1.01. Dans un plan orienté Oxy, représenter les vecteurs suivants et en calculer les projections. (A : origine; B : extrémité)

$\vec{V}_1$: A (4.5; 4.8); B (− 1.8; 1.6)

$\vec{V}_2$: $\left\|\vec{V}_2\right\| = 5\,cm$; $\alpha = -\dfrac{\pi}{3}$

$\vec{V}_3$ (glissant) : ligne d'action : $4\,x + 3\,y - 6 = 0$; $\left\|\vec{V}_3\right\| = 5\,cm$; sens : x croissants

$\vec{V}_4$ ligne d'action : $y = 3/2\,x - 3$; $x_A = 3$ et $x_B = 1$

Réponses : $V_{1x} = -6.3$ $V_{1y} = -3.2$ $\left\|\vec{V}_1\right\| = 7.07\,cm$

$V_{2x} = +2.5$ $V_{2y} = -4.33$

$V_{3x} = +3.0$ $V_{3y} = -4.0$

$V_{4x} = -2.0$ $V_{4y} = -3.0$

1.02. Dans un plan orienté Oxy, représenter les vecteurs suivants et en calculer les modules. (A : origine).

$\vec{V}_1$: $\vec{V}_1 = 4\,\vec{1}_x + 5\,\vec{1}_y$, appliqué en A (3; 1)

$\vec{V}_2$: A (2; −3) $V_{2x} = -4$ $\alpha_2 = +135°$

$\vec{V}_3$: A (4; 4) $V_{3y} = +3$ $\alpha_3 = +80°$

$\vec{V}_4$ (glissant) : ligne d'action : $y = -10\,x - 20$; $V_{4x} = -2$

Réponses : $\left\|\vec{V}_1\right\| = 6.4$ $\left\|\vec{V}_2\right\| = 5.66$ $\left\|\vec{V}_3\right\| = 3.05$ $\left\|\vec{V}_4\right\| = 20.1$

1.03. Dans un espace orienté Oxyz, calculer les projections et le module d'un vecteur $\vec{V}$ dont l'origine a pour coordonnées A (3; 5; 7) et l'extrémité B (−3; 3; 1)

Réponses : $V_x = -6$ $V_y = -2$ $V_z = -6$ $\left\|\vec{V}\right\| = 8.72$

1.04. Dans un espace orienté Oxyz, calculer les projections d'un vecteur $\vec{V}$ glissant sur la droite définie par les deux plans $\pi_1 \equiv x + z - 4 = 0$ et $\pi_2 \equiv y = 5$. Le module vaut $\left\|\vec{V}\right\| = 3$ et le vecteur est dirigé vers les z négatifs.

Réponses : $V_x = 2.12$ $V_y = 0$ $V_z = -2.12$

1.05. Dans un espace orienté Oxyz, un vecteur $\vec{V}$ dont le module $\left\|\vec{V}\right\| = 12$, a pour ligne d'action une droite pour laquelle $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ et $\beta = \dfrac{5\,\pi}{12}$. Quelles sont les projections de ce vecteur sur les 3 axes, sachant que le vecteur est orienté dans le sens des z croissants ?

Réponses : $V_x = 6$ $V_y = 3.11$ $V_z = 9.92$

1.06. Dans un espace orienté Oxyz, un vecteur $\vec{V}$ appliqué en O a pour ligne d'action la bissectrice du trièdre de référence. Calculer les angles de cette bissectrice avec les axes et les projections de $\vec{V}$ dont le module vaut 10 et le sens est celui des x positifs.

<u>Réponses</u> : $\alpha = \beta = \gamma = 54.74°$; $V_x = V_y = V_z = 5.77$.

1.07. Dans un espace orienté Oxyz, un vecteur glissant $\vec{V}$ a pour ligne d'action la droite définie par les deux plans $\pi_1 \equiv x + y + z = 5$ et $\pi_2 \equiv z = 3$. Son module vaut 6. Il a pour sens celui des y positifs. Calculer ses projections.

<u>Réponses</u> : $V_x = -3\sqrt{2}$; $V_y = 3\sqrt{2}$; $V_z = 0$.

1.08. Dans un plan orienté Oxy, 2 vecteurs sont donnés par les expressions $\vec{V}_1 = 4\,\vec{1}_x + 3\,\vec{1}_y$ et $\vec{V}_2 = -3\,\vec{1}_x + 4\,\vec{1}_y$. Calculer le module des vecteurs, leur résultante, le produit scalaire $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2$ et le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$.

<u>Réponses</u> : $\vec{R} = \vec{1}_x + 7\,\vec{1}_y$; $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = 0$; $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 25\,\vec{1}_z$.

1.09. Dans un plan orienté Oxy, 2 vecteurs sont donnés par les expressions :

$\left\|\vec{V}_1\right\| = 8$; $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{3}$ et $\left\|\vec{V}_2\right\| = 10$; $\alpha_2 = \pi$

Calculer la résultante, la différence $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$, le produit scalaire et le produit vectoriel de ces vecteurs.

<u>Réponses</u> : $\vec{R} = -6\,\vec{1}_x + 6.93\,\vec{1}_y$; $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = -40$; $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 69.3\,\vec{1}_z$.

1.10. Mêmes questions qu'au problème ***1.09.*** avec :

$\left\|\vec{V}_1\right\| = 6$; $\alpha_1 = 19.50°$ et $\left\|\vec{V}_2\right\| = 4$;

L'angle entre $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$: 120°

<u>Réponses</u> : $\vec{R} = 2.61\,\vec{1}_x + 4.60\,\vec{1}_y$; $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = -12$; $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 20.8\,\vec{1}_z$.

1.11. Calculer la résultante d'un système plan de 3 vecteurs glissants, définis comme suit :

$\vec{V}_1$: ligne d'action : $y = 4x$; $\left\|\vec{V}_1\right\| = 4.12$; sens : x croissants;

$\vec{V}_2$: ligne d'action : $y = 2x - 3$; $\left\|\vec{V}_2\right\| = 4.47$; sens : x décroissants;

$\vec{V}_3$: ligne d'action : $y = 5$; $\left\|\vec{V}_3\right\| = 1$; sens : x croissants;

<u>Réponse</u> : $\vec{R} = \vec{0}$.

1.12. Trois vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ sont définis, dans un espace orienté Oxyz, par leur module et les angles α, β et γ. Calculer la résultante de ces vecteurs avec ses projections et ses angles avec les 3 axes.

$\vec{V}_1$: $\|\vec{V}_1\| = 7.68$; $\alpha_1 = 67.00°$ $\beta_1 = 49.46°$ $\gamma_1 = 49.46°$

$\vec{V}_2$: $\|\vec{V}_2\| = 6.40$; $\alpha_2 = 108.21°$ $\beta_2 = 159.72°$ $\gamma_2 = 81.03°$

$\vec{V}_3$: $\|\vec{V}_3\| = 8.30$; $\alpha_3 = 103.95°$ $\beta_3 = 83.11°$ $\gamma_3 = 164.58°$

<u>Réponses</u> : $\vec{R} = -1\,\vec{1}_x - 2\,\vec{1}_z$; $\alpha_R = 116.575°$; $\beta_R = 90.00°$; $\gamma_R = 153.44°$.

1.13. Calculer le module et les projections des 4 vecteurs définis comme suit :

$\vec{V}_1 = \overrightarrow{A_1 B_1}$ avec : A_1 (4; 0; 2) et B_1 (1; −5; 5);

$\vec{V}_2 = +3\,\vec{1}_x - 4\,\vec{1}_y - 5\,\vec{1}_z$;

$\vec{V}_3$: $\|\vec{V}_3\| = 6.78$; $\alpha_3 = 116.26°$; $\beta_3 = 27.75°$; $\gamma_3 = 81.52°$

$\vec{V}_4$: dans Oyz : A_4 (0; 2; 2) $\|\vec{V}_4\| = 10$ $\beta_4 = 60°$ sens : y croissants

Calculer la résultante.

<u>Réponse</u> : $\vec{R} = -3\,\vec{1}_x + 2\,\vec{1}_y + 7.66\,\vec{1}_z$.

1.14. Dans un espace orienté Oxyz, le vecteur $\vec{V}_1$ est appliqué en P (0; 0; 5) avec $\alpha_1 = \pi/2$, $\beta_1 = \pi/6$ et $\|\vec{V}_1\| = 6$, il est dirigé dans le sens des z croissants. Le vecteur $\vec{V}_2$ est un vecteur de position, égal à $\overrightarrow{MP}$ avec M (1; 4; 0). Calculer : $\overrightarrow{MP} \wedge \vec{V}_1$.

<u>Réponse</u> : $\overrightarrow{MP} \times \vec{V}_1 = -38\,\vec{1}_x + 3\,\vec{1}_y - 5.2\,\vec{1}_z$ et $\left\|\overrightarrow{MP} \times \vec{V}_1\right\| = 38.5$.

1.15. Trouver tous les vecteurs $\vec{X}$ tels que $\vec{V}_1 \bullet \vec{X} = p$ ($\vec{V}_1$ et p étant donnés)

<u>Réponse</u> : $\vec{X} = \dfrac{p\,\vec{V}_1}{\|\vec{V}_1\|^2} + \vec{V}_2 \times \vec{V}_1$ où $\vec{V}_2$ est un vecteur arbitraire quelconque.

1.16. Dans une base orthonormée Oxyz, on donne deux vecteurs :

$\vec{V}_1$: $\|\vec{V}_1\| = 10$; vecteur glissant, dans le plan $z = 2$, sur ligne d'action $x - y = 0$, dans le sens des x négatifs.

$\vec{V}_2 = 5\sqrt{2}\,\vec{1}_x + 5\sqrt{2}\,\vec{1}_y + \sqrt{21}\,\vec{1}_z$ (vecteur libre)

On demande : le module de $\vec{V}_2$; les angles α, β et γ que fait $\vec{V}_2$ avec les axes Ox, Oy et Oz; l'angle δ angle entre $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$; le produit vectoriel $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$.

<u>Réponses</u> : $\|\vec{V}_2\| = 11$; $\alpha = \beta = 50°$ et $\gamma = 65.38°$; $\delta = 155.38°$;

$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = -5\sqrt{42}\,\vec{1}_x + 5\sqrt{42}\,\vec{1}_y$.

1.17. Dans une base orthonormée Oxyz (graduations en *cm*), on donne les points A (2; 2; 2), B (2; 3; 5) et C (4; 3; 2), sur lesquels on construit un parallélogramme. Calculer sa superficie.

Réponse : $S = 7\ cm^2$.

1.18. Dans une base orthonormée Oxyz, on demande de calculer le volume du parallélépipède, tel que représenté ci−après, construit sur les quatre points O (0; 0; 0), A (2; 2; 0), B (0; 2; 0) et C (0; 2; 2). (Les axes sont gradués en *cm*).

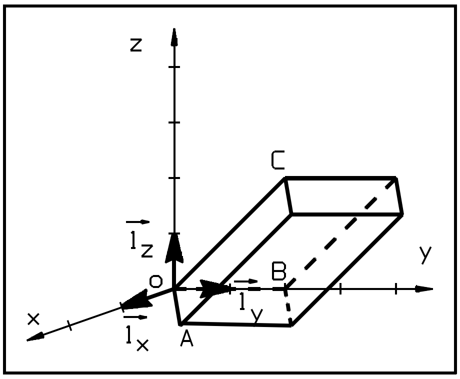

fig. 1ex. *- 1.18.*

Réponse : $V = 8\ cm^3$.

1.19. Trouver l'angle aigu θ formé par les diagonales d'un quadrilatère de sommets (0; 0; 0), (3; 2; 0), (4; 6; 0) et (1; 3; 0)

Réponse : $\theta = 82.88°$.

1.20. La ligne d'action d'un vecteur $\vec{V}$ de module égal à 500 est définie, dans une base Oxyz, par les équations $\pi_1 \equiv x + 0.6\,y + z = 6$ et $\pi_2 \equiv z = 3$. $\vec{V}$ est orienté vers les y décroissants.
Soit A le point de percée de la ligne d'action dans le plan Oyz; calculer le produit vectoriel $\vec{OA} \times \vec{V}$.

Réponses : $\vec{V} = 257\ \vec{1}_x - 429\ \vec{1}_y$; $\vec{OA} \wedge \vec{V} = 1287\ \vec{1}_x + 771\ \vec{1}_y - 1285\ \vec{1}_z$.

1.21. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que la relation :
$\left(\vec{AB} \times \vec{BC}\right) \times \vec{CA} = \vec{AB} \times \left(\vec{BC} \times \vec{CA}\right)$ soit vérifiée.

Réponse : $\vec{AB} = \vec{CA}\,\dfrac{\vec{BC} \bullet \vec{AB}}{\vec{BC} \bullet \vec{CA}}$ (⇒ A, B et C alignés).

1.22. Si $\vec{V} = \left(t^3 + 2\,t\right)\vec{1}_x - 3\exp\left(-2\,t\right)\vec{1}_y + 2\sin\left(5\,t\right)\vec{1}_z$ trouver $\dot{\vec{V}}$, $\left\|\dot{\vec{V}}\right\|$ et $\ddot{\vec{V}}$.

Réponses : $\dot{\vec{V}} = \left(3\,t^2 + 2\right)\vec{1}_x + 6\exp\left(-2\,t\right)\vec{1}_y + 10\cos\left(5\,t\right)\vec{1}_z$;

$$\left\|\dot{\vec{V}}\right\| = \sqrt{\left(3\,t^2+2\right)^2 + \left(6\exp(-2\,t)\right)^2 + \left(10\cos(5\,t)\right)^2}\ ;$$

$$\ddot{\vec{V}} = 6\,t\,\vec{1}_x - 12\exp(-2\,t)\,\vec{1}_y - 50\sin(5\,t)\,\vec{1}_z\,.$$

1.23. Montrer que $\dfrac{d\left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2\right)}{dt} = \dot{\vec{V}}_1 \bullet \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \bullet \dot{\vec{V}}_2$.

1.24. Montrer que $\dfrac{d\left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right)}{dt} = \dot{\vec{V}}_1 \times \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \times \dot{\vec{V}}_2$.

1.25. Si $\vec{V}_1 = t\,\vec{1}_x - \sin t\,\vec{1}_z$ et $\vec{V}_2 = \cos t\,\vec{1}_x + \sin t\,\vec{1}_y + \vec{1}_z$ trouver $\dfrac{d\left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2\right)}{dt}$.

Réponse : $\dfrac{d\left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2\right)}{dt} = -\,t\sin t$.