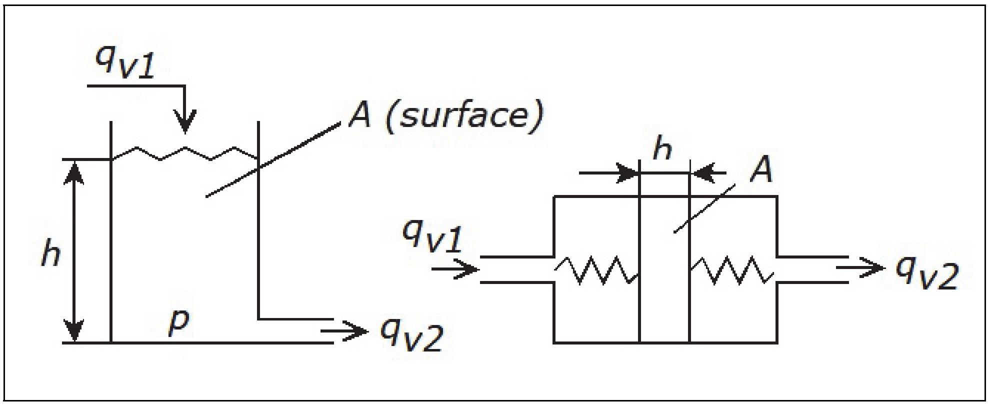


fig. Co1.7. - *Stockage hydraulique.*

Examinons l'exemple ci-dessus. Les grandeurs q_{v1} et q_{v2} représentent respectivement les débits d'eau à l'entrée et à la sortie du réservoir. Celui-ci contient un volume d'eau V [m^3] appelé communément "capacité du réservoir", ce qui est différent de la capacité hydraulique analogue à la capacité électrique. Le niveau du fluide est désigné par h [m]. La section du réservoir A est supposé constante.

Dans ce système, les paramètres susceptibles de varier sont le volume V du réservoir et la pression p de sortie du fluide. En effet, sachant que : $V = A\,h$, toute variation de débit entraîne une variation de volume qui, à son tour, implique une variation de niveau h.

De plus, puisque dans notre exemple, l'écoulement du fluide à la sortie du système se fait par gravité seulement, alors comme : $p = \rho\, g\, h$, toute variation de niveau h entraîne une variation de pression p.

Pour le système, en utilisant les équations de continuité, (*le débit étant la variation de volume V par unité de temps*) et tenant compte des hypothèses émises ci-dessus (et si A, g, ρ sont constants), on peut écrire :

$$q_v = q_{v1} - q_{v2} = \frac{dV}{dt} = \frac{d(A\,h)}{dt} = A\,\frac{dh}{dt} = A\,\frac{d\left(p/\rho\, g\right)}{dt}$$

$$\boxed{q_v = \frac{A}{\rho\, g}\,\frac{dp}{dt} \quad\Rightarrow\quad p = \frac{\rho\, g}{A}\int q_v\, dt} \qquad \text{avec :} \quad \boxed{C_h = \frac{A}{\rho\, g}}\ [m^5/N] \text{ ou } [m^3/Pa]$$

Cette équation est générale et valable dans tous les cas. Le problème réside seulement dans la détermination de C_h qui se fait soit analytiquement en utilisant les équations caractéristiques des fluides, soit graphiquement sur les courbes de variation : $\rho = f(p)$ ou $\rho = f(h)$.

1.3.4. Pneumatique

Dans l'exemple ci-contre, on voit que la quantité de gaz accumulée dans le réservoir est fonction de la variation de pression du système. Autrement dit, le réservoir à la capacité d'emmagasiner plus ou moins de gaz selon les pressions mises en jeu.

Plus la quantité de gaz accumulés est grande, plus la *pression* interne augmente. Il existe une relation liant ces 3 paramètres :

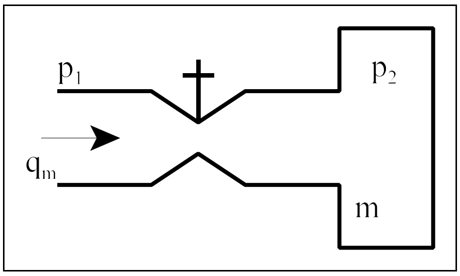


fig. Co1.8. *- Stockage pneumatique.*

$$\boxed{C_p = \frac{d(\rho V)}{dp}} \qquad \text{et donc :} \qquad \boxed{d(\rho V) = C_p\, dp}$$

En divisant par *dt*, on obtient :

$$\boxed{q_m = \frac{d(\rho V)}{dt} = C_p \frac{dp}{dt} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{C_p}\int (\rho V)\, dt} \; \textbf{\textit{(éq. Co1.85.)}}$$

Remarque :
Nous n'avons pas introduit la variable "température" dans notre raisonnement car nous sommes dans la situation ou les variations de pression se font à température constante. Ceci est valable pour beaucoup de gaz (air, etc...) lorsque les variations de pression sont de l'ordre d'environ 1 à 10. Le système vérifie alors l'équation des gaz parfaits : $p\,V = m\,R\,T$ ***(éq. Co1.86.)***

La théorie de la compression et de la détente des gaz parfaits nous enseigne que les situations concernant les variations de volume et, par conséquent, de pression sont très diverses. Examinons ***le cas d'une transformation isentropique (sans Q et sans $\mathscr{T}_f$)***. Nous avons pour ce cas la loi de Laplace qui s'énonce :

$$\boxed{\frac{dp}{dV} = -\gamma\,\frac{p}{V}} \; \textbf{\textit{(éq. Co1.87.)}}$$

Au moyen des équations ***(éq. 1.86.)*** et de ***(éq. 1.87.)***, nous pouvons exprimer la capacité pneumatique (équation : ***(éq. 1.85.)***) par :

$$\boxed{C_p = \left| -\frac{V}{\gamma\,R\,T} \right|}$$

Remarque :
Une (ancienne) formule approchée pour la capacité d'un réservoir de gaz est donnée par : $C_p \approx \sqrt{\frac{10\,q_v}{p}}$, avec q_v en *m*^{3}*/min* et *p* la pression *absolue* en *kg'/cm*^{2}. Sachant que la définition de la capacité pneumatique est donnée par la formule : $C_p = \frac{d(\rho V)}{dp}$, on remarque bien la concordance.

1.3.5. Mécanique de translation

Dans ce cas procédons par analogie.

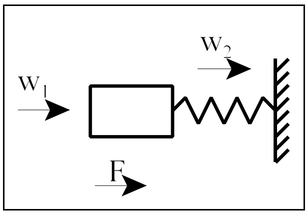


fig. Co1.9. - Stockage mécanique de translation.

Le tableau des analogies nous indique :		
U	➜	F
I	➜	w

et donc nous obtenons : $\boxed{w = w_1 - w_2 = \frac{de}{dt}}$

La vitesse étant la variation de l'espace par unité de temps.

Dans le cas du ressort, nous avons que : $F = k\ e$, avec k la rigidité du ressort en N/m. La relation devient :

$$w = w_1 - w_2 = \frac{d\left(F/k\right)}{dt}$$

Si la rigidité k du ressort est constante en fonction du temps, nous écrirons :

$$\boxed{w = \frac{1}{k}\frac{dF}{dt} \quad \Rightarrow \quad F = k\int w\,dt} \qquad \text{avec :} \qquad \boxed{C_{m\,t} = \frac{1}{k}}\ [m/N]$$

1.3.6. Mécanique de rotation

Dans ce cas procédons par analogie.

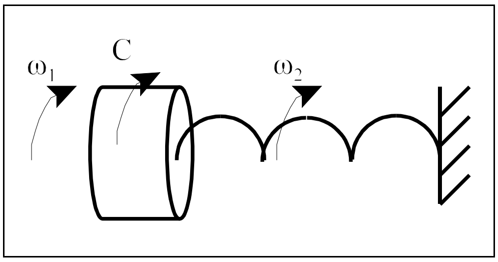


fig. Co1.10. - Stockage mécanique de rotation.

Le tableau des analogies nous indique :		
U	➜	C
I	➜	ω

et donc nous obtenons : $\boxed{\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{d\theta}{dt}}$

La vitesse angulaire étant la variation de l'angle par unité de temps.

Dans le cas du ressort soumis à "torsion", nous avons que : $C = k_\theta\ \theta$, avec k_θ la rigidité du ressort [Nm/rad]. La relation devient :

$$\boxed{\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{d\left(C/k_\theta\right)}{dt}}$$

Si la rigidité k_θ du ressort est constante en fonction du temps, nous écrirons :

$$\boxed{\omega = \frac{1}{k_\theta}\frac{dC}{dt} \;\Rightarrow\; C = k_\theta \int \omega\, dt} \qquad \text{avec :} \quad \boxed{C_{m\,r} = \frac{1}{k_\theta}} \; [1/Nm]$$

1.3.7. Résumé

Domaine Physique	*Eléments de stockage de l'énergie*		
Electrique	$i = C\,\frac{dU}{dt}$	$U = \frac{1}{C}\int i\,dt$	$C_e = C$
Thermique	$\dot{Q} = m\,c\,\frac{dT}{dt}$	$T = \frac{1}{m\,c}\int \dot{Q}\,dt$	$C_{th} = m\,c$
Hydraulique	$q_v = \frac{A}{\rho\,g}\frac{dp}{dt}$	$p = \frac{\rho\,g}{A}\int q_v\,dt$	$C_h = \frac{A}{\rho\,g}$
Pneumatique (transf. isentropique)	$q_m = C_p\,\frac{dp}{dt}$	$p = \frac{1}{C_p}\int(\rho\,q_v)\,dt$	$C_p = \left\lvert -\frac{V}{\gamma\,R\,T}\right\rvert$
Mécanique de translation	$w = \frac{1}{k}\frac{dF}{dt}$	$F = k\int w\,dt$	$C_{m\,t} = \frac{1}{k}$
Mécanique de rotation	$\omega = \frac{1}{k_\theta}\frac{dC}{dt}$	$C = k_\theta\int \omega\,dt$	$C_{m\,rot} = \frac{1}{k_\theta}$

1.4. *Eléments de stockage de l'énergie (type inertiel)*

1.4.1. Electricité

En électricité, l'élément de stockage inertiel est la self *L*.

La relation de base s'écrit :

$$\boxed{U = U_1 - U_2 = L\,\frac{di}{dt}}$$

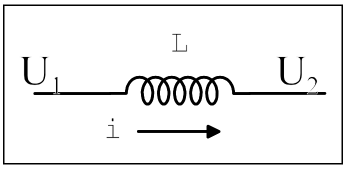


fig. Co1.11. - *Self - stockage inertiel.*

La tension aux bornes d'un self étant la variation de courant par unité de temps.

1.4.2. Thermique

L'équivalent d'une self en thermique n'existe pas.

1.4.3. Hydraulique

Le "stockage" de l'énergie hydraulique sous forme "d'inertie" hydraulique est le fait que la pression d'entrée dans un système (ex. tube) et la pression de sortie n'est pas nécessairement identique. Cette différence de pression entraîne l'accélération du fluide contenu dans le système étudié. S'il y a une accélération, c'est qu'il existe une inertie à vaincre.

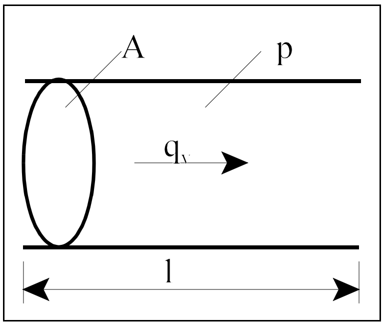


fig. Co1.12. - *Hydraulique.*

Cette force est donnée par la relation suivante :

$$F = p\,A \quad\Rightarrow\quad p = \frac{F}{A}$$

<u>*Notations*</u> :

p	pression effective qui s'exerce sur la surface A (différence de pression entre l'entrée et la sortie)	Pa
A	la surface sur laquelle s'exerce la différence de pression (section du tube)	m^2

$$p = \frac{m}{A}\frac{dw}{dt} \qquad \text{avec} \qquad F = m\,\frac{dw}{dt} \qquad \text{(Loi fondamentale de la mécanique)}$$

$$p = \frac{m}{A}\,\frac{d\left(q_v/A\right)}{dt} \qquad \text{avec} \qquad w = q_v/A$$

$$p = \frac{m}{A^2}\frac{dq_v}{dt} \qquad \text{avec hypothèse de la section constante.}$$

$$p = \frac{A\,l\,\rho}{A^2}\frac{dq_v}{dt} \qquad \text{avec} \qquad m = A\,l\,\rho$$

l : longueur du tube

ρ : masse volumique (considérée comme constante)

$$\boxed{p = \frac{l\,\rho}{A}\frac{dq_v}{dt}} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{L_h = \frac{l\,\rho}{A}} \qquad [kg/m^4]$$

Remarque :
Le calcul de l'inertie hydraulique n'a de sens que lorsque la longueur *l* est grande. Dans le cas contraire, l'inertie est négligeable. De plus, dans la formulation finale, le fluide est considéré comme incompressible.

Mesurer cette inertie est plus complexe que de mesurer la capacité. En effet pour déterminer l'inertie, il faut mesurer l'accélération du fluide lorsqu'on applique lentement une différence de pression aux extrémités de l'organe hydraulique. Si la différence de pression est appliquée trop rapidement, les effets de compressibilité ne sont plus négligeables et le débit n'est plus uniforme tout au long de l'organe.

1.4.4. Pneumatique

1.4.5. Mécanique de translation

Le stockage "inertiel" de l'énergie s'effectue lorsque une masse est en mouvement.

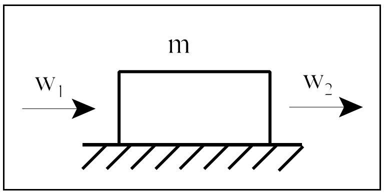


fig. Co1.13. - Mécanique de translation.

Dans le cas de la mécanique, de par la loi fondamentale, nous avons immédiatement :

$$\boxed{F = m\frac{dw}{dt}} \quad \text{avec} \quad \boxed{L_{m\,t} = m}$$

1.4.6. Mécanique de rotation

Par analogie complète, nous trouvons immédiatement :

$$\boxed{C = J_C\frac{d\omega}{dt}} \text{ avec } \boxed{L_{m\,r} = J_C}$$

(J_C étant l'inertie de masse kgm^2)

1.4.7. Résumé

Domaine Physique	*Eléments de stockage de l'énergie (type inertiel) (Stockage dynamique)*	
Electrique	$U = L\frac{di}{dt}$	$L_e = L$
Hydraulique	$p = \frac{l\,\rho}{A}\frac{dq_v}{dt}$	$L_h = \frac{l\,\rho}{A}$
Pneumatique	?	?
Thermique	$\nexists$	$\nexists$
Mécanique de translation	$F = m\frac{dw}{dt}$	$L_{m\,t} = m$
Mécanique de rotation	$C = I_m\frac{d\omega}{dt}$	$L_{m\,r} = I_m$

1.5. ***Compléments d'analogie***

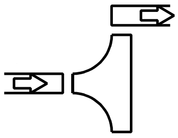
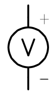
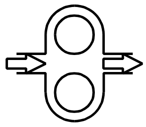
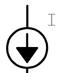
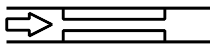
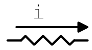
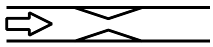
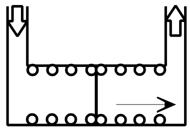
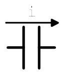
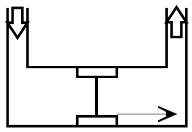
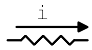
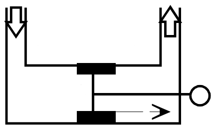
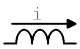
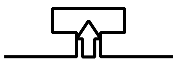
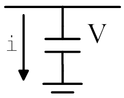
1.5.1. Constante de temps

Indépendamment de la nature physique du système, la *constante de temps* est toujours égale au produit de la *résistance par la capacité*.

$$\boxed{\tau = R\,C}$$

En thermique (convection) la constante de temps devient : $\boxed{\tau = R\,C = \dfrac{m\,c}{h\,A}}$

1.5.2. Complément d'hydraulique

Organes	*Equation*	*Symbole*	*Analogue électrique*
Organes actifs Sources de pression (accumulateur, pompe centrifuge parfaite)	$p_2 - p_1 = \Delta p = Cte$		source de tension  $\Delta U = Cte$
Source de débit (pompe volumétrique parfaite)	$q_v = Cte$		source de courant  $i = Cte$
Organes passifs Orifice laminaire	$q_v = K\ A\ \Delta p$ $\left\{\Delta p = \frac{1}{K\ A}\, q_v\right\}$		résistance  $i = \frac{1}{R}\, U$
Orifice turbulent	$q_v = K\ A\ \sqrt{\Delta p}$ $\left\{\Delta p = \frac{1}{K\ A}\, q_v^2\right\}$		pas d'équivalent simple
Piston à rappel élastique	$F_{rap} = F_p$ $\left.\begin{aligned} k\ x &= A\ \Delta p \\ q_v &= A\,\frac{dx}{dt}\end{aligned}\right\} q_v = \frac{A^2}{k}\,\frac{dp}{dt}$		capacité  $i = C\,\frac{dU}{dt}$
Piston à frottement visqueux	$F_{frot} = F_p$ $\left.\begin{aligned} f\,\frac{dx}{dt} &= A\ \Delta p \\ q_v &= A\,\frac{dx}{dt}\end{aligned}\right\} q_v = \frac{A^2}{f}\,\Delta p$		résistance  $i = \frac{1}{R}\, U$
Piston à inertie pure	$F_{in} = F_p$ $\left.\begin{aligned} m\,\frac{d^2x}{dt^2} &= A\ \Delta p \\ q_v &= A\,\frac{dx}{dt}\end{aligned}\right\} q_v = \frac{A^2}{m}\int p\ dt$		inductance  $i = \frac{1}{L}\int U\ dt$
Compressibilité du liquide (ou élasticité de l'enveloppe)	$q_v = K\,\frac{dp}{dt}$		capacité à la masse  $i = C\,\frac{dU}{dt}$

Equations caractéristiques et analogues électriques de quelques organes hydrauliques élémentaires.

Bien plus, l'étude d'un système hydraulique se faisant en appliquant les lois des mailles et des noeuds :

$\sum \Delta p = 0$ le long d'une maille fermée

$\sum q_v = 0$ en un noeud,

tout à fait analogues aux lois électriques des mailles et des noeuds :

$\sum \Delta U = 0$ le long d'une maille fermée

$\sum i = 0$ en un noeud.

1.5.3. Circuit {R; L; C}

A) *En électricité*

Ce circuit est bien connu (!) de tous. Il est modéliser par la formule suivante :

$$\boxed{\Delta U = R\,i + L\,\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt}$$

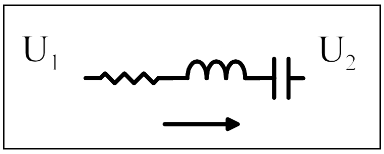


fig. Co1.31. - *R - L - C.*

B) *En mécanique de translation*

Dans le cours de dynamique des systèmes en mécanique, vous avez vu ce circuit. C'est une masse au bout d'un ressort, soumise à une force *F*, en tenant compte des frottements (visqueux).

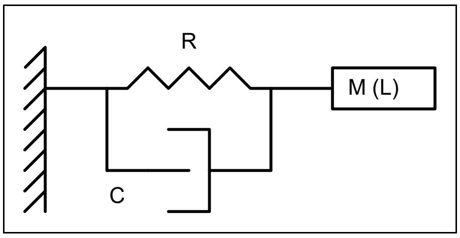


fig. Co1.32. - *"Amortisseur de voiture".*

Le tableau des analogies nous indique :		
R	➜	$R_{m\,tr}$
L	➜	$L_{m\,tr}$
C	➜	$C_{m\,tr}$

on retrouve la formule développée précédemment. Soit :

$F = b\,w + m\,\frac{dw}{dt} + k\int w\,dt$ Et si on se rappelle que : $w = \frac{dx}{dt}$, on obtient :

$$\boxed{F = b\,\frac{dx}{dt} + m\,\frac{d^2x}{dt^2} + k\,x}$$

C) *En mécanique de rotation*

Par analogie stricte, nous trouvons :

$C = b_\theta\,\omega + I_m\,\frac{d\omega}{dt} + k_\theta\int \omega\,dt$ et donc :

$$\boxed{C = b_\theta\,\frac{d\theta}{dt} + I_m\,\frac{d^2\omega}{dt^2} + k_\theta\,\theta}$$

D) *En hydraulique*

Par analogie, en remplaçant :

Le tableau des analogies nous indique :			
R	➜	R_h	$\Delta p = R_h\ q_v$
L	➜	$L_{m\ tr}$	$\Delta p = \dfrac{l_{cap}\ \rho}{A_{cap}} \dfrac{dq_v}{dt}$
C	➜	$C_{m\ tr}$	$\Delta p = \dfrac{\rho\ g}{A_{accu}} \int q_v\ dt$

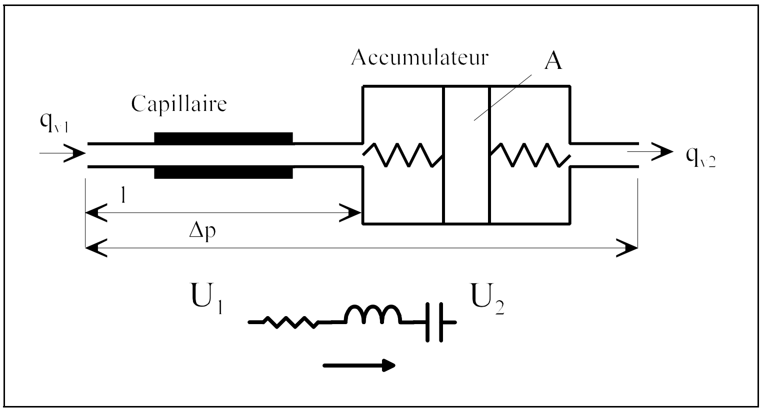


***fig. Co1.33. -** RLC en hydraulique.*

Dès lors nous obtenons :

$$\boxed{\Delta p = R_h\ q_v + \frac{\rho\ g}{A_{accu}} \int q_v\ dt + \frac{\rho\ l_{cap}}{A_{cap}} \frac{dq_v}{dt}}$$

Cette formulation n'est valable que si A_{accu}, A_{cap} et ρ sont constant et l suffisamment grand.

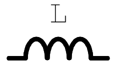
E) *En hydraulique (bis)*

Il existe aussi une autre manière d'arranger ce circuit "R,L,C". Si on tient compte de tout ce qui ce passe réellement dans un "long" tuyau, nous obtenons :

R_h ➜ Résistance du capillaire ➜

$\{ \Delta p = R_h\ q_v \}$

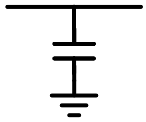
L_h ➜ Si la longueur du tuyau est grande ➜



$\{ \Delta p = \dfrac{l\ \rho}{A_{capillaire}} \dfrac{dq_v}{dt} \}$

C_h ➜ La "capacité" du tuyau n'est pas en série mais bien en parallèle. C'est la compressibilité de liquide ou la dilatation de l'enveloppe qui est l'élément de stockage.

$$\{\, q_v = \frac{A}{\rho\, g} \frac{dp}{dt} \,\} \quad \rightarrow$$



Dès lors le circuit équivalant d'un "long" tuyau est le suivant :

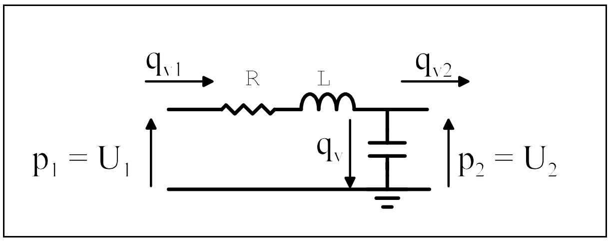


fig. Co1.38. - *RLC - Tuyau.*

$$\begin{cases} \Delta p = p_1 - p_2 = \dfrac{l\,\rho}{A_{capillaire}} \dfrac{dq_v}{dt} + R_h\, q_v \\ q_v = q_{v1} - q_{v2} = \dfrac{A}{\rho\, g} \dfrac{dp}{dt} \end{cases}$$