CHAPITRE 5. DYNAMIQUE

5.1. *Corps soumis à l'action d'une force*

5.1.1. Première équation fondamentale de la mécanique

Quel est l'effet dynamique d'une force ?

L'expérience montre que si sur un corps donné, réduit à une masse (m), on fait agir une force ($\vec{F}$), il prend un mouvement rectiligne accéléré d'accélération ($\vec{a}$) de même direction et de même sens que la force agissante.

Cet énoncé peut s'exprimer mathématiquement par l'égalité vectorielle :

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}} \quad \textbf{\textit{(éq. 5.3)}}$$

avec : $\sum \vec{F}_{ext}$: sommation des forces extérieures agissant sur le corps de masse (m) [N]

m : masse du corps sur lequel agissent les forces extérieures ($\vec{F}_{ext}$) [kg]

$\vec{a}$: accélération subie par la masse (m) [m/s^2]

C'est la *première équation fondamentale de la dynamique du point matériel* (caractérisant la translation rectiligne)

Il est bien entendu que cette somme des forces extérieures est évidemment équivalente à la résultante de ces forces s'exerçant sur le solide : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{résultante}$

<u>*Cas particuliers*</u> :

1) La force ($\vec{F}$) est constante en direction, sens et intensité : 1'accélération a même direction et même sens que la force et sa valeur est constante; le mouvement du point matériel est donc rectiligne, uniformément accéléré.

2) *La force ($\vec{F}$) est nulle* : la masse du point étant toujours différente de zéro, le vecteur accélération est nul. Deux conclusions peuvent être formulées :
- ou le corps est *immobile* ($\vec{v} = 0$ *et* $\vec{a} = 0$);
- ou il est en *mouvement rectiligne uniforme* ($\vec{v} = cst$ *et* $\vec{a} = 0$).

La connaissance du vecteur vitesse a un instant donné permet donc de définir la trajectoire et le sens du mouvement.

3) *Le point matériel est immobile dans 1'espace* ($\vec{v} = 0$ *et* $\vec{a} = 0$). Le produit $m\,\vec{a} = 0$ *et* $\vec{F} = 0$. Autrement dit, la force (ou la résultante des forces) qui sollicite le point matériel est nulle.

4) *Le point matériel se déplace dans 1'espace à vitesse constante* (en direction, sens et grandeur) : $\vec{v} = cst$ *et* $\vec{a} = 0$, produit $m\,\vec{a} = 0$. L'équation vectorielle fondamentale se réduit à : $\vec{F} = 0$; la force (on la résultante des forces) qui sollicite le point matériel est nulle.

<u>*Remarque*</u> :
L'égalité $\vec{F} = 0$ correspond aussi bien à 1'état de repos du point matériel qu'à son état de mouvement quand celui-ci est rectiligne uniforme. Pour cette raison on dit que $\vec{F} = 0$ représente à la fois la condition ***d'équilibre statique*** et la condition ***d'équilibre dynamique*** du point matériel considéré.

Ce qui précède permet d'énoncer le ***principe de l'inertie*** :

> *Lorsqu'un point matériel n'est sollicité par aucune force :*
> – *s'il est au repos, il y reste indéfiniment;*
> – *s'il est en mouvement, il conserve indéfiniment le même mouvement, c'est-à-dire la même vitesse, en direction, sens et grandeur.*

5.1.2. Principe de d'Alembert

On sait que la condition nécessaire d'équilibre statique d'un point matériel est la résultante ($\sum \vec{F}_{ext}$) de toutes les forces (actives et réactives) qui lui sont appliquées soit nulle.

D'autre part, la loi fondamentale de la dynamique d'un point de masse (m) constante, peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\sum \vec{F}_{ext} - m\,\vec{a} = 0 \quad \textbf{\textit{(éq. 5.20)}}$$

Si on décide de considérer le vecteur ($-\,m\,\vec{a}$) comme une ***force fictive*** et de l'appeler "***force d'inertie*** ($\vec{F}_{in}$)", on peut écrire la première équation fondamentale de la dynamique sous la forme :

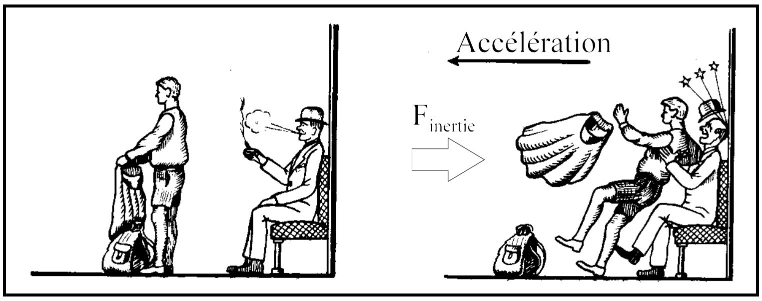
$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{in} = 0} \quad \textbf{\textit{(éq. 5.23)}}$$

On voit que dans le mouvement le plus général d'un point matériel, la résultante de toutes les forces extérieures (actives ou réactives) et de la force d'inertie ($\vec{F}_{in}$) est nulle. C'est en quelque sorte "comme si" le point matériel était en équilibre statique.

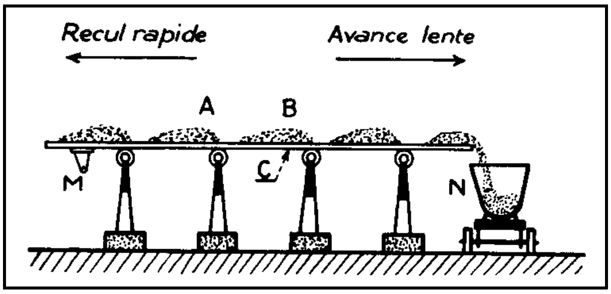
En utilisant le principe de d'Alembert, il faut toujours avoir en vue que *seules* les forces appliquées agissent effectivement sur le point et que le point est en *mouvement* et on n'introduit cette notion que pour avoir la possibilité de former les équations de la dynamique en utilisant les méthodes plus simples de la statique.

La notion de ***force d'inertie*** peut ainsi s'écrire : $\boxed{\vec{F}_{in} = -\,m\,\vec{a}}$ ***(éq. 5.25)***

> *La force d'inertie ($\vec{F}_{in}$), égale en module au produit de la masse (m) du point par son accélération ($\vec{a}$), <u>est dirigée dans le sens opposé</u> à l'accélération.*



Le transporteur à secousses est une application de cet effet d'inertie.



5.1.3. Cas particulier de la force centrifuge

Considérons un corps de masse (m) décrivant une trajectoire courbe à la vitesse (v).

Nous avons montré en cinématique qu'un mobile qui décrit une trajectoire courbe doit être soumis à une accélération normale (ou centripète) qui vaut : $a_n = \frac{v^2}{r}$ (r) étant le rayon de courbure de la trajectoire au point occupé par le mobile.

La *force d'inertie* qui est égale et opposée à la (masse x accélération centripète) est appelée *force centrifuge*. On aura donc : $\boxed{F_{in\ centrifuge} = m\frac{v^2}{r}}$ ***(éq. 5.27)***

L'examen de la relation ci-dessus montre que la force centrifuge est :

a) proportionnelle à la masse du mobile et au carré de la vitesse;
b) inversement proportionnelle au rayon de courbure.

Cette force centrifuge est reprise par :

- l'adhérence au sol dans les cas des véhicules qui se déplacent en courbe,
- des bras, des disques,… dans le cas de corps animés d'une rotation autour d'un axe.

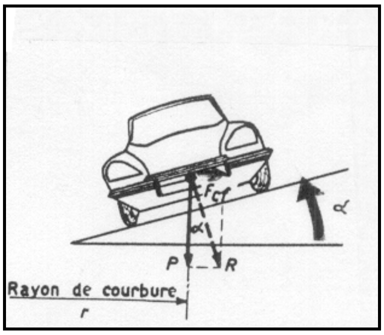
Cas particulier : relèvement des virages

Pour éviter le dérapage, on relève les virages afin que la résultante (R) du poids (P) et de la force centrifuge soit perpendiculaire à la route.

Le triangle des forces montre que :

$$tg\alpha = \frac{F_c}{P} = \frac{F_c}{m\,g} \qquad \text{avec} \qquad F_{in\ centrifuge} = m\frac{v^2}{r}$$

D'où : $tg\alpha = \dfrac{m\dfrac{v^2}{r}}{m\,g} = \dfrac{v^2}{r\,g}$



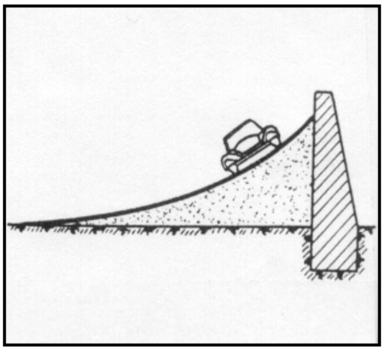
Remarques :

1) Le calcul de l'angle d'inclinaison transversale de la route effectué ci-dessus suppose le non existence de l'adhérence des pneus sur le sol. En fait cette adhérence est importante, avec : $\mu = tg\varphi = 0.5 \Rightarrow \varphi = 26°$ sur sol sec

$\mu = tg\varphi = 0.25 \Rightarrow \varphi = 14°$ sur sol humide

Il faudrait en tenir compte en diminuant l'angle théorique trouvé de (φ).

2) Si la vitesse du véhicule n'est pas constante, $tg\alpha = \dfrac{v^2}{r\,g}$ montre que, pour un rayon de courbure constant, l'angle α varie avec la vitesse. Il faudrait donc donner au profil en travers une allure progressivement relevée. C'est le cas des piste d'essais des voitures qui permettent différentes vitesses d'essais suivant les positions occupées.



Application chiffrée

Une voiture de poids 12000 N et roule à 144 km/h, sur sol mouillé, dans un virage de 250 m de rayon.
Calculez :
a) la force centrifuge
b) l'angle de relèvement du virage.

Solution :

a) *Force centrifuge* : $F_{in\ centrifuge} = m\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{12\,000}{g} \times \left(\dfrac{144\,000}{3\,600}\right)^2 \times \dfrac{1}{250} = 7\,830\ N$

b) Angle de relèvement

$tg\alpha = \dfrac{v^2}{r\,g} = \dfrac{40^2}{250 \times 9.81} = 0.652 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 33.12°$ (Sans tenir compte de l'adhérence)

Angle réel : $\alpha = 33.12° - 14° = 19.12°$

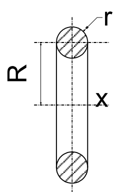
5.2. *Moment d'inertie*

Définition (Voir aussi Chapitre 8)

> *Nous définirons le **moment d'inertie** d'un corps comme étant la **somme des produits de masses** élémentaires de ce corps par le **produit** du **carré de leur distance** à un élément de référence qui peut être un point, une droite ou un plan.*

$I_m = m\,r^2 + m'\,r'^2 + m''\,r''^2 + \ldots$ ou $\boxed{I_m = \sum_{i=1}^{n} m_i\,r_i^2}$ ***(éq. 5.37)*** [kg.m²]

Le moment d'inertie caractérise ainsi grossièrement la dispersion des masses autour de l'élément de référence : il est d'autant plus grand qu'il y a plus de masses élevées à grande distance de l'élément de référence.

Valeur de l'inertie de masse (I_m) dans les cas usuels	
Barre prismatique, de longueur (l) tournant par rapport à son centre	$I_m = \frac{1}{12} m\, l^2$
Barre prismatique, de longueur (l) tournant par rapport à sa base (b)	$I_m = \frac{1}{3} m\, l^2$
Cylindre plein de rayon (r) et de longueur (l) tournant par rapport à son axe longitudinal	$I_m = \frac{1}{2} m\, r^2$
Cylindre creux de rayon extérieur (r_{ext}) et de rayon intérieur (r_{int}) tournant par rapport à son axe longitudinal	$I_m = \frac{1}{2} m \left(r_{ext}^2 + r_{\text{int}}^2 \right)$
Anneau circulaire mince de rayon (r_{moy}) tournant par rapport à son centre	$I_m = m\, r_{moy}^2$
Sphère pleine de rayon (r)	$I_m = 0.4\, m\, r^2$
Mouvement linéaire d'une masse (m) tangent à un cercle (galet) de rayon (r)	$I_m = m\, r^2$ [*] $I_m \approx 91.2\, m \frac{v^2}{n^2}$
Tore par rapport à l'axe x 	$I_m = m \left(R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right)$

Dans ce dernier cas **[*]**, on peut modifier la formule afin d'obtenir le moment d'inertie de masse, non pas en fonction du rayon du galet, mais en fonction de la vitesse de translation (v) de la masse (m) et de la vitesse de rotation (n) du galet.

On sait : $v = \omega\, r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{v}{\omega}$ et si on se souvient que $\omega = \frac{2\,\pi\, n}{60}$, on obtient : $r = \frac{v}{\omega} = \frac{30}{\pi} \frac{v}{n}$, avec (v) en [m/s] et (n) en [tr/min].

Si on remplace cette dernière équation dans **[*]**, on trouve pour un mouvement linéaire d'une masse (m) tangent à un cercle (galet) : $I_m = \frac{30^2}{\pi^2} m \frac{v^2}{n^2} \approx 91.2\, m \frac{v^2}{n^2}$

5.3. *Corps soumis à l'action d'un couple*

5.3.1. Deuxième équation fondamentale de la mécanique

Quel est l'effet dynamique d'un couple ?

L'expérience montre que si sur un corps donné de masse (m) on fait agir un couple ($\vec{C}$), il prend un mouvement circulaire accéléré d'accélération angulaire ($\vec{\varepsilon}$) de même sens que le couple agissant.

Cet énoncé peut s'exprimer mathématiquement par l'égalité vectorielle :

$$\boxed{\sum \vec{C}_{ext} = I_m\ \vec{\varepsilon}} \quad \textbf{\textit{(éq. 5.52)}}$$

avec : $\sum \vec{C}_{ext}$: sommation des couples extérieurs agissant sur le corps [Nm]
I_m : inertie de masse du corps sur lequel agissent les couples ($\vec{C}$) [kgm²]
$\vec{\varepsilon}$: accélération angulaire subie par la masse (m) [rad/s²]

C'est la *seconde équation fondamentale de la dynamique du point matériel* (caractérisant la rotation).

Il est bien entendu que cette somme des couples extérieures est évidemment équivalente à la résultante de ces couples s'exerçant sur le solide : $\sum \vec{C}_{ext} = \vec{C}_{résultante}$.

5.3.2. Principe de d'Alembert

Sans refaire toute la démonstration, on peut en déduire que le principe de la "force d'"inertie" peut aussi s'appliquer au couple. Et donc, il en découle la notion de :

couple d'inertie : $\boxed{\vec{C}_{in} = -\ I_m\ \vec{\varepsilon}}$ ***(éq. 5.57)***

Le couple d'inertie ($\vec{C}_{in}$), égal en module au produit du moment d'inertie de masse (I_m) du corps par son accélération angulaire ($\vec{\varepsilon}$), <u>est dirigé dans le sens opposé</u> à l'accélération angulaire.

<u>*Remarque*</u> :
Nous pouvons exprimer la seconde équation fondamentale de la mécanique au moyen de l'expression suivante : $\boxed{\left|\vec{C}_{in}\right| = -\ I_m\ \dfrac{n}{9.55\,t}}$ ***(éq. 5.58)*** (Si la vitesse initiale (ω_0) est nulle)

avec : n : la vitesse de rotation [tr/min]
t : le temps d'accélération [s]

En effet, $\omega = \varepsilon\, t \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \dfrac{\omega}{t} = \dfrac{\pi\, n}{30\, t} = \dfrac{n}{9.55\, t}$ et remplaçant (ε) dans la seconde équation fondamentale de la mécanique on obtient l'expression ci-dessus.

5.4. *Travail mécanique*

5.4.1. Définition

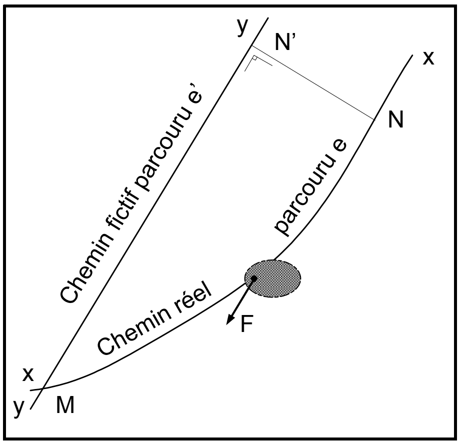
> *Définition : on dit qu'une force effectue un travail quand il y a déplacement de son point d'application.*

a) Travail moteur : force et déplacement dans le même sens.
b) Travail résistant : force et déplacement en sens contraires.

5.4.2. Expressions du travail

A) *Cas général* : Force constante en grandeur et en direction avec trajectoire quelconque.

L'expression générale du travail est définie par le *produit de la force par le chemin parcouru* projeté sur la direction de la force. $\boxed{W = \vec{F} \bullet \vec{e}}$ ***(éq. 5.60)***



Soit une force F de grandeur et de direction constantes dont le point d'application A se déplace sur la trajectoire quelconque xx depuis le point M jusqu'au point N.

- Par M (point de départ), traçons une droite yy parallèle à la direction de la force F.
- Par N (point d'arrivée), abaissons la perpendiculaire sur yy. D'où le point N'.

MN est le chemin parcouru réel = e
MN' est le chemin parcouru fictif = e'

D'après la définition, on a : $\boxed{W = F\ e'}$ ***(éq. 5.61)***

Dans le système international (SI), l'unité de travail est le : *joule [J]*.

> *Définition : le joule [J] est le travail effectué par une force de 1 [N] lors de son déplacement sur 1 [m]. Le joule est donc égal à 1 [N] x 1 [m].*

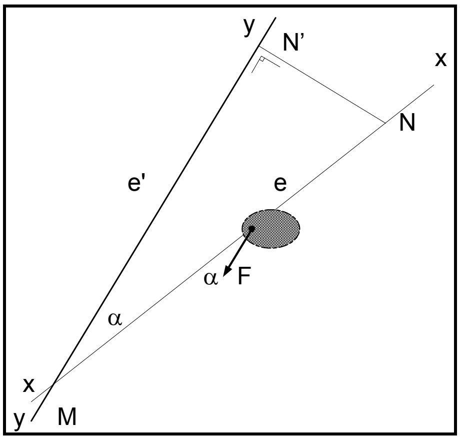
Dans l'ancien système des mécaniciens (MkpS), l'unité de travail était le : *kilogramme-mètre [kgm] alors qu'il aurait fallu dire le kilogramme-force-mètre [kgfm] ou kilogramme-poids-mètre [kg'm]*.

La relation entre les deux systèmes est :

> 1 kgm = 1 kg'm = 9.81 N x 1 m = 9.81 J
> 1 J = 0.102 kgm

B) *Cas particuliers*

1) *La trajectoire est une droite oblique par rapport à F*



Dans ce cas, le chemin parcouru fictif

$MN' = MN \cos\alpha = e \cos\alpha$

et le travail vaudra : $\boxed{W = F\, e \cos\alpha}$ ***(éq. 5.63)***

2) *La trajectoire est confondue avec la direction de la force*

Dans ce cas, le chemin parcouru fictif est le même que le chemin parcouru réel et on écrira :

$\boxed{W = F\, e}$ ***(éq. 5.64)***

3) *La trajectoire est perpendiculaire à la direction de la force*

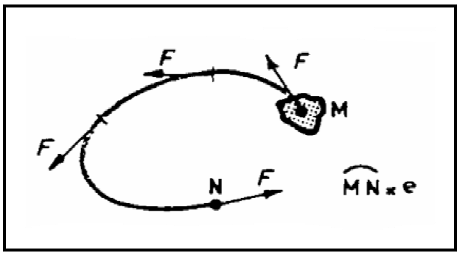
Dans ce cas, le chemin parcouru fictif se ramène à un point. Donc $e' = 0$ et on aura :

$\boxed{W = 0}$ ***(éq. 5.66)***

4) *La force est constante en grandeur, mais de direction constamment tangente à la trajectoire*

La force est constante en grandeur, mais de direction constamment tangente à la trajectoire.
L'examen de la figure montre que le chemin fictif est égal au chemin réel.
On aura donc $e' = e$ et :

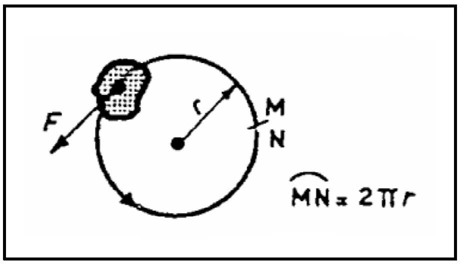
$\boxed{W = F \times arc\ parcouru}$ ***(éq. 5.68)***



5) *La force est constante en grandeur, mais de direction constamment tangente à une trajectoire circulaire*

C'est un cas particulier du point 4.
Le travail par tour vaudra :

$\boxed{W = F \times arc\ parcouru = F\, 2\, \pi\, r}$ ***(éq. 5.69)***



et le travail pour un nombre de tours (N) :

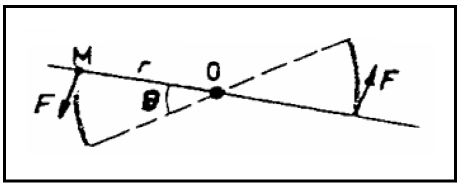
$\boxed{W_N = F\, 2\, \pi\, r\, N}$ ***(éq. 5.70)***

6) *Cas du couple* (variante du cas 5)

$$W = F\, e + F\, e \quad avec \quad e = \theta\, r$$

$$W = F\, 2\, \theta\, r = F\, d\, \theta$$

$$Mais \quad F\, d = C$$



Le travail s'exprime donc par :

$\boxed{W = C\, \theta}$ ***(éq. 5.72)*** (Avec θ en radians (!))

7) *Force non constante*

Dans un tel cas, il faut considérer l'effort moyen et on écrira : $W = F_{moy}\ e = \int F\ de$

Dans le cas d'une force non constante variant progressivement (de manière linéaire) d'une valeur nulle à un maximum (F_{max}), on peut écrire :

$$F_{moy} = \frac{0 + F_{max}}{2} = \frac{F_{max}}{2} \qquad \text{et donc :} \qquad \boxed{W = \frac{F_{max}}{2} e}$$

Ce travail de déformation c'est aussi l'énergie emmagasinée dans le ressort.
L'exemple type est le ressort (hélicoïdal ou à lames ou barre de torsion). En raison de la proportionnalité entre la force (F) et la déformation (x), (F) passe progressivement de 0 à (F_{max}).

Application chiffrée

Un ressort s'est déformé de 120 mm sous une charge de 8000 N, calculez le travail de déformation.

Solution :

Le travail de déformation est : $W = \frac{F_{max}}{2} e = \frac{8\,000}{2} \times 0.12 = 480\ J$

5.5. *Puissance mécanique*

5.5.1. Définition

Définition : la puissance est le travail effectué en une seconde.

D'après la définition générale, l'expression générale de la puissance s'exprime par :

$$\boxed{P = \frac{W}{t}} \quad \textbf{\textit{(éq. 5.77)}}$$

avec :	P	: puissance	[W]	(le Watt)
	W	: travail	[J]	(le Joule)
	t	: le temps	[s]	

Dans le système international (SI), l'unité de puissance est le : *watt [W]*.

Définition : le watt [W] est la puissance effectué par un travail de 1 [J] pendant 1 [s]. Le watt est donc égal à 1 [J] / 1 [s].

Dans l'ancien système des mécaniciens (MkpS), l'unité de puissance était le : *kilogramme-mètre/seconde [kgm/s] ainsi que le chaval vapeur [Ch] ou [CV] qui vaut par définition 75 kgm/s.*

La relation entre les deux systèmes est :

1 CV = 75 kgm/s = 75 x 9.81 J / s ≈ 736 W 1 W = 1.36 10^{-3} CV

5.5.2. Expression particulière de la puissance

A) *En translation*

Dans le cas où la force (F) est constante, à la même direction que le déplacement, et est animée d'une vitesse (v), on a :

$W = F\ e$, l'expression de la puissance devient : $P = \dfrac{F\ e}{t}$, mais : $\dfrac{e}{t} = v$

et donc : $\boxed{P = F\ v}$ ***(éq. 5.81)***

avec : F : la force [N]
v : la vitesse [m/s]

Application chiffrée

1) Une locomotive exerce sur la rame un effort de traction de 40000N. Elle parcourt 72 km en 1 h 15 min. Calculez sa puissance.

Solution :

Calcul de la vitesse : $v = \dfrac{72\,000}{75 \times 60} = 16\ m/s$

La puissance vaut : $P = F\ v = 40\,000 \times 16 = 640\,000\ W = 640\ kW$

----

2) Un pont roulant soulève une charge de 50 kN à la vitesse de 12 m/min. Calculez :
a) la puissance au crochet
b) la puissance absorbée par le moteur si le rendement du treuil est de 70 % et celui du moteur de 95 %
c) la puissance à prévoir au moteur si la sécurité est de 25 %.

Solution :

a) *Puissance au crochet* : $P_{crochet} = F\ v = 50\,000 \times \dfrac{12}{60} = 10\,000\ W$

b) *Puissance absorbée* : $P_{abs} = \dfrac{P_{crochet}}{\eta_{treuil}\ \eta_{moteur}} = \dfrac{10\,000}{0.70 \times 0.95} = 15038\ W$

c) *Puissance moteur* : $P_{moteur} = 15\,038 \times 1.25 \approx 18\,800\ W$

B) *En rotation*

Dans le cas d'un couple constant qui tourne à la vitesse (ω), on a :

$W = C\,\theta$, l'expression de la puissance devient : $P = \dfrac{C\,\theta}{t}$, mais : $\dfrac{\theta}{t} = \omega$

et donc : $\boxed{P = C\,\omega}$ ***(éq. 5.90)***

avec : C : le couple [N.m]
ω : la vitesse angulaire [rad/s]

C) *Pompe (P_P), Ventilateur (P_V)*

Repartons de la formule générale de la puissance : $P = \dfrac{W}{t} = \dfrac{F\,d}{t}$; dans ce cas si, la “force” travaillante c’est le poids du liquide qui effectue une variation de hauteur (h). Il vient :

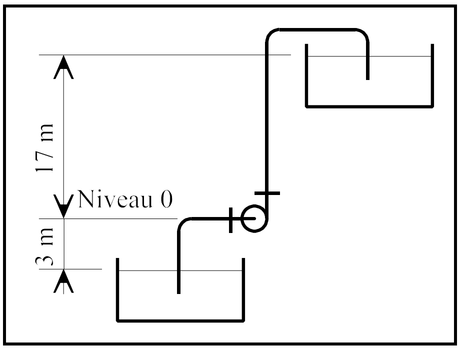
$$P = \frac{m\,g\,\Delta h}{t} = \frac{m}{t}\,g\,\Delta h = q_m\,g\,\Delta h = q_v\,\rho\,g\,\Delta h = q_v\,\Delta p$$

$\boxed{P_V = q_v\,\Delta p}$ ***(éq. 5.93)***

avec : q_v : débit volumique $[m^3/s]$
q_m : débit massique [kg/s]
Δp : variation de pression totale [Pa]
Δh : variation de hauteur totale [m]
ρ : masse volumique $[kg/m^3]$
g : accélération de la pesanteur (g = 9.81) $[m/s^2]$

Application chiffrée

Une pompe débite 30 m^3/h d’acide (masse volumique ρ = 1400 kg/m^3) depuis le niveau - 3 m jusque + 17 m. Calculez la puissance absorbée par la pompe sachant que les pertes par frottement de l’acide sont de 10 % et que le rendement de la pompe est de 72 %.



Solution :
Recherche de la puissance nette

$$P_{nette} = q_v\,\rho\,g\,\Delta h = \frac{30}{3600} \times 1400 \times 9.81 \times 20 = 2\,289 \text{ W}$$

Recherche de la puissance brute (nette + pertes)

$$P_{nettte\ +\ pertes} = 2\,289 + 0.1 \times 2\,289 = 2517.9 \text{ W}$$

Puissance réelle absorbée par la pompe

$$P_{absorbée} = \frac{P_{nette\ +\ pertes}}{\eta_{pompe}} = \frac{2\,517.9}{0.72} = 3\,497 \text{ W}$$

5.6. *Energie mécanique*

5.6.1. Définition

> *Définition : un corps possède de l'énergie quand il est capable d'effectuer un travail.*

En mécanique, il existe deux sortes d'énergie :

- énergie potentielle (sans mouvement) : corps situé à une certaine hauteur, ressort bandé, …
- énergie cinétique (de mouvement) : corps lancé

Dans le système international (SI), l'unité de l'énergie est : *joule [J]*.
En effet il y a équivalence entre l'énergie et le travail.

Pour les machines importantes, les électriciens utilisent comme unité le ***kilowatt heure*** *[kWh] qui est le travail effectué pendant une heure par une machine de 1 kW.*

La relation entre les deux unités est la suivante :

1 kWh	= 1000 W x 3600 s = 3.6 MJ
1 kJ	= 2.78 10^{-4} kWh

5.6.2. Les espèces d'énergie mécanique

A) *Energie potentielle (sans mouvement)*

Considérons un corps au repos de poids (P) situé à une hauteur (h) par rapport à un plan de comparaison (π).

L'énergie potentielle est égale au travail qu'il aurait fallu dépenser pour le soulever depuis (π) jusqu'en (h). On écrira donc :

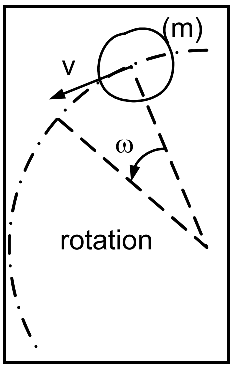
$$\boxed{E_p = P\,h = m\,g\,h} \quad \textit{(éq. 5.97)}$$

B) *Energie cinétique de translation (mouvement rectiligne)*

Abandonnons le corps ci-dessus. Il descend en chute libre et quand il atteindra le plan (π) sa vitesse vaudra (chute des corps) : $v = \sqrt{2\,g\,h} \quad \Rightarrow \quad h = \dfrac{v^2}{2\,g}$

En remplaçant cette valeur dans l'équation de l'énergie potentielle, on aura finalement :

$$\boxed{E_{c\ trans} = \frac{m\,v^2}{2}} \quad \textit{(éq. 5.99)}$$



C) *Energie cinétique de rotation (mouvement circulaire)*

Considérons un corps de masse (m) animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire (ω) autour d'un axe. D'après (2) son énergie vaut : $E_c = \dfrac{m\,v^2}{2}$.

Sachant que la vitesse de translation est relié à la vitesse de rotation par $v = \omega\,r$, on obtient :

$$E_c = \frac{m\,v^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\omega\,r\right)^2$$

De plus, le moment d'inertie s'exprime par : $I_m = m\,r^2$, et donc finalement :

$$\boxed{E_{c\,rot} = \frac{I_m\,\omega^2}{2}}\ \textit{(éq. 5.104)}$$

D) *Energie totale*

Considérons un corps de masse (m) situé à (h) mètres d'un plan de comparaison (π), animé d'une vitesse de translation (v) et d'une vitesse angulaire (ω).

Son énergie totale dépend de trois énergies partielles et vaut :

$$\boxed{E_{tot} = m\,g\,h + \frac{m\,v^2}{2} + \frac{I_m\,\omega^2}{2}}\ \textit{(éq. 5.105)}$$

5.7. *Variation de l'énergie mécanique*

5.7.1. Conservation de l'énergie

Un corps évolue dans l'espace. Quand il se trouve en A, son énergie totale est E_A . Quand il se trouve en B, son énergie totale est E_B . *Si aucun travail (ni moteur, ni résistant) n'est effectué entre A et B*, l'énergie en A est égale à l'énergie en B.

C'est **le principe de conservation de l'énergie**.

Considérons un corps dans une position A (hauteur h et vitesse nulle). Son énergie est uniquement potentielle et vaut : $E_A = m\,g\,h$

Abandonnons le à lui-même : il tombe. Après un certain temps, nous le trouvons en B, au niveau du plan de comparaison (π). A ce moment, son énergie est uniquement cinétique et vaut : $E_B = \frac{m\,v^2}{2}$

Si on se rappelle que la vitesse en chute libre vaut : $v = \sqrt{2\,g\,h}$

Remplaçons cette vitesse dans (E_B), il vient : $E_B = \frac{m\,v^2}{2} = \frac{m\left(2\,g\,h\right)}{2} = m\,g\,h = E_A$

ce qui montre que l'énergie en A est égale à l'énergie en B.

5.7.2. Transformation de l'énergie en travail

Un corps évolue horizontalement depuis une situation A jusqu'à une situation B. Quand il passe en A, son énergie est (E_A). Entre A et B on lui communique un travail (W). Quand il passe en B, son énergie a, bien sûr, augmenté et vaut $E_B > E_A$.

L'énergie en B (E_B) est égale à l'énergie en A (E_A) augmentée du travail (W), et on écrira :

$$E_A = E_B + W$$

Soit un corps de masse m soumis à l'action d'une force F. Il prend une accélération a définie par :

$$F = m\,a$$

Après t secondes, il est en A, a parcouru une distance (e), et le travail de la force (F) vaut :

$W = F\, e$

Après t' secondes, il est en B, a parcouru une distance (e'), et le travail de la force (F) vaut :

$W' = F\, e'$

La variation de travail entre les positions A et B vaut : $W' - W = F\, e' - F\, e$

mais : $\begin{cases} e' = \dfrac{a\, t'^2}{2} = \dfrac{a^2\, t'^2}{2\,a} = \dfrac{v'^2}{2\,a} \\ e = \dfrac{a\, t^2}{2} = \dfrac{a^2\, t^2}{2\,a} = \dfrac{v^2}{2\,a} \end{cases}$

et donc la variation de travail devient : $W' - W = F\,\dfrac{v'^2}{2\,a} - F\,\dfrac{v^2}{2\,a}$

Si on remarque que $\dfrac{F}{a} = m$, on aura :

$$\frac{m\, v'^2}{2} - \frac{m\, v^2}{2} = W' - W \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\Delta E_c = W}\ \textbf{\textit{(éq. 5.119)}}$$

Le travail (W) comprend le travail de *toutes* les forces extérieures et donc aussi de la force de pesanteur s'il échet.

D'où le **théorème de l'énergie cinétique** :

> *<u>Définition</u> : La variation d'énergie cinétique d'un corps dans un intervalle de temps est égale au travail de la résultante des forces extérieures agissante durant ce temps.*

Au lieu d'avoir une force agissant dans le sens du mouvement, on pourrait avoir une force agissant en sens contraire provoquant un travail résistant avec diminution de la vitesse.

<u>Cas particulier</u> : Le problème du freinage des véhicules (distances de freinage)

Le freinage des véhicules est dû uniquement à l'adhérence des pneus sur le sol. Pour une voiture de poids (p), la force de frottement (F_f) vaut : $F_f = \mu\, P = \mu\, m\, g$

avec : μ : coefficient de frottement (μ ≈ 0.5 sur sol sec)
(μ ≈ 0.25 sur sol mouillé)

Le véhicule de poids (P) roule à la vitesse (v). Lors du freinage, la force de frottement (F_f) s'oppose au mouvement et ce sur une distance (e). On écrira :

$\Delta E_c = E_{c\,B} - E_{c\,A} = W$

Avec : $E_{c\,A} = \dfrac{m\, v^2}{2}$ $\quad et \quad$ $E_{c\,B} = 0\,(arrêt)$

$W = F\, e = \mu\, P\, e = \mu\, m\, g\, e$

et donc : $0 - \dfrac{m\, v^2}{2} = \mu\, m\, g\, e$

et la distance de freinage s'exprime par : $\boxed{e = \dfrac{v^2}{2\, g\, \mu} \approx \dfrac{v^2}{20\, \mu}}$ ***(éq. 5.125)***

Il est à remarquer que cette distance est <u>*indépendante*</u> du poids du véhicule.

Application chiffrée

Une voiture roule à 90 km/h sur sol sec. Calculez la distance de freinage sachant que $\mu = 0.5$ et que le temps de réflexe est de 3/4 de seconde.

Solution :

Distance de freinage : $$e = \frac{v^2}{2\,g\,\mu} = \frac{\left(90\,000/3\,600\right)^2}{2 \times 9.81 \times 0.5} = 63.71\,m$$

Distance parcourue pendant le réflexe : $$e' = v\,t = \frac{90\,000}{3\,600} \times 0.75 = 18.75\,m$$

Distance totale : $$e_{tot} = 63.71 + 18.75 = 82.46\,m$$

5.7.3. Cas général de la transformation de l'énergie en travail

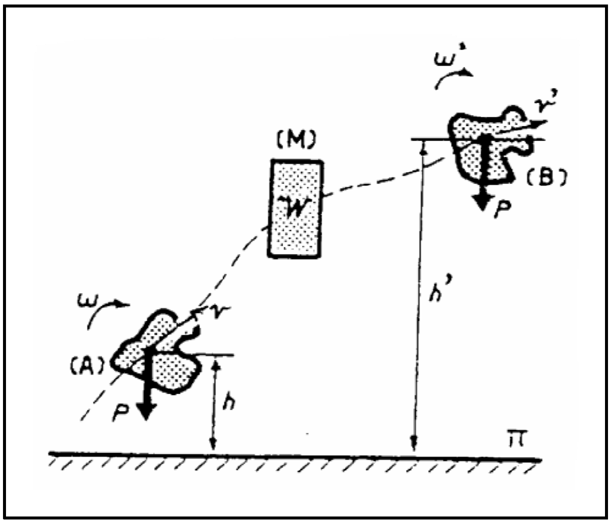
(Cas des machines)

Soit un corps de poids P = m g qui, dans la position (A) est à la hauteur h et est soumis à une translation linéaire de vitesse (v) et à une rotation de vitesse angulaire (ω).

Dans une machine (M) on lui communique (ou il communique) un travail (W).

On le retrouve ensuite dans la position (B).

Il est à la hauteur (h') et est soumis à une translation linéaire de vitesse (v') et à une rotation de vitesse angulaire (ω').



Trois cas sont possibles :

1) On lui communique un travail ($E_B > E_A$) : $E_B = E_A + W$

2) Il communique un travail ($E_B < E_A$) : $E_B = E_A - W$

3) Aucun travail ($E_B = E_A$) : $E_B = E_A$ (Conservation de l'énergie)

D'une façon générale : $\boxed{E_B = E_A \pm W}$ ***(éq. 5.132)***

+ W si (M) est un moteur,
− W si (M) est un récepteur.

Remarque :
Si le déplacement et la force sont :
- de même sens : le travail (W) est positif (+)
- de sens contraire : la travail (W) est négatif (-)

5.7.4. Equation générale d'équivalence

La relation ***(5.132)*** peut s'écrire mathématiquement sous la forme :

$$\boxed{m\,g\,h' + \frac{m\,v'^2}{2} + \frac{I_m\,\omega'^2}{2} = m\,g\,h + \frac{m\,v^2}{2} + \frac{I_m\,\omega^2}{2} \pm W}$$ ***(éq. 5.134)***

On peut encore l'écrire sous la forme condensée : $\boxed{\Delta E_{tot} = \pm W}$ ***(éq. 5.135)***

et qui peut s'énoncer de la manière suivante :

> *Définition : La variation d'énergie totale d'un corps entre deux positions est égal au travail effectué (ou reçu) par ce corps.*

Dans ce cas, le travail (W) *ne comprend pas* le travail de la force de pesanteur.