Problèmes sur le chapitre 1

Exercices concernant principalement les "*vecteurs en 2D*"

12.01. Déterminer les composantes V_x et V_y des vecteurs $\vec{V}_1$ à $\vec{V}_5$ représentés ci-contre.

$\left\|\vec{V}_1\right\| = 3$, appliqué en A_1 (0; 3)

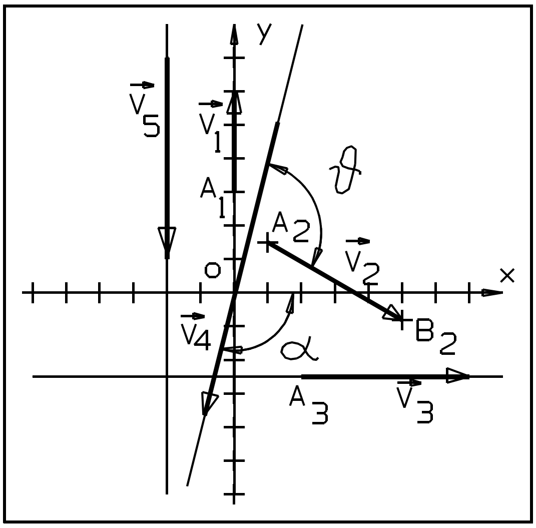
$\left\|\vec{V}_2\right\| = ?$, avec A_2 (1; 1.5) et B_2 (5; −0.81)

$\left\|\vec{V}_3\right\| = 5$, appliqué en A_3 (2; −2.5)

$\left\|\vec{V}_4\right\| = 7$, avec $\tan\alpha = 4$

$\left\|\vec{V}_5\right\| = 6$,

($\vec{V}_4$ et $\vec{V}_5$ sont des vecteurs glissants).



Réponses :

	V_{ix}	V_{iy}		V_{ix}	V_{iy}
$\vec{V}_1$	0	3	$\vec{V}_4$	-1.70	-6.79
$\vec{V}_2$	4	-2.31	$\vec{V}_5$	0	-6
$\vec{V}_3$	5	0			

12.02. Dans le plan Oxy représenté ci-contre, déterminer les éléments demandés pour les vecteurs :

$\vec{V}_i = \overrightarrow{A_iB_i} = V_{ix}\ \vec{1}_x + V_{iy}\ \vec{1}_y$

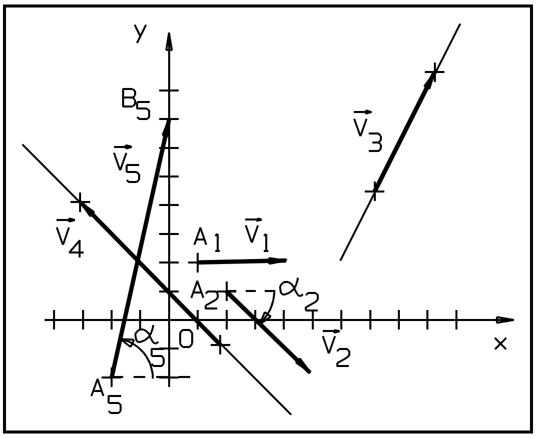
a) $\vec{V}_1$: A_1 (1; 2), $\left\|\vec{V}_1\right\| = 3$ et ligne d'action // à Ox ; B_1 ? V_{1x} ? V_{1y} ?

b) $\vec{V}_2$: A_2 (2; 1), $\left\|\vec{V}_2\right\| = 4$ et $V_{2x} = 2.83$ B_2 ? V_{2y} ? α_2 ?

c) $\vec{V}_3$: $\left\|\vec{V}_3\right\| = 5$, vecteur libre, direction : $y = 2x$; V_{3x} ? V_{3y} ?

d) $\vec{V}_4$: $\left\|\vec{V}_4\right\| = 7$, vecteur glissant, ligne d'action; $x + y - 1 = 0$ V_{4x} ? V_{4y} ?

e) $\vec{V}_5$: vecteur lié, A_5 (-2;-2) et B_5 (0;7) : V_{5x} ? V_{5y} ? α_5 ? $\left\|\vec{V}_5\right\| = ?$



Réponses :

	V_{ix}	V_{iy}			V_{ix}	V_{iy}	
$\vec{V}_1$	3	0	$B_1\,(4;\,2)$	$\vec{V}_4$	-4.95	4.95	
$\vec{V}_2$		-2.83	$B_2\,(4.83;\,-1.83)$ $\alpha_2 = -\pi/4$	$\vec{V}_5$	2	9	$\alpha_2 = 77.47°$
$\vec{V}_3$	2.24	4.47					

_12.03._ Déterminer les composantes $V_{i\,x}$ et $V_{i\,y}$ des vecteurs $\vec{V}_i$, d'origine A_i et d'extrémité B_i, ainsi que leur angle d'inclinaison α_i par rapport à l'horizontale. On donne :

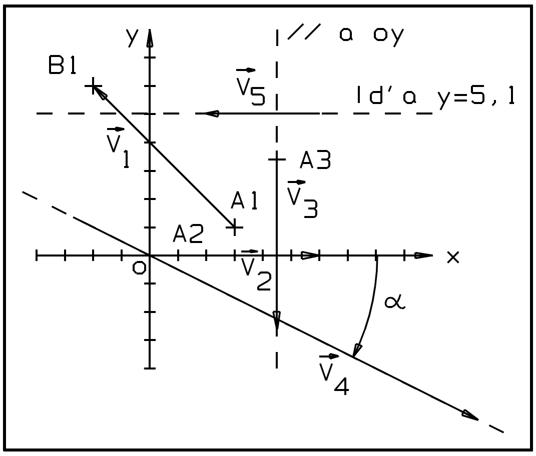
$A_1\,(3;\,1)$ $\quad B_1\,(-2;\,6)$

$A_2\,(1;\,0)$ $\quad \left\|\vec{V}_2\right\| = 5$

$A_3\,(4.5;\,3.4)$ $\quad \left\|\vec{V}_3\right\| = 6$

$\left\|\vec{V}_4\right\| = 8$ $\quad \tan\alpha = -\,0.5$ (vecteur glissant)

$\left\|\vec{V}_5\right\| = 4$ $\quad$ (vecteur glissant)



Réponses :

	V_{ix}	V_{iy}	α_i		V_{ix}	V_{iy}	α_i
$\vec{V}_1$	-5	5	3 π/4	$\vec{V}_4$	7.16	-3.58	153.43°
$\vec{V}_2$	5	0	π	$\vec{V}_5$	-4	0	π
$\vec{V}_3$	0	-6	-π/2				

_12.04._ Déterminer les composantes V_x et V_y des vecteurs $\vec{V}_1$ à $\vec{V}_5$ représentés ci-contre.

$\left\|\vec{V}_1\right\| = 3$, appliqué en $A_1\,(2;\,1)$

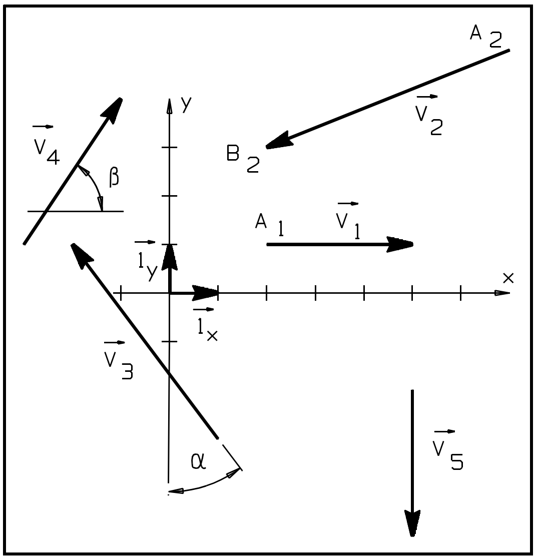
$\left\|\vec{V}_2\right\| = ?$, avec $A_2\,(7;\,5)$ et $B_2\,(2;\,3)$

$\left\|\vec{V}_3\right\| = 9$, avec $\tan\alpha = 0.7$

$\left\|\vec{V}_4\right\| = 6$, avec $\beta = \pi/3$ ($\beta = 60°$)

$\left\|\vec{V}_5\right\| = 5$, appliqué en $(5;\,-2)$

($\vec{V}_3$ et $\vec{V}_4$ sont des vecteurs glissants).



Réponses :

	V_{ix}	V_{iy}		V_{ix}	V_{iy}
$\vec{V}_1$	3	0	$\vec{V}_4$	3	$3\sqrt{3}$
$\vec{V}_2$	-5	-2	$\vec{V}_5$	0	-5
$\vec{V}_3$	-5.16	7.37			

12.05. Dans un plan orienté Oxy, représenter les vecteurs suivants et en calculer les projections. (A : origine; B : extrémité)

$\vec{V}_1$: A (4.5; 4.8); B (− 1.8; 1.6)

$\vec{V}_2$: $\|\vec{V}_2\| = 5\,cm$; $\alpha = -\dfrac{\pi}{3}$

$\vec{V}_3$ (glissant) : ligne d'action : $4\,x + 3\,y - 6 = 0$; $\|\vec{V}_3\| = 5\,cm$; sens : x croissants

$\vec{V}_4$ (glissant) : ligne d'action : $y = 3/2\,x - 3$; $x_A = 3$ et $x_B = 1$

Réponses :

	V_{ix}	V_{iy}		V_{ix}	V_{iy}
$\vec{V}_1$	-6.3	-3.2	$\vec{V}_3$	3.0	-4.0
$\vec{V}_2$	2.5	-4.33	$\vec{V}_4$	-2.0	-3.0

12.06. Dans un plan orienté Oxy, représenter les vecteurs suivants et en calculer les modules. (A : origine).

$\vec{V}_1$: $\vec{V}_1 = 4\,\vec{1}_x + 5\,\vec{1}_y$, appliqué en A (3; 1)

$\vec{V}_2$: A (2; −3) $V_{2x} = -4$ $\alpha_2 = +135°$

$\vec{V}_3$: A (4; 4) $V_{3y} = +3$ $\alpha_3 = +80°$

$\vec{V}_4$ (glissant) : ligne d'action : $y = -10\,x - 20$; $V_{4x} = -2$

Réponses : $\|\vec{V}_1\| = 6.4$ $\|\vec{V}_2\| = 5.66$ $\|\vec{V}_3\| = 3.05$ $\|\vec{V}_4\| = 20.1$

12.07. Dans un plan orienté Oxy, la droite *d* a pour équation $7\,y + 6\,x - 42 = 0$. Elle porte un vecteur glissant $\vec{V}$ dont le module vaut 10 *cm*; ce vecteur est dirigé dans le sens des x croissants. Déterminer l'expression analytique de ce vecteur $\left(\|\vec{1}_x\| = \|\vec{1}_y\| = 1\,cm\right)$.

Réponse : $\vec{V} = 7.59\,\vec{1}_x - 6.51\,\vec{1}_y$

12.08. Dans un plan orienté Oxy, la droite *d* a pour équation $8\,x + 7\,y - 56 = 0$. Elle porte un vecteur glissant $\vec{V}$ dont le module vaut 12 *cm*; ce vecteur est dirigé dans le sens des x décroissants. Déterminer les composantes V_x et V_y de ce vecteur $\left(\|\vec{1}_x\| = \|\vec{1}_y\| = 1\,cm\right)$.

Réponses : $V_x = -7.90$; $V_y = 9.03$

_12.09._ Dans un plan orienté Oxy, deux vecteurs sont donnés par les expressions :

$\vec{V}_1 = -5\,\vec{1}_x + 4\,\vec{1}_y$ appliqué en A_1 (2; 1)

$\vec{V}_2 = 6\,\vec{1}_x + 2\,\vec{1}_y$ appliqué en A_2 (−1; −4).

Représenter ces vecteurs. Calculer et représenter éventuellement :

a) les modules de $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$

b) la somme (ou résultante) de $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$

c) la différence $\vec{V}_2 - \vec{V}_1$

d) le produit scalaire $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2$

e) le produit vectoriel $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ appliqué en A_2

f) l'angle entre les deux vecteurs

Réponses :

a) $\|\vec{V}_1\| = 6.4$; $\|\vec{V}_2\| = 6.32$

b) $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = 1\,\vec{1}_x + 6\,\vec{1}_y$

c) $\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = 11\,\vec{1}_x - 2\,\vec{1}_y$

d) $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = -22$

e) $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = -34\,\vec{1}_z$

f) $\theta = 122.91°$

_12.11._ Dans un plan orienté Oxy, 2 vecteurs sont donnés par les expressions $\vec{V}_1 = 4\,\vec{1}_x + 3\,\vec{1}_y$ et $\vec{V}_2 = -3\,\vec{1}_x + 4\,\vec{1}_y$. Calculer le module des vecteurs, leur résultante, le produit scalaire $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2$ et le produit vectoriel $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$.

Réponses : $\|\vec{V}_1\| = \|\vec{V}_2\| = 5$; $\vec{R} = \vec{1}_x + 7\,\vec{1}_y$; $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = 0$; $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = 25\,\vec{1}_z$

_12.12._ Dans un plan orienté Oxy, 2 vecteurs sont donnés par les expressions :

a) $\|\vec{V}_1\| = 8$; $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{3}$ et $\|\vec{V}_2\| = 10$; $\alpha_2 = \pi$

b) $\|\vec{V}_1\| = 6$; $\alpha_1 = 19.50°$ et $\|\vec{V}_2\| = 4$; l'angle entre $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$: 120°

Calculer la résultante, la différence $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$, le produit scalaire et le produit vectoriel de ces vecteurs.

Réponses :

a) $\vec{R} = -6\,\vec{1}_x + 6.93\,\vec{1}_y$ $\quad$ $\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = 14\,\vec{1}_x + 6.93\,\vec{1}_y$

$\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = -40$ $\quad$ $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = 69.3\,\vec{1}_z$

b) $\vec{R} = 2.61\,\vec{1}_x + 4.60\,\vec{1}_y$ $\quad$ $\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = 8.70\,\vec{1}_x - 0.6\,\vec{1}_y$

$\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = -12$ $\quad$ $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = 20.8\,\vec{1}_z$

_12.13._ Dans un plan orienté Oxy, deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ ont pour origine A (1; 2) :

$\vec{V}_1 = 3\,\vec{1}_x + 4\,\vec{1}_y$ et $\vec{V}_2 = a\,\vec{1}_x + b\,\vec{1}_y$.

Déterminer *a* et *b* pour que $\|\vec{V}_2\| = 3$ et $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2$ (deux solutions).

Réponses : $\vec{V}_2 = \dfrac{12}{5}\,\vec{1}_x - \dfrac{9}{5}\,\vec{1}_y$ $\qquad$ $\vec{V}_2 = -\dfrac{12}{5}\,\vec{1}_x + \dfrac{9}{5}\,\vec{1}_y$

12.14. Calculer la résultante d'un système plan de 3 vecteurs glissants, définis comme suit :

$\vec{V}_1$:	ligne d'action : $y = 4\,x$	$\left\lVert\vec{V}_1\right\rVert = 4.12$	sens : x croissants
$\vec{V}_2$:	ligne d'action : $y = 2\,x - 3$	$\left\lVert\vec{V}_2\right\rVert = 4.47$	sens : x décroissants
$\vec{V}_3$:	ligne d'action : $y = 5$	$\left\lVert\vec{V}_3\right\rVert = 1$	sens : x croissants

Réponse : $\vec{R} = \vec{0}$

12.15. Trouver tous les vecteurs $\vec{X}$ tels que $\vec{V}_1 \bullet \vec{X} = p$ ($\vec{V}_1$ et p étant donnés)

Réponse : $\vec{X} = \dfrac{p\,\vec{V}_1}{\left\lVert\vec{V}_1\right\rVert^2} + \vec{V}_2 \times \vec{V}_1$ où $\vec{V}_2$ est un vecteur arbitraire quelconque

Exercices concernant principalement les “*vecteurs en 3D*”

13.01. Dans un espace orienté Oxyz, calculer les projections et le module d’un vecteur $\vec{V}$ dont l’origine a pour coordonnées A (3; 5; 7) et l’extrémité B (−3; 3; 1).

Réponses : $V_x = -6$ $V_y = -2$ $V_z = -6$ $\|\vec{V}\| = 8.72$

13.02. Dans un espace orienté Oxyz, calculer les projections d’un vecteur $\vec{V}$ glissant sur la droite définie par les deux plans $\pi_1 \equiv x + z - 4 = 0$ et $\pi_2 \equiv y = 5$. Le module vaut $\|\vec{V}\| = 3$ et le vecteur est dirigé vers les z négatifs.

Réponses : $V_x = 2.12$ $V_y = 0$ $V_z = -2.12$

13.03. Trois vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ sont définis, dans un espace orienté Oxyz, par leur module et les angles α, β et γ. Calculer la résultante de ces vecteurs avec ses projections et ses angles avec les 3 axes.

$\vec{V}_1$: $\|\vec{V}_1\| = 7.68$ $\alpha_1 = 67.00°$ $\beta_1 = 49.46°$ $\gamma_1 = 49.46°$

$\vec{V}_2$: $\|\vec{V}_2\| = 6.40$ $\alpha_2 = 108.21°$ $\beta_2 = 159.72°$ $\gamma_2 = 81.03°$

$\vec{V}_3$: $\|\vec{V}_3\| = 8.30$ $\alpha_3 = 103.95°$ $\beta_3 = 83.11°$ $\gamma_3 = 164.58°$

Réponses : $\vec{R} = -1\,\vec{1}_x - 2\,\vec{1}_z$; $\alpha_R = 116.57°$; $\beta_R = 90°$; $\gamma_R = 153.43°$

13.04. Calculer le module et les projections des 4 vecteurs définis comme suit :

$\vec{V}_1 = \overrightarrow{A_1 B_1}$ avec : A_1 (4; 0; 2) et B_1 (1; −5; 5)

$\vec{V}_2 = +3\,\vec{1}_x - 4\,\vec{1}_y - 5\,\vec{1}_z$

$\vec{V}_3$: $\|\vec{V}_3\| = 6.78$ $\alpha_3 = 116.26°$ $\beta_3 = 27.75°$ $\gamma_3 = 81.52°$

$\vec{V}_4$: dans Oyz : A_4 (0; 2; 2) $\|\vec{V}_4\| = 10$ $\beta_4 = 60°$ sens : y croissants

Calculer la résultante.

Réponse : $\vec{R} = -3\,\vec{1}_x + 2\,\vec{1}_y + 7.66\,\vec{1}_z$

13.05 Dans un espace orienté Oxyz, le vecteur $\vec{V}_1$ est appliqué en P (0; 0; 5) avec $\alpha_1 = \pi/2$, $\beta_1 = \pi/6$ et $\|\vec{V}_1\| = 6$, il est dirigé dans le sens des z croissants. Le vecteur $\vec{V}_2$ est un vecteur de position, égal à $\overrightarrow{MP}$ avec M (1; 4; 0). Calculer : $\overrightarrow{MP} \times \vec{V}_1$.

Réponse : $\overrightarrow{MP} \times \vec{V}_1 = -38\,\vec{1}_x + 3\,\vec{1}_y - 5.2\,\vec{1}_z$ et $\left\|\overrightarrow{MP} \times \vec{V}_1\right\| = 38.5$

13.06. Dans un espace orienté Oxyz, deux vecteurs sont donnés par :

$\vec{V}_1 = \sqrt{6}\,\vec{1}_x - \vec{1}_y + 3\,\vec{1}_z$ et $\vec{V}_2 = 12\,\vec{1}_x - 9\,\vec{1}_z$

Les deux vecteurs sont appliqués en A_2 (0; 2; −1).

On demande de déterminer :

a) les modules de $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ b) la somme (ou résultante) de $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$

c) la différence $\vec{V}_2 - \vec{V}_1$ d) le produit scalaire $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2$

e) le produit vectoriel $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ f) l'angle entre les deux vecteurs

g) un vecteur $\vec{V}_3$ tel que $\vec{V}_3 \times \vec{V}_1 = \vec{V}_2$

<u>*Réponses*</u> :

a) $\|\vec{V}_1\| = 4$; $\|\vec{V}_2\| = 15$ b) $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = 14.45\,\vec{1}_x - \vec{1}_y - 6\,\vec{1}_z$

c) $\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = 9.55\,\vec{1}_x + \vec{1}_y - 12\,\vec{1}_z$ d) $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = 2.39$

e) $\vec{V}_2 \times \vec{V}_1 = 9\,\vec{1}_x + 58.05\,\vec{1}_y + 12\,\vec{1}_z$ f) $\theta = 87.71°$

g) Impossible

<u>13.07.</u> Dans un espace orienté Oxyz, deux vecteurs sont donnés par :

$\vec{V}_1$: origine A_1 (2; 4; 0), extrémité B_1 (4; 2; 0);

$\vec{V}_2$: $\vec{V}_2 = -6\,\vec{1}_x - \vec{1}_y$, appliqué en A_2 (6; −1; 0).

Représenter ces vecteurs. Déterminer, en les considérant comme des vecteurs libres :

a) les modules de $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ b) la somme (ou résultante) de $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$

c) la différence $\vec{V}_2 - \vec{V}_1$ d) le produit scalaire $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2$

e) le produit vectoriel $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ f) l'angle que forment entre elles les lignes d'action de ces deux vecteurs.

g) un vecteur $\vec{V}_3$ tel que $\vec{V}_3 \times \vec{V}_1 = \vec{V}_2$

<u>*Réponses*</u> :

a) $\|\vec{V}_1\| = 2\sqrt{2}$; $\|\vec{V}_2\| = \sqrt{37}$ b) $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = -4\,\vec{1}_x - 3\,\vec{1}_y$

c) $\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = 8\,\vec{1}_x - \vec{1}_y$ d) $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = -10$

e) $\vec{V}_2 \times \vec{V}_1 = -14\,\vec{1}_z$ f) $\theta = 125.54°$

g) Impossible

<u>13.08.</u> Dans un espace orienté Oxyz, deux vecteurs sont donnés par :

$\vec{V}_1$: origine A_1 (2; 4; 3), extrémité B_1 (4; 2; 6);

$\vec{V}_2$: $\vec{V}_2 = -6\,\vec{1}_x - \vec{1}_y - 4\,\vec{1}_z$, appliqué en A_2 (6; 2; −1).

On demande de déterminer :

a) les modules de $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ b) la somme (ou résultante) de $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$

c) la différence $\vec{V}_2 - \vec{V}_1$ d) le produit scalaire $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2$

e) le produit vectoriel $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ f) l'angle entre les deux vecteurs

<u>*Réponses*</u> :

a) $\|\vec{V}_1\| = \sqrt{17}$; $\|\vec{V}_2\| = \sqrt{53}$ b) $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = -4\,\vec{1}_x - 3\,\vec{1}_y - 7\,\vec{1}_z$

c) $\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = -8\,\vec{1}_x + \vec{1}_y - 7\,\vec{1}_z$ d) $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = -22$

e) $\vec{V}_2 \times \vec{V}_1 = 11\,\vec{1}_x - 10\,\vec{1}_y - 14\,\vec{1}_z$ f) $\theta = 137.13°$

13.09. Dans un espace orienté Oxyz, deux vecteurs sont donnés par :

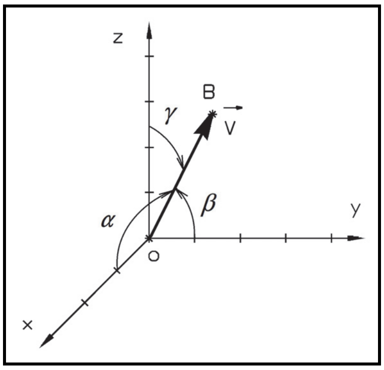
$\vec{V}_1$: vecteur glissant, ligne d'action donnée par $\pi_1 \equiv x - y = 0$ et $\pi_2 \equiv x = 4$; $\|\vec{V}_1\| = 4$, sens Oz négatifs;

$\vec{V}_2$: parallèle à Oxy; appliqué en M (0; 0; 6); $-V_{2x} = V_{2y} = 6$.

Représenter en perspective les deux vecteurs; déterminer l'angle θ qu'ils forment entre eux; déterminer $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ et le représenter, appliqué en M.

Réponse : $\theta = \pi/2$

13.10. Dans un espace orienté Oxyz, un vecteur $\vec{V}$ a pour origine A (0; 0; 0). Sa ligne d'action fait un angle α de $\pi/3$ avec Ox et un angle β de $5\pi/12$ avec Oy; son module est de 12 et ce vecteur est orienté dans le sens des z croissants. Déterminer la relation liant les angles α, β et γ (relation aux cosinus directeurs). Déterminer les composantes du vecteur et les coordonnées de son extrémité B.



Réponses : $V_x = 6$ $V_y = 3.11$ $V_z = 9.92$
B (6; 3.11; 9.92)

13.11. Dans un espace orienté Oxyz, un vecteur $\vec{V}$ appliqué en O a pour ligne d'action la bissectrice du trièdre de référence. Calculer les angles de cette bissectrice avec les axes et les projections de $\vec{V}$ dont le module vaut 10 et le sens est celui des x positifs.

Réponses : $\alpha = \beta = \gamma = 54.74°$ $V_x = V_y = V_z = 5.77$

13.12. Dans un espace orienté Oxyz, un vecteur $\vec{V}$ a pour origine A (3; 0; 5). Sa ligne d'action fait un angle de $\pi/4$ avec Ox et de $\pi/3$ avec Oy; son module est de 10; il est orienté dans le sens z décroissant. Calculer ses composantes et les coordonnées de son extrémité B.

Réponses : $V_x = 5\sqrt{2}$ $V_y = 5$ $V_z = -5$
B (10.07; 5; 0)

13.13. Dans un espace orienté Oxyz, un vecteur $\vec{V}$ a pour origine A (3; 0; 2). Sa ligne d'action fait un angle α de $\pi/3$ avec Ox et un angle γ de $\pi/4$ avec Oz; son module est de 15; il est orienté dans le sens des y décroissants. Déterminer l'expression analytique de ce vecteur ainsi que les coordonnées de son extrémité B.

Réponses : $\vec{V} = 7.5\,\vec{1}_x - 7.5\,\vec{1}_y + 10.6\,\vec{1}_z$ B (10.5; - 7.5; 12.6)

13.14. Dans un espace orienté Oxyz, un vecteur $\vec{V}$ a pour origine A (1; 2; 3). Sa ligne d'action fait un angle α de $\pi/4$ avec Ox et un angle β de $\pi/3$ avec Oy; elle est orientée vers les z négatifs. Le module $\|\vec{V}\|$ vaut 5 *cm*. Déterminer l'expression analytique de ce vecteur ainsi que les coordonnées de son extrémité B.

Réponses : $\vec{V} = 3.55\,\vec{1}_x + 2.5\,\vec{1}_y - 2.5\,\vec{1}_z$ B (4.54; 4.5; 0.5)

13.15. Dans une base orthonormée Oxyz, on donne deux vecteurs :

$\vec{V}_1$: $\|\vec{V}_1\| = 10$; vecteur glissant, dans le plan $z = 2$, sur ligne d'action $x - y = 0$, dans le sens des x négatifs.

$\vec{V}_2 = 5\sqrt{2}\,\vec{1}_x + 5\sqrt{2}\,\vec{1}_y + \sqrt{21}\,\vec{1}_z$ (vecteur libre)

On demande : le module de $\vec{V}_2$; les angles α, β et γ que fait $\vec{V}_2$ avec les axes Ox, Oy et Oz; l'angle δ angle entre $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$; le produit vectoriel $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$.

Réponses : $\|\vec{V}_2\| = 11$ $\alpha = \beta = 50°$ et $\gamma = 65.38°$ $\delta = 155.38°$

$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = -5\sqrt{42}\,\vec{1}_x + 5\sqrt{42}\,\vec{1}_y$

13.16. Dans un espace orienté Oxyz, un vecteur glissant $\vec{V}$ a pour ligne d'action la droite définie par les deux plans $\pi_1 \equiv x + y + z = 5$ et $\pi_2 \equiv z = 3$. Son module vaut 6. Il a pour sens celui des y positifs. Calculer ses projections.

Réponses : $V_x = -3\sqrt{2}$ $V_y = 3\sqrt{2}$ $V_z = 0$

13.17. La ligne d'action d'un vecteur $\vec{V}$ de module égal à 500 est définie, dans une base Oxyz, par les équations $\pi_1 \equiv x + 0.6\,y + z = 6$ et $\pi_2 \equiv z = 3$. $\vec{V}$ est orienté vers les y décroissants.

Soit A le point de percée de la ligne d'action dans le plan Oyz; calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{OA} \times \vec{V}$.

Réponses : $\vec{V} = 257\,\vec{1}_x - 429\,\vec{1}_y$; $\overrightarrow{OA} \times \vec{V} = 1287\,\vec{1}_x + 771\,\vec{1}_y - 1285\,\vec{1}_z$

13.18. Dans un système d'axes Oxyz, un vecteur $\vec{V}$ de module égal à $8\sqrt{3}$ a une ligne d'action définie par les équations $\pi_1 \equiv x - y = 1$ et $\pi_2 \equiv y - z = -2$. Son sens est celui des x croissants. Représenter ce vecteur. Déterminer l'expression analytique de ce vecteur. Calculer les angles α, β et γ que forme ce vecteur avec chacun des axes de coordonnées.

Réponses : $\vec{V} = 8\,\vec{1}_x + 8\,\vec{1}_y + 8\,\vec{1}_z$; $\alpha = \beta = \gamma = 1/\sqrt{3}$

13.19. Dans un espace orienté Oxyz, la ligne d'action d'un vecteur glissant $\vec{V}$ est donnée par l'intersection de deux plans $\pi_1 \equiv 2\,x + y + z = 11$ et $\pi_2 \equiv x + 2\,y + 2\,z = 10$. Le module $\|\vec{V}\|$ vaut $5\sqrt{2}$ et $\vec{V}$ est orienté dans le sens des z croissants. Déterminer l'expression analytique de ce vecteur ainsi que les angles directeurs α, β et γ que forme $\vec{V}$ avec chacun des axes du trièdre Oxyz.

Réponses : $\vec{V} = -5\,\vec{1}_y + 5\,\vec{1}_z$; $\alpha = \pi/2$; $\beta = 3\,\pi/4$; $\gamma = \pi/4$

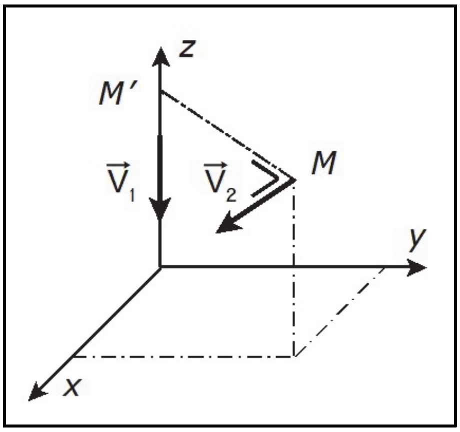
13.20. Dans un espace orienté Oxyz, la ligne d'action d'un vecteur glissant $\vec{V}$ est donnée par l'intersection de deux plans $\pi_1 \equiv 2\,x + y + z = 12$ et $\pi_2 \equiv 5\,x + 2\,y + 2\,z = 25$. Le module $\left\|\vec{V}\right\|$ vaut $5\sqrt{2}$ et $\vec{V}$ est orienté dans le sens des z croissants. Déterminer l'expression analytique de ce vecteur ainsi les angles directeurs α, β et γ que forme $\vec{V}$ avec chacun des axes du trièdre Oxyz.

Réponses : $\vec{V} = -5\,\vec{1}_y + 5\,\vec{1}_z$; $\alpha = \pi/2$; $\beta = 3\,\pi/4$; $\gamma = \pi/4$

13.21. Dans un espace orienté Oxyz, deux vecteurs sont donnés par :

$\vec{V}_1$: vecteur glissant, sur l'axe Oz; $\left\|\vec{V}_1\right\| = 6$; sens Oz négatifs;

$\vec{V}_2$: situé dans un plan horizontal; appliqué en M (2.5; 4.33; 4); perpendiculaire à la droite $\overline{MM'}$ (M' étant la projection de M sur l'axe Oz); $\left\|\vec{V}_2\right\| = 4$; sens des x croissants.



Déterminer l'angle θ qu'ils forment entre eux ainsi que le produit vectoriel $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$, représentez-le appliqué en M.

Réponses : $\theta = 90°$ $\quad\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = -12\,\vec{1}_x - 20.76\,\vec{1}_y$

13.22. En A (1; 2; 3) sont appliqués deux vecteurs :
$\vec{V}_1 = 2\,\vec{1}_x + 3\,\vec{1}_y - 4\,\vec{1}_z$ et $\vec{V}_2 = 1\,\vec{1}_x + a\,\vec{1}_y + b\,\vec{1}_z$.
Déterminer a et b pour que $\left\|\vec{V}_2\right\| = 3$ et $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2$. Représenter ces deux vecteurs.

Réponses : $a_1 = 2$ et $b_1 = 2$; $a_2 = -2.48$ et $b_2 = -1.36$

13.23. Dans un espace orienté Oxyz, deux vecteurs sont donnés par :
$\vec{V}_1$: $\vec{V}_1 = 5\,\vec{1}_x + 4\,\vec{1}_y$,
$\vec{V}_2$: $\vec{V}_2 = -8\,\vec{1}_x + 10\,\vec{1}_y + 7\,\vec{1}_z$,
Déterminer l'angle que forment ces deux vecteurs entre eux.
Est-il possible de déterminer un vecteur $\vec{V}_3$ tel que $\vec{V}_3 \times \vec{V}_1 = \vec{V}_2$?

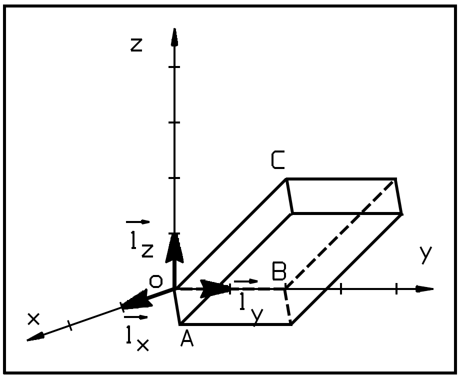
Réponses : $\theta = 90°$; $\vec{V}_3 = 0.68\,\vec{1}_x - 0.85\,\vec{1}_y + 2\,\vec{1}_x$ $(pour\ \lambda = 0)$

Exercices concernant principalement les "*applications vectorielles*"

15.01. Dans une base orthonormée Oxyz (graduations en *cm*), on donne les points A (2; 2; 2), B (2; 3; 5) et C (4; 3; 2), sur lesquels on construit un parallélogramme. Calculer sa superficie.

Réponse : $S = 7\ cm^2$

15.02. Dans une base orthonormée Oxyz, on demande de calculer le volume du parallélépipède, tel que représenté ci-après, construit sur les quatre points O (0; 0; 0), A (2; 2; 0), B (0; 2; 0) et C (0; 2; 2). (Les axes sont gradués en *cm*).



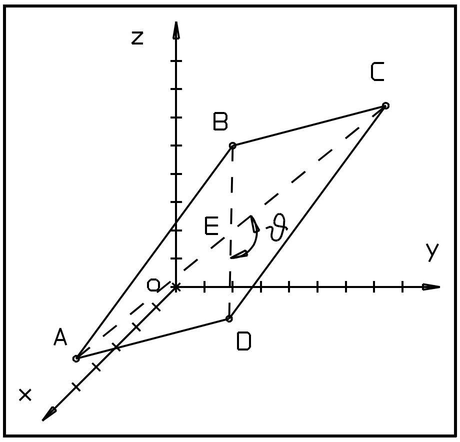
Réponse : $V = 8\ cm^3$

15.03. Trouver l'angle aigu θ formé par les diagonales d'un quadrilatère de sommets (0; 0; 0), (3; 2; 0), (4; 6; 0) et (1; 3; 0)

Réponse : $\theta = 82.88°$

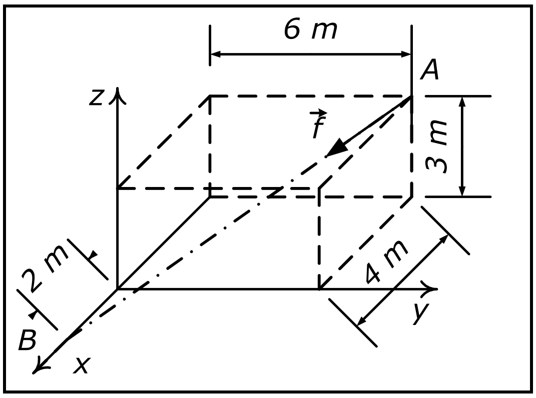
15.04. Pour le parallélogramme schématisé ci-contre, on donne les coordonnées de trois sommets (les axes étant gradués en *cm*) : A (5; 0; 1), B (0; 2; 5) et C (−2; 6; 5).

a) Trouver les coordonnées du quatrième sommet D.
b) Déterminer l'angle θ entre ces deux diagonales.
c) Calculer, en cm^2, l'aire du parallélogramme.
d) Prouver que les diagonales $\overline{BD}$ et $\overline{AC}$ se coupent en leur milieu.
e) Montrer que les triangles $\overline{ABE}$, $\overline{BEC}$, $\overline{CED}$ et $\overline{DEA}$ ont tous la même superficie, valant le quart de l'aire du parallélogramme.



Réponses : a) $D(3; 4; 1)$ b) $\theta = 117.51°$ c) $A = 24\ cm^2$

15.05. L'intensité de la force $\vec{f}$ est de 300 *N*. Quelle est l'expression analytique de ce vecteur ? Quelles sont ses angles directeurs ?



Réponses : $\vec{f} = 200\,\vec{1}_x - 200\,\vec{1}_y - 100\,\vec{1}_z$

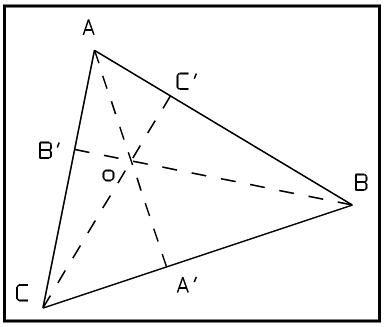
$\alpha = 48.19°$; $\beta = 131.81°$

$\gamma = 109.47°$

_15.06._ On donne le vecteur $\vec{V}$, d'origine A (1; 6; 2) et d'extrémité B (1; 8; 4). On demande de calculer la distance entre O (origine du système d'axes) et la ligne d'action de $\vec{V}$. (Axes gradués en *cm*).

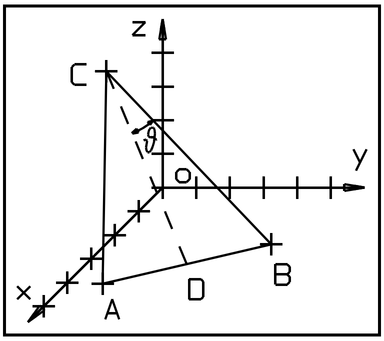
Réponse : $d = 3\,cm$

_15.07._ Démontrer, en utilisant les techniques du calcul vectoriel, que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un même point.



Réponse : -

_15.08._ Les sommets d'un triangle sont situés aux points A (4; 1; 0), B (2; 5; 0) et C (1; −1; 4). Trouver la longueur de la médiane $\overline{CD}$ relative au côté $\overline{AB}$. Déterminer l'angle aigu θ que fait cette médiane $\overline{CD}$ avec le côté $\overline{CB}$. Peut-on calculer la superficie S du triangle $\overline{ABC}$ par la formule $S = \left\| \overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CB} \right\|$? Justifier ! Calculer la superficie du triangle ABC ($\left\|\vec{1}_x\right\| = \left\|\vec{1}_y\right\| = \left\|\vec{1}_z\right\| = 1\,cm$).



Réponses : Oui $S = 12\,cm^2$

_15.09._ On donne deux points A (1; 2; 1) et B (4; 6; 1), dans un système d'axes gradués en *cm*. On demande de déterminer les coordonnées d'un point C de façon à former un **<u>triangle ABC</u>** tel que :

- C appartienne au plan d'équation $z = 13$
- la superficie S du triangle soit égale à 32.5 cm^2
- l'angle α au sommet A soit égal à $\pi/2$ (triangle rectangle en A)

Réponse : C_1 (-3; 5; 13) et C_2 (5; -1; 13)

_15.10._ Dans un trièdre Oxyz d'orientation positive, un parallélépipède est construit sur trois vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$, tous trois d'origine A. On demande :

a) de calculer les coordonnées du sommet B
b) de calculer le volume de ce parallélépipède

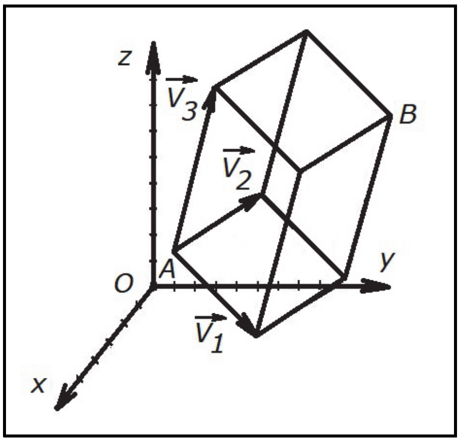
Soit : A (2; 2; 3)

$\vec{V}_1 = 3\,\vec{1}_x + 6\,\vec{1}_y - \vec{1}_z$

$\vec{V}_2 = -2\,\vec{1}_x + 3\,\vec{1}_y + \vec{1}_z$

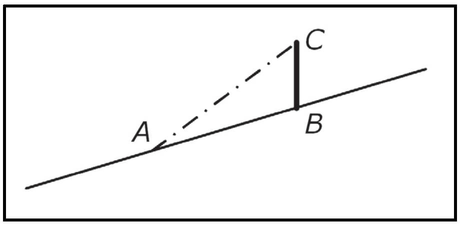
$\vec{V}_3 = -3\,\vec{1}_x + 4\,\vec{1}_z$

Les axes sont gradués en *cm*.



Réponses : a) B (0; 11; 7) b) $V = 57\ cm^3$

15.11. Sur un coteau s'élève un arbre. Le coteau, représenté par le plan incliné $\overline{AB}$, a une pente de 7/24. L'arbre est représenté par le segment vertical $\overline{BC}$. Les rayons du soleil, venant de l'amont, sont parallèles à $\overline{CA}$ et ont une pente de 3/4. L'ombre projetée par l'arbre sur le coteau en aval, représentée par le segment $\overline{BA}$, a une longueur de 15 *m*. Calculer le vecteur $\vec{BC}$, puis la hauteur de l'arbre (norme de $\overline{BC}$). (Résoudre par le calcul vectoriel).



Réponses : $\vec{BC} = 0\,\vec{1}_x + 6.6\,\vec{1}_y$ $\|\vec{BC}\| = 6.6\,m$

15.12. Montrer que si : $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$, on a $\vec{AB} \times \vec{CA} = \vec{CA} \times \vec{BC} = \vec{BC} \times \vec{AB}$.
En déduire la "*relation au sinus*" dans les triangles.

Réponse : -

15.13. Démontrer, au moyen du calcul vectoriel, l'identité de Lagrange.
Soit : $\|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\|^2 = \|\vec{V}_1\|^2\,\|\vec{V}_2\|^2 - \left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2\right)^2$.

Réponse : -

15.14. Les relations suivantes sont-elles exactes ?
$\left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right) \times \vec{V}_3 = \vec{V}_1 \times \left(\vec{V}_2 \times \vec{V}_3\right) + \vec{V}_2 \times \left(\vec{V}_3 \times \vec{V}_1\right)$?
$\|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\|^2 + \left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2\right)^2 = \|\vec{V}_1\|^2\,\|\vec{V}_2\|^2$?

Réponse : Oui

15.15. Quelles conditions doivent remplir les vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ pour que les expressions suivantes soient exactes :

a) $\dfrac{\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2}{\|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\|} = 1$

b) $\left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right) \bullet \vec{V}_3 = 0$ avec $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ appliqués en (0; 0; 0)

c) $\left\|\left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right) \times \vec{V}_1\right\| = \|\vec{V}_2\|$

Réponses : a) $\cot\theta = 1$ b) $\vec{V}_3$ peut être n'importe quelle combinaison de $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$
c) $\|\vec{V}\| = \sqrt{\sin^{-1}\theta}$

15.16. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que la relation :
$\left(\vec{AB} \times \vec{BC}\right) \times \vec{CA} = \vec{AB} \times \left(\vec{BC} \times \vec{CA}\right)$ soit vérifiée.

<u>*Réponse*</u> : $\vec{AB} = \vec{CA} \dfrac{\vec{BC} \bullet \vec{AB}}{\vec{BC} \bullet \vec{CA}}$ ($\Rightarrow$ A, B et C alignés)

15.17. Si $\vec{V} = \left(t^3 + 2\,t\right) \vec{1}_x - 3 \exp\left(-\,2\,t\right) \vec{1}_y + 2 \sin\left(5\,t\right) \vec{1}_z$ trouver $\dot{\vec{V}}$, $\left\|\dot{\vec{V}}\right\|$ et $\ddot{\vec{V}}$.

<u>*Réponses*</u> :

$$\dot{\vec{V}} = \left(3\,t^2 + 2\right) \vec{1}_x + 6 \exp\left(-\,2\,t\right) \vec{1}_y + 10 \cos\left(5\,t\right) \vec{1}_z$$

$$\left\|\dot{\vec{V}}\right\| = \sqrt{\left(3\,t^2 + 2\right)^2 + \left(6 \exp\left(-\,2\,t\right)\right)^2 + \left(10 \cos\left(5\,t\right)\right)^2}$$

$$\ddot{\vec{V}} = 6\,t\, \vec{1}_x - 12 \exp\left(-\,2\,t\right) \vec{1}_y - 50 \sin\left(5\,t\right) \vec{1}_z$$

15.18. a) Montrer que $\dfrac{d\left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2\right)}{dt} = \dot{\vec{V}}_1 \bullet \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \bullet \dot{\vec{V}}_2$.

b) Montrer que $\dfrac{d\left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right)}{dt} = \dot{\vec{V}}_1 \times \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \times \dot{\vec{V}}_2$.

<u>*Réponse*</u> : -

15.19. Si $\vec{V}_1 = t\, \vec{1}_x - \sin t\, \vec{1}_z$ et $\vec{V}_2 = \cos t\, \vec{1}_x + \sin t\, \vec{1}_y + \vec{1}_z$ trouver $\dfrac{d\left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2\right)}{dt}$.

<u>*Réponse*</u> : $\dfrac{d\left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2\right)}{dt} = -\,t \sin t$