Remarque :
Les références indiquées sont en correspondances avec :
Calculus [texte imprimé] / ***James STEWART***, Auteur . - Pacific Grove (CA) : Brooks/Cole, 2012. ISBN : 978-0-538-49884-5 Langues : Anglais

CHAPITRE 1. BASES, VECTEURS ET OPÉRATIONS SUR LES VECTEURS

1.1. *Bases orientées*

1.1.1. Axe orienté

Un axe est une droite sur laquelle on a choisi un sens de parcours positif à partir d'un point O, considéré comme origine. Ce sens s'indique par une flèche à l'extrémité du segment $\overline{x'x}$ dessiné. Soit l'axe Ox et les points M et M'.

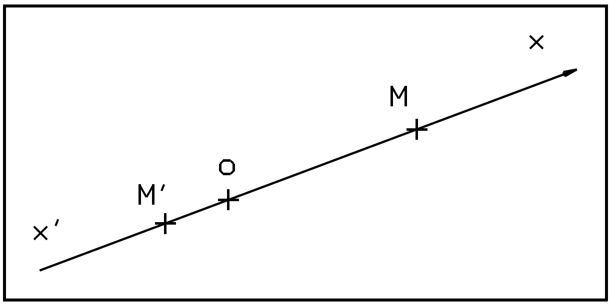

fig. 1.1. *- Axe orienté.*

Si a est le nombre qui mesure la longueur $\overline{OM}$, et b, la longueur $\overline{OM'}$:

$$x_M = abscisse\ de\ M = +\,a$$

$$x_{M'} = abscisse\ de\ M' = -\,b$$

Remarque :
Ligne courbe orienté : on fera les mêmes conventions que celles faites pour un axe orienté. On y distingue aussi deux sens. On y indique le sens positif par une flèche. Utilisation en mécanique pour les liens flexibles notamment.

1.1.2. Plan orienté

Soit un plan défini par deux axes Ox et Oy, non parallèle, qui se coupent en leur origine. On imagine de faire tourner l'axe Ox autour de O, d'un angle inférieur à π pour l'amener en coïncidence avec Oy.

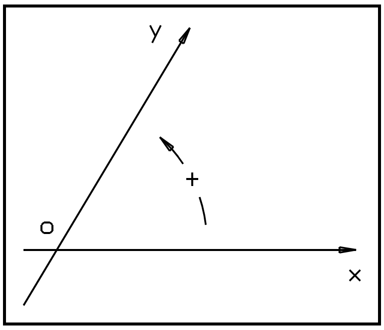

fig. 1.2. *- Plan orienté.*

Si pour ce faire, le sens de rotation de Ox est *antihorlogique* (ou "*trigonométrique*"), on dira que le plan Oxy est *orienté positivement*. L'ordre d'énoncé des lettres O, x, y, est capital. Le plan Oyx est orienté négativement.

1.1.3. Espace orienté

Soit un espace défini par 3 axes non coplanaires Ox, Oy, Oz, se coupant en leur origine. Ces trois axes forment un trièdre (trirectangle ou non).

On imagine de faire tourner le demi-plan Oxz autour de l'axe Oz, d'un angle inférieur à π, pour l'amener en coïncidence avec Oyz. Si pour un observateur situé sur la partie positive de l'axe Oz, la rotation s'effectue de la droite vers la gauche, le trièdre Oxyz est dit positif ou *trièdre direct*. L'ordre d'énoncé des lettres est capital. Les trièdres Oxyz, Ozxy, Oyzx sont positifs. Les trièdres Oxzy, Ozyx et Oyxz sont négatifs ou *trièdres inverses*.

Pour reconnaître ou pour orienter un trièdre direct, on peut se servir de ***la règle des 3 doigts de la main droite*** (pouce : Ox; index : Oy; et majeur : Oz ⇒ trièdre direct Oxyz) ou de l'image ***du tire-bouchon*** (faire tourner le tire-bouchon de Ox vers Oy pour le visser dans le sens Oz ⇒ trièdre direct Oxyz)

Dans ces notes, nous appellerons "*base orthogonale directe*" tout système d'axes (plan ou espace) d'orientation positive composé d'axes perpendiculaires entre eux.

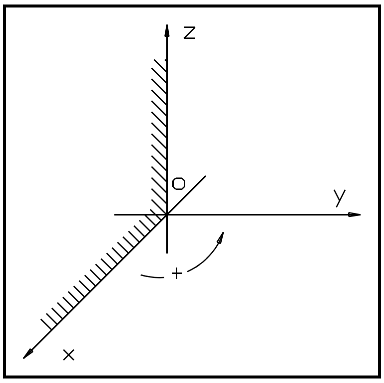

fig. 1.3. *- Base orthogonale directe.*

1.2. ***Scalaires et vecteurs***

{Right-hand rule et section 12.2}

1.2.1. Scalaires

Des grandeurs variées en physiques, telles que la longueur, la masse et le temps, ne nécessitent pour leur caractérisation qu'un nombre réel (outre leurs unités qui sont décidées par avance). De telles quantités sont appelées "*scalaires*" (Scalae = échelle) et le nombre réel est appelé la grandeur de cette quantité. Ils n'ont donc pas de direction. Un scalaire est représenté symboliquement par une lettre, ou un groupe de lettres, ou un nombre :

exemples : V, F, a, $\overline{AB}$, 24 ...

1.2.2. Vecteurs

D'autres grandeurs (par exemple les déplacements), requièrent pour leur caractérisation à la fois une *direction*, un *sens* et un *module* et parfois *un point d'application*. De telles grandeurs sont des vecteurs. Pour distinguer un scalaire d'un vecteur, nous écrirons :

$$\vec{V}, \vec{F}, \vec{a}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{24} \ldots$$

Il existe plusieurs types de vecteurs (***fig. 1.4.***) :

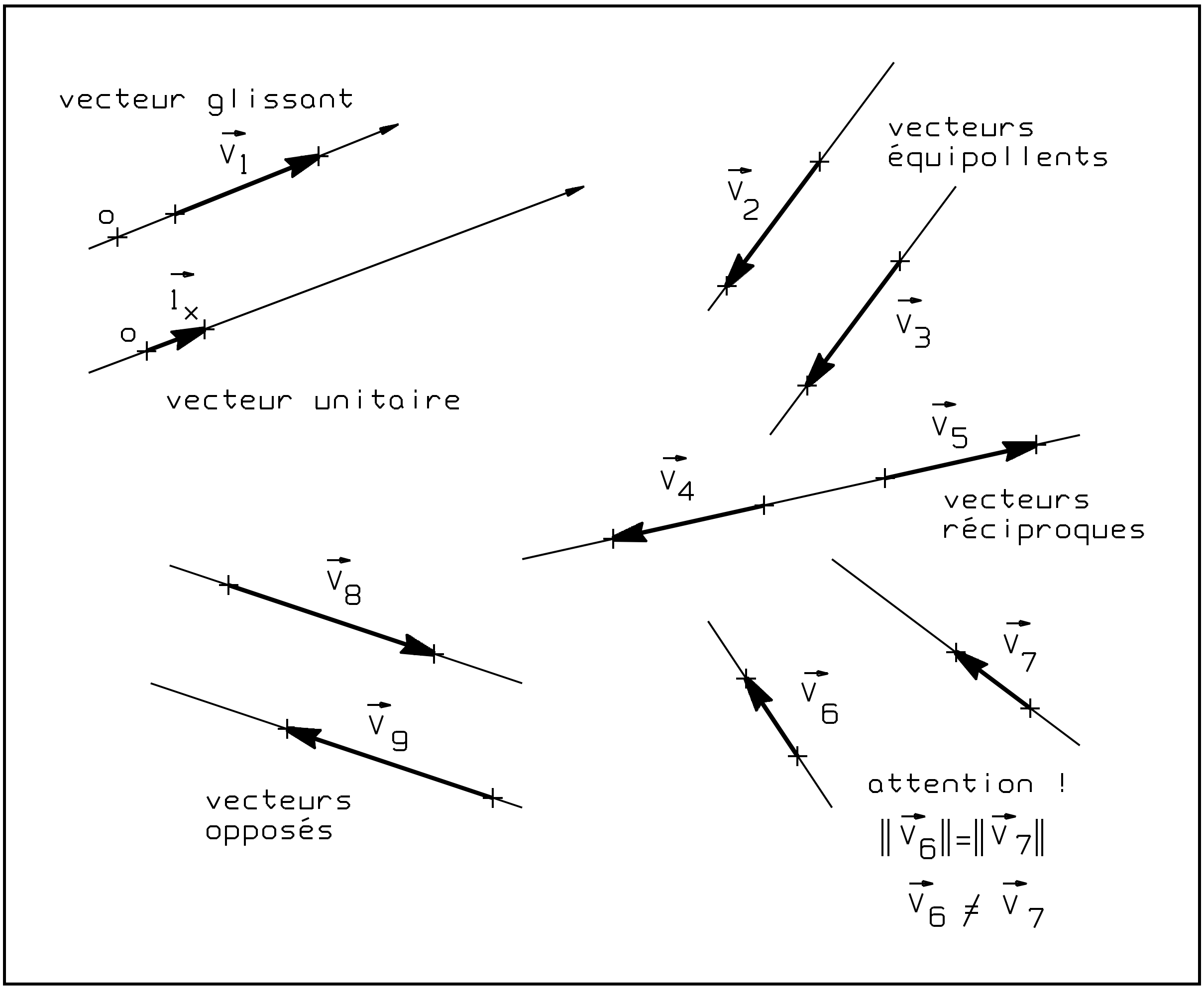

fig. 1.4. *- Vecteurs : définitions.*

A) *Vecteur libre*

Son origine n'est pas déterminée et sa ligne d'action est parallèle à une direction donnée. *Exemple* : le vecteur $\vec{g}$ de l'accélération de la pesanteur.

B) *Vecteur glissant*

Vecteur dont l'origine n'est pas précisée sur la ligne d'action (*vecteur libre sur une ligne d'action*).

C) *Vecteur lié*

Vecteur glissant avec un point d'application.
Quatre caractéristiques :

- sa ligne d'action, c'est-à-dire la droite $\overline{x'x}$ qui le supporte;
- son sens (de A vers B);
- son origine, le point A;
- et le nombre positif qui mesure la longueur $\overline{AB}$. Ce nombre est le module (ou intensité) du vecteur, noté $\|\vec{AB}\|$ (scalaire)

Si la ligne d'action est un axe, le sens du vecteur est indiqué par le signe + ou − suivant que le vecteur et l'axe ont ou non le même sens.

D) <u>*Vecteurs colinéaires*</u>

Deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont colinéaires lorsqu'il existe un réel k tel que $\vec{V}_1 = k\,\vec{V}_2$. Ils ont donc mêmes directions mais des modules différents. Le *vecteur nul est colinéaire à tout vecteur*.

E) <u>*Vecteurs équipollents ou (géométriquement) égaux*</u>

Les lignes d'action sont parallèles et les vecteurs ont même sens (donc même direction) et même module.

F) <u>*Vecteurs opposés*</u>

Les lignes d'action sont parallèles, les modules sont les mêmes, mais les sens sont contraires.

G) <u>*Vecteurs réciproques*</u>

Vecteurs opposés sur la même ligne d'action.

H) <u>*Vecteurs nuls*</u>

Vecteurs n'ayant ni direction, ni sens, ni module (noté : $\vec{0}$).

I) <u>*Vecteur unitaire*</u>

{Unit Vectors p.821 + Standard basis vectors p.820}

Vecteur dont le module est égal à l'unité. Dans le cas d'axes de références Ox, Oy et Oz, nous désignerons ces vecteurs unitaires par $\vec{1}_x$, $\vec{1}_y$ et $\vec{1}_z$. Une base "*orthonormée*" directe est une base orthogonale directe pour laquelle chaque axe est muni de son vecteur unitaire propre.

1.2.3. <u>Algèbre vectorielle</u>

Les opérations d'addition, de soustraction et de multiplication habituelles dans l'algèbre des nombres réels sont généralisables à l'algèbre des vecteurs, à condition d'avoir des définitions convenables. Les définitions suivantes sont fondamentales.

{Combining vectors p.816}

A) La somme (ou résultante) de $\vec{V}_1$ et de $\vec{V}_2$, est un vecteur $\vec{R}$ formé en plaçant l'origine de $\vec{V}_2$, à l'extrémité de $\vec{V}_1$ et en joignant l'origine de $\vec{V}_1$ à l'extrémité de $\vec{V}_2$. On écrit : $\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ (par ex. : $\vec{3} + \vec{4} = \vec{5}$). Cette définition est équivalente pour l'addition vectorielle à la construction du parallélogramme comme cela est indiqué également à la figure ci-dessous.

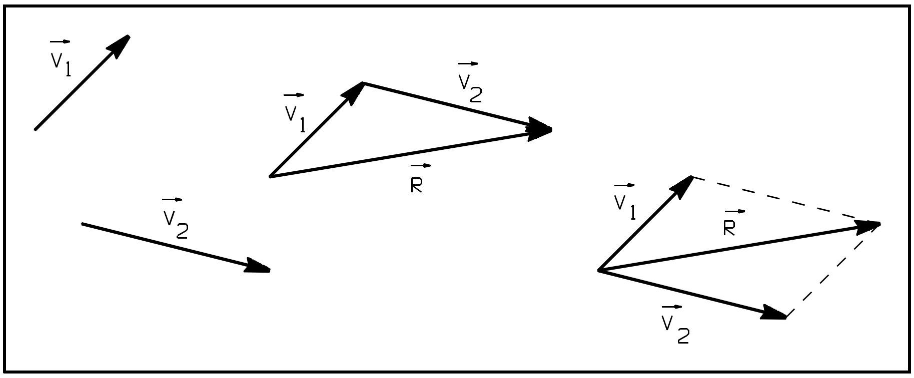

fig. 1.5. *- Résultante de deux vecteurs.*

Les extensions aux sommes de plus de deux vecteurs sont immédiates. Par exemple, la ***fig. 1.6.*** montre comment obtenir la somme ou résultante $\vec{R}$ des vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ et $\vec{V}_4$ (l'ordre dans lequel on exécute la somme n'a pas d'importance : *commutativité*).

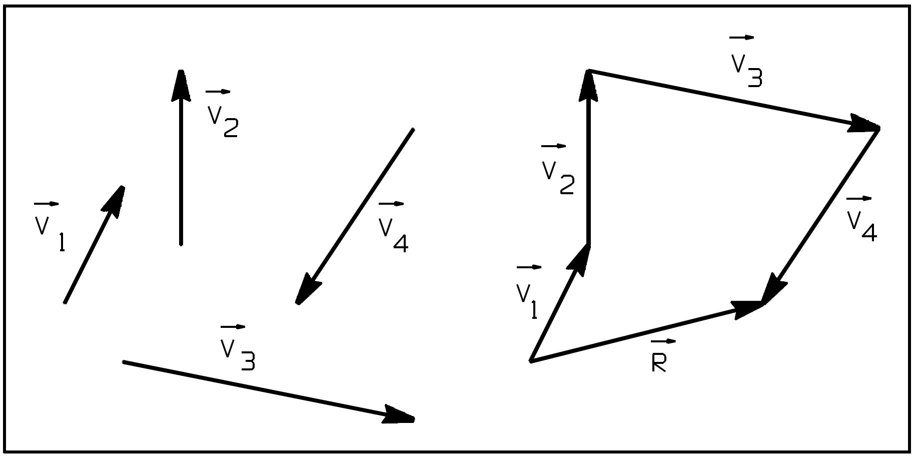

fig. 1.6. *- Résultante de vecteurs*

{p.817}

B) La différence de $\vec{V}_1$ et de $\vec{V}_2$ notée : $\vec{R} = \vec{V}_1 + \left(-\vec{V}_2\right)$, est obtenue en faisant la somme de $\vec{V}_1$ et de $\left(-\vec{V}_2\right)$ vecteur opposé à $\vec{V}_2$. La différence de deux vecteurs est non commutative $\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = -\left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right)$

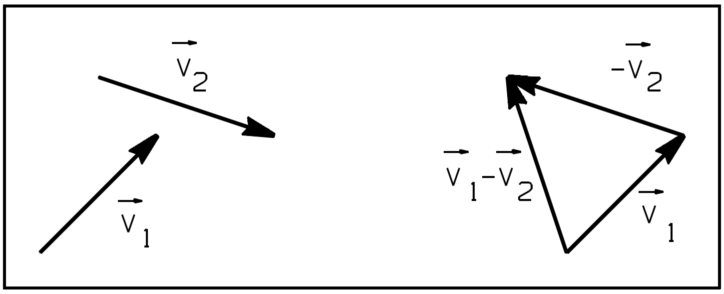

fig. 1.7. *- Différence de 2 vecteurs.*

{Scalar multiplication p.817}

C) Le produit d'un vecteur $\vec{V}$ par un scalaire n est le vecteur $n\,\vec{V}$ de même direction que $\vec{V}$ dont le module est $|n|$ fois le module de $\vec{V}$ et dont le sens est identique ou opposé à celui de $\vec{V}$, selon que n est positif ou négatif. Si $n = 0$, alors $n\,\vec{V} = \vec{0}$ vecteur nul.

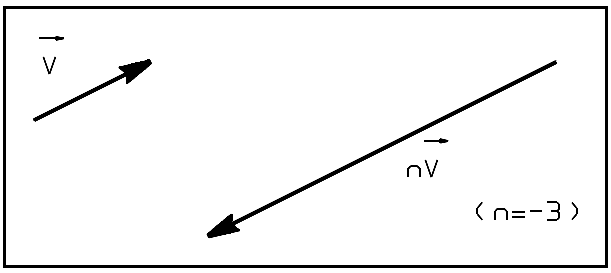

fig. 1.8. *- Produit d'un vecteur par un scalaire.*

1.2.4. Lois de l'algèbre vectorielle

{Properties of vectors p.819}

Si $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ sont des vecteurs et si *m* et *n* sont des scalaires, on a alors :

- $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$ (commutativité pour l'addition vectorielle)
- $\left(\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right) + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + \left(\vec{V}_2 + \vec{V}_3\right)$ (associativité pour l'addition vectorielle)
- $m\left(n\,\vec{V}_1\right) = \left(m\,n\right)\vec{V}_1 = n\left(m\,\vec{V}_1\right)$ (associativité pour la multiplication par les scalaires)
- $\left(m+n\right)\vec{V}_1 = m\,\vec{V}_1 + n\,\vec{V}_1$ (distributivité)
- $m\left(\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right) = m\,\vec{V}_1 + m\,\vec{V}_2$ (distributivité)

1.3. *Expressions analytiques d'un vecteur*

1.3.1. Mesure d'un vecteur sur un axe

Soit à mesurer le vecteur $\vec{V}$ sur l'axe Ox. On choisit un vecteur unitaire $\vec{1}_x$ (par exemple : $\left\|\vec{1}_x\right\| = 1\,cm$).

Mesurer le vecteur $\vec{V}$, c'est le comparer à $\vec{1}_x$. On a, par exemple :

$$\underbrace{\vec{V}}_{vecteur} = -4\,\vec{1}_x\,, \qquad \underbrace{V_x}_{projection} = \underbrace{-}_{sens}\ \underbrace{4\,cm}_{module} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\left\|\vec{V}\right\|}_{norme} = 4\,cm$$

Notations :

$\vec{V}$: indique le vecteur.

V_x : c'est la projection du vecteur $\vec{V}$ sur l'axe x (nombre avec son signe) ou composante de $\vec{V}$ sur Ox.

$\left\|\vec{V}\right\|$: c'est le module du vecteur $\vec{V}$ (nombre positif).

$\left\|\vec{V}\right\| = \left|V_x\right|$: valeur absolue.

Relation de Chasles [(1)] Pour trouver la projection d'un vecteur :

{p.818 formule 1}

$$V_x = \overline{OB} - \overline{OA} = coordonnée\ d'extrémité - coordonnée\ d'origine = x_B - x_A$$

Exemple : si A est à 8 *cm* et B à 4 *cm* de l'origine O, $V_x = 4\,cm - 8\,cm = -4\,cm$

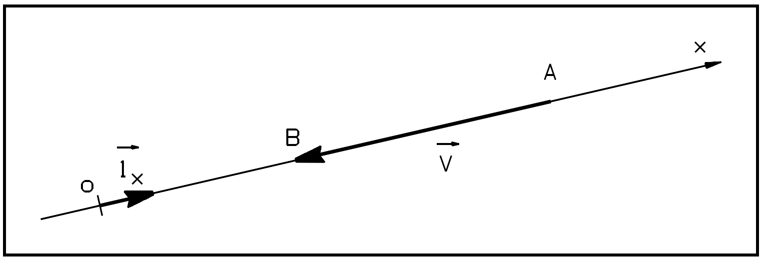

fig. 1.9. *- Mesure d'un vecteur.*

[(1)] *Chasles Michel (1793 [Épernon] - 1880 [Paris]) : mathématicien français.*

1.3.2. Projection d'un vecteur

A) *Dans un plan*

Pour déterminer la projection de $\vec{AB}$ sur la droite *a*, parallèlement à la droite *b*, on reporte par A et B, deux parallèles à la droite *b* jusque A' et B'. Projection = $\vec{A'B'}$ sur la droite *a*.

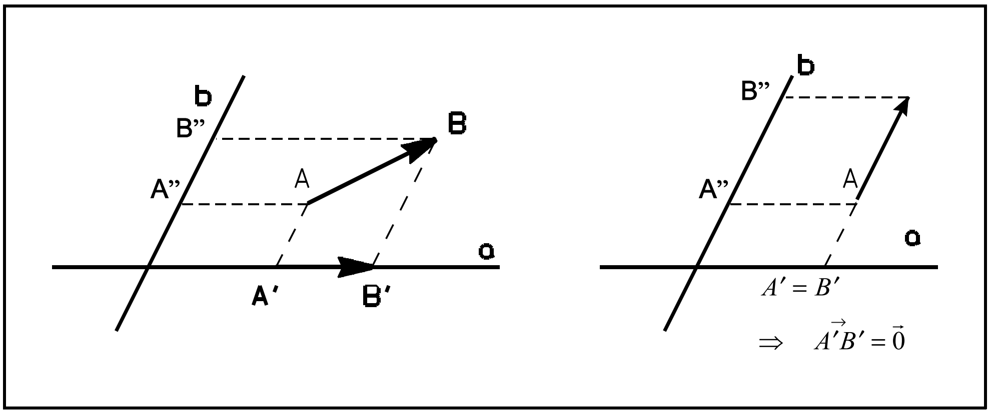

fig. 1.10. *- Projection d'un vecteur dans un plan non orthonormé.*

B) *Dans l'espace*

- La projection de $\vec{AB}$ sur le plan π, parallèlement à la droite *b*, est $\vec{A'B'}$ déterminée en menant par A et B deux parallèles à la droite *b* jusqu'à A' et B'.

  $\vec{A'B'}$ = projection dans π, parallèlement à la droite *b*.

- La projection de $\vec{AB}$ sur la droite *a*, parallèlement au plan π, est obtenue en menant, par A et B, deux plans parallèles à π et en déterminant A' et B' points de percée de la droite *a* dans ces 2 plans.

  $\vec{A'B'}$ = projection sur la droite *a*, parallèlement à π.

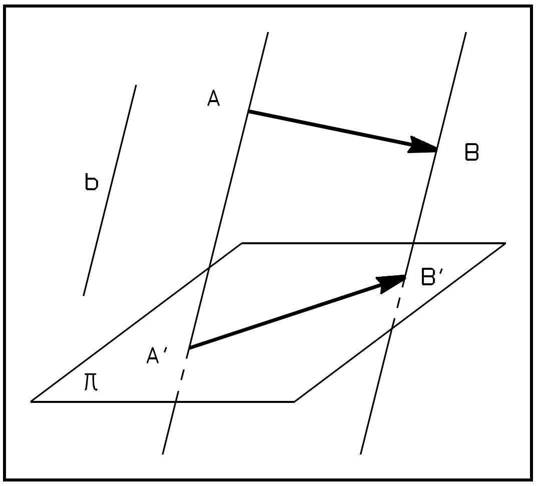

fig. 1.11. *- Projection dans l'espace.*

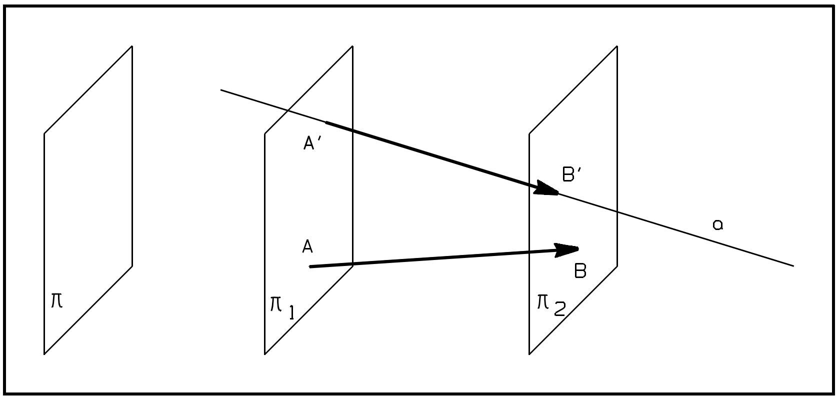

fig. 1.12. *-*

1.3.3. Composantes d'un vecteur

{Components p.817}

A) *Vecteur dans un plan orthonormé direct Oxy*

Soit le vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$. En projetant $\overrightarrow{AB}$ sur Ox, on obtient $\vec{V}_x$; de même en projetant sur Oy, on obtient $\vec{V}_y$. De par les lois de l'algèbre vectorielle :

$$\left.\begin{cases} \vec{V}_x = V_x\ \vec{1}_x \\ \vec{V}_y = V_y\ \vec{1}_y \end{cases}\right\rangle \vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{V} = V_x\ \vec{1}_x + V_y\ \vec{1}_y}$$

{p.820}

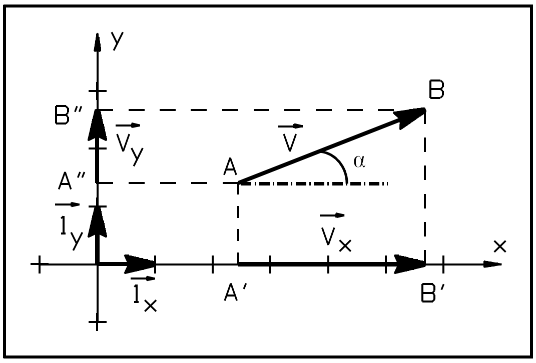

fig. 1.13. *- Projection d'un vecteur dans un plan orthonormé.*

V_x et V_y sont appelés les "*composantes*" du vecteur $\vec{V}$. Le module de $\vec{V}$ vaut :

$$\boxed{\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \quad \text{et} \quad \tan\alpha = \frac{V_y}{V_x} \quad \text{avec, dans ce cas-ci :} \quad \begin{cases} V_x = \left\|\vec{V}\right\|\cos\alpha \\ V_y = \left\|\vec{V}\right\|\sin\alpha \end{cases}$$

{Magnitude or length p.818}

Si l'origine du vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{OB}$ est confondue avec l'origine O de la base utilisée (***fig. 1.14.***), les composantes du vecteur $\vec{V}$ sont égales aux coordonnées du point B (théorème de Chasles) :

$$\begin{cases} V_x = x_B - x_0 = x_B \\ V_y = y_B - y_0 = y_B \end{cases}$$

Un tel vecteur $\overrightarrow{OB}$ est appelé "*vecteur-position*" ou "*rayon-vecteur*". *{Position vector p.818}*

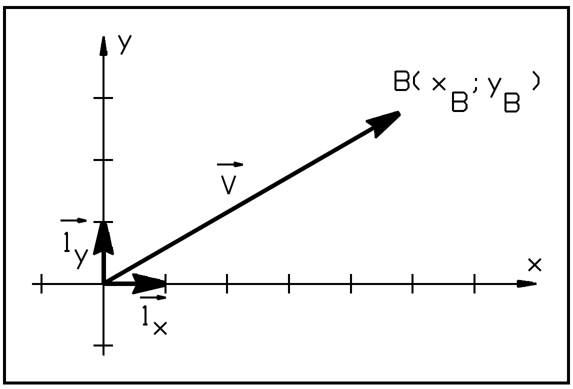

fig. 1.14. *- Vecteur position.*

Application 1.1. Détermination de vecteurs dans le plan.

Solution :

a) *Vecteur lié* : $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$

- soit A (x_A; y_A) et B (x_B; y_B) (voir ***fig. 1.15.a***);
- soit A (x_A; y_A), module $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, et angle α du vecteur avec la direction positive Ox (voir ***fig. 1.15.b***);
- soit A (x_A; y_A), V_x et V_y (voir ***fig. 1.15.c***);

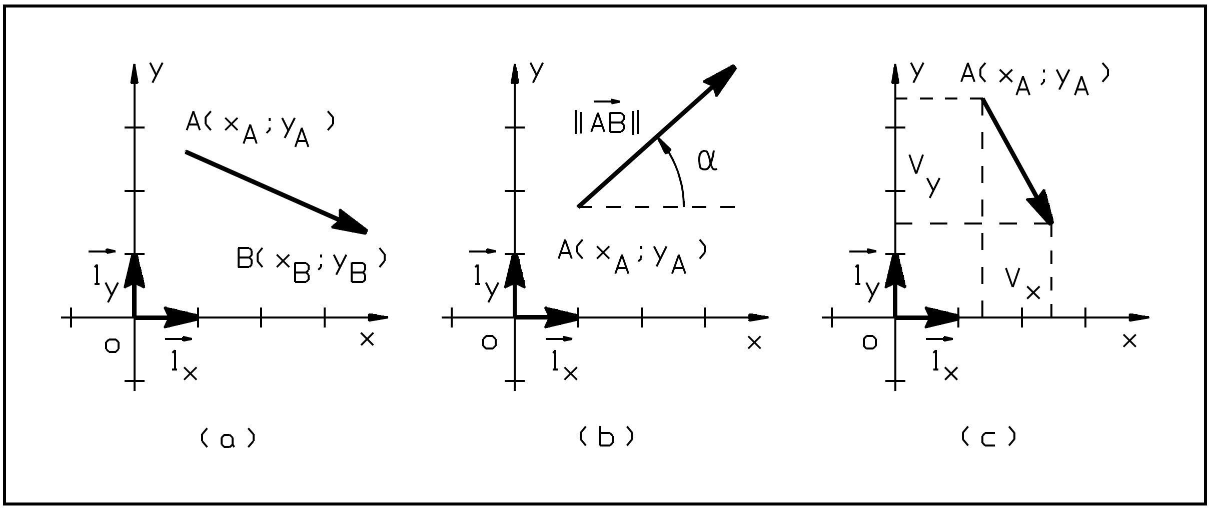

fig. 1.15. *- Application 1.1.*

b) *Vecteur glissant* : $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$

- soit ligne d'action : $y = a\,x + b$ et V_x (ou V_y) (voir ***fig. 1.16.d***);
- soit ligne d'action : $m\,x + n\,y + p = 0$; module $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, et sens de $\overrightarrow{AB}$ (par exemple : "x décroissants") (voir ***fig. 1.16.e***)

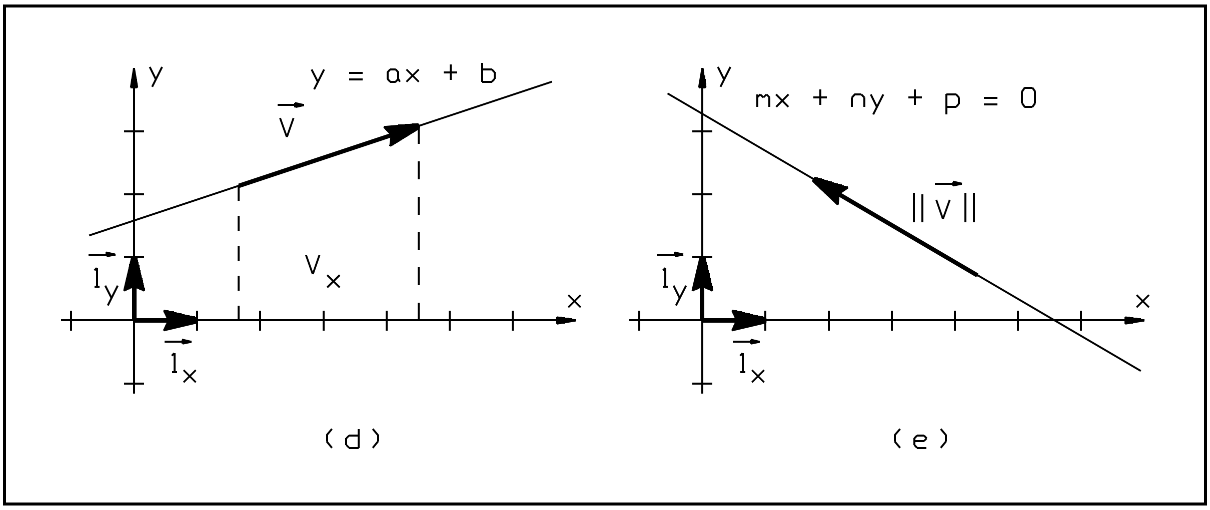

fig. 1.16. *-*

c) Vecteur libre : $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$

- soit module $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ et angle α du vecteur avec la direction positive Ox (voir ***fig. 1.17.f***);
- soit direction $y = a\ x$, module $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ et sens de $\overrightarrow{AB}$ (par exemple : “y croissants”) (voir ***fig. 1.17.g***);

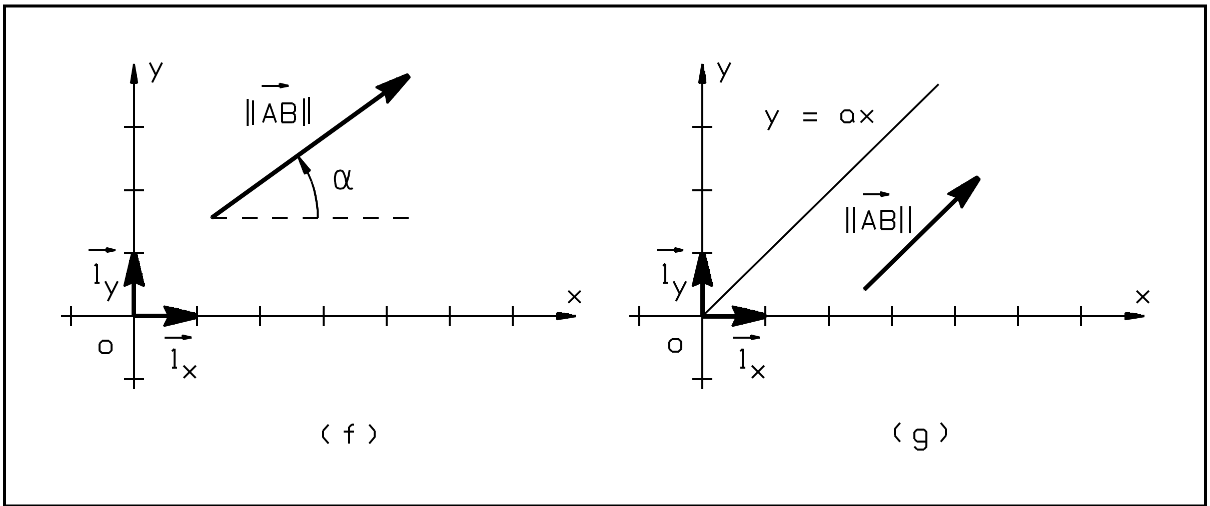

fig. 1.17. -

B) *Vecteur dans un espace orthonormé direct Oxyz*

{Components p.817-818}

La même technique de projections et de détermination des composantes est d’application (***fig. 1.18.***) : soit le vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$; sa projection sur Ox, parallèlement à Oyz, est le vecteur $\vec{V}_x$ sa projection sur Oy, parallèlement à Ozx, est le vecteur $\vec{V}_y$; sa projection sur Oz, parallèlement à Oxy, est le vecteur $\vec{V}_z$.

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{V}_x = V_x\ \vec{1}_x \\ \vec{V}_y = V_y\ \vec{1}_y \\ \vec{V}_z = V_z\ \vec{1}_z \end{array}\right\rangle \vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{V} = V_x\ \vec{1}_x + V_y\ \vec{1}_y + V_z\ \vec{1}_z}$$

{p.820}

V_x, V_y et V_z sont appelés les “*composantes*” du vecteur $\vec{V}$. Le module de $\vec{V}$ vaut :

$\boxed{\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}$ (dans un repaire orthonormé)

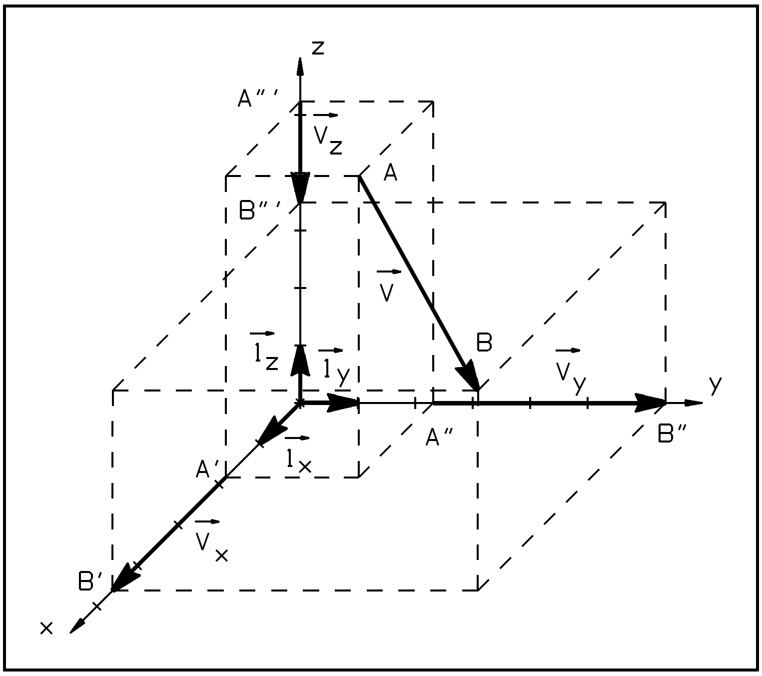

fig. 1.18. - *Projection dans une base orthonormée directe.*

Pour les vecteurs-positions $\overrightarrow{OB}$, on peut appliquer la même remarque que celle formulée en ***§ 1.3.3.A***).

Application 1.2. Détermination de vecteurs dans l'espace.

Solution :

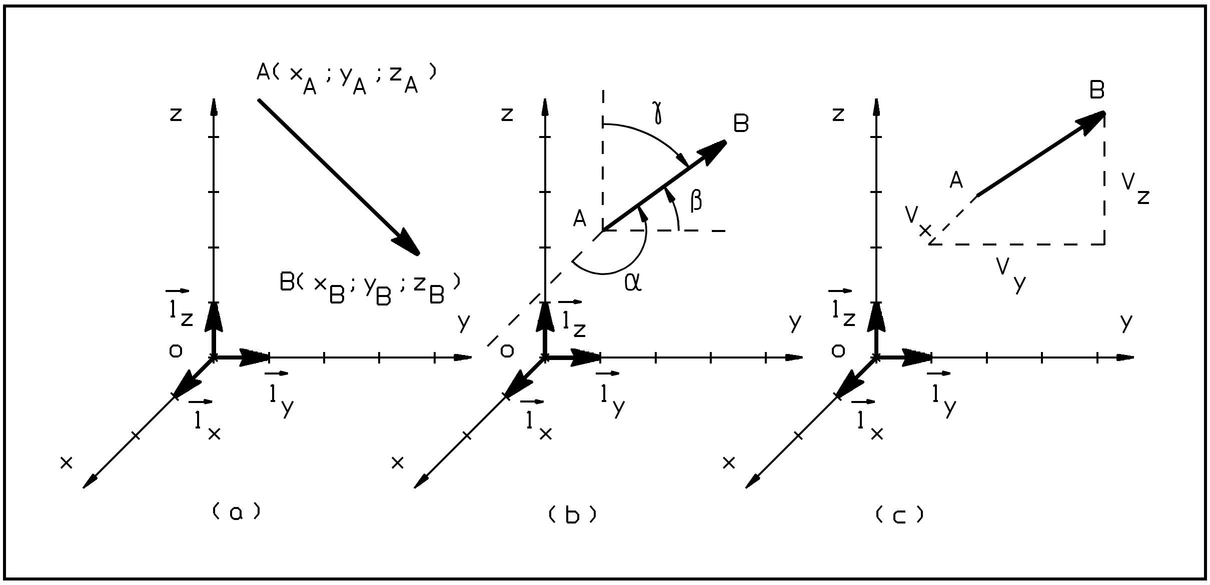

fig. 1.19. - *Application 1.2.*

a) ***Vecteur lié*** : $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$

- soit A (x_A; y_A; z_A) et B (x_B; y_B; z_B) (voir ***fig. 1.19.a***);

Exemple chiffré :
Soit A (2; 1; 5) et B (1; 4; 2)
Par la relation de Chasles :

$$\vec{V} = \overrightarrow{AB} = (1-2)\,\vec{1}_x + (4-1)\,\vec{1}_y + (2-5)\,\vec{1}_z$$
$$= -1\,\vec{1}_x + 3\,\vec{1}_y - 3\,\vec{1}_z$$

- soit A (x_A; y_A; z_A), module $\|\overrightarrow{AB}\|$, et angle α du vecteur avec la direction positive Ox, β angle du vecteur avec la direction positive Oy, et sens de $\overrightarrow{AB}$ (par exemple : "z croissants"); relation aux "*cosinus directeurs*" : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (voir ***fig. 1.19.b***);
(γ étant l'angle entre la direction positive Oz et l vecteur)

{Direction angles - Direction cosines p.827}

Exemple chiffré :
soit A (1; 1; 3), $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$, z croissants, $\alpha = 105°$, $\beta = 20°$
Par la relation aux cosinus directeurs :

$$\gamma = \arccos\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$$
$$= \arccos\sqrt{1-\cos^2(105°)-\cos^2(20°)} = 77.08°$$
$$\vec{V} = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AB}\|\cos\alpha\,\vec{1}_x + \|\overrightarrow{AB}\|\cos\beta\,\vec{1}_y + \|\overrightarrow{AB}\|\cos\gamma\,\vec{1}_z$$
$$= 3\cos 105°\,\vec{1}_x + 3\cos 20°\,\vec{1}_y + 3\cos 77.08°\,\vec{1}_z$$
$$= -0.776\,\vec{1}_x + 2.82\,\vec{1}_y + 0.671\,\vec{1}_z$$

- soit A (x_A; y_A; z_A), V_x, V_y, V_z. (voir ***fig. 1.19.c***);

Sachant que : $\begin{cases} V_x = V\cos\alpha \\ V_y = V\cos\beta \\ V_z = V\cos\gamma \end{cases}$

Et que la *direction du vecteur* est donné par :

$$\boxed{\vec{1}_d = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \cos\alpha\,\vec{1}_x + \cos\beta\,\vec{1}_y + \cos\gamma\,\vec{1}_z}$$

{Formule 11 p.828}

Exemple chiffré :

soit A (-1; 1; 2), $V_x = 1$; $V_y = 3$; $V_z = 2$

$$\vec{V} = \overset{\rightarrow}{AB} = \left\| \overset{\rightarrow}{AB} \right\| \vec{1}_d = V_x\ \vec{1}_x + V_y\ \vec{1}_y + V_z\ \vec{1}_z$$

$$= 1\,\vec{1}_x + 3\,\vec{1}_y + 2\,\vec{1}_z$$

b) ***Vecteur glissant*** : $\vec{V} = \overset{\rightarrow}{AB}$ (voir *fig. 1.20.*)

Ligne d'action donnée par l'intersection de 2 plans (π_1 et π_2)

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv m_1\ x + n_1\ y + p_1\ z + q_1 = 0 \\ \pi_2 \equiv m_2\ x + n_2\ y + p_2\ z + q_2 = 0 \end{cases}$$

Module $\left\| \overset{\rightarrow}{AB} \right\|$ et sens de $\overset{\rightarrow}{AB}$ (par exemple : "x croissants");

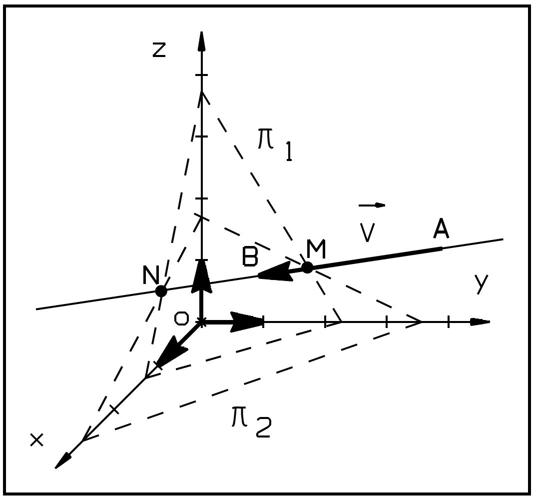

fig. 1.20. -

1.3.4. Expression analytique de la résultante

{p.819}

Soit $\vec{R}$ la résultante d'un système de *n* vecteurs $\vec{V}_i$ dans une base orthonormée Oxyz, on peut écrire :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(V_{i\,x}\ \vec{1}_x + V_{i\,y}\ \vec{1}_y + V_{i\,z}\ \vec{1}_z \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} V_{i\,x} \right) \vec{1}_x + \left(\sum_{i=1}^{n} V_{i\,y} \right) \vec{1}_y + \left(\sum_{i=1}^{n} V_{i\,z} \right) \vec{1}_z$$

avec : $$\boxed{R_x = \sum_{i=1}^{n} V_{i\,x}; \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} V_{i\,y}; \quad R_z = \sum_{i=1}^{n} V_{i\,z}}$$

on obtient l'expression analytique du vecteur résultante :

$$\boxed{\vec{R} = R_x\ \vec{1}_x + R_y\ \vec{1}_y + R_z\ \vec{1}_z}$$

ainsi que son module :

$$\boxed{\left\| \vec{R} \right\| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} V_{i\,x} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} V_{i\,y} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} V_{i\,z} \right)^2}}$$

Soit $n = 2$ dans Oxy :

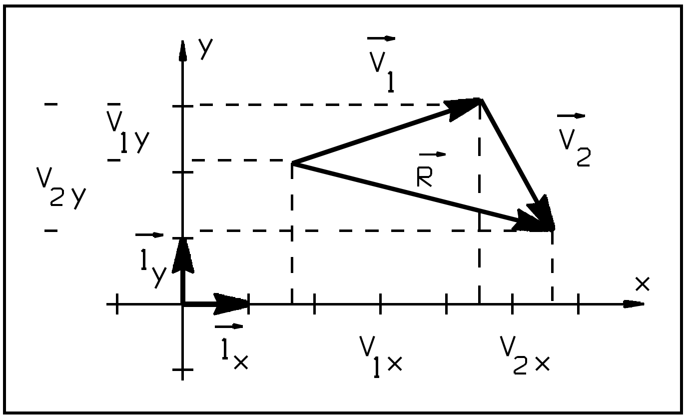

fig. 1.21. *- Expression analytique de la résultante.*

1.4. *Opérations fondamentales sur les vecteurs*

1.4.1. Produit scalaire

{*Section 12.3 p.824*}

Soit $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ deux vecteurs libres, tracés à partir d'une origine commune (***fig. 1.22.***).

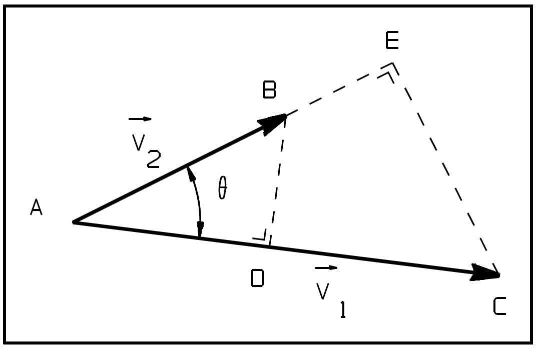

fig. 1.22. *- Produit scalaire.*

On définit le produit scalaire entre $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ par la relation :

{*Dans le Stewart, ceci est un théorème*}

$\boxed{\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = \left\|\vec{V}_1\right\| \left\|\vec{V}_2\right\| \cos\theta}$ (θ : angle entre les directions positives des vecteurs)

Par conséquent, *le produit scalaire n'est autre chose que le produit algébrique de la longueur de l'un des vecteurs par la projection de l'autre sur la direction du premier*. Autrement dit :

$$\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = \overline{AC} \,.\, \overline{AD} = \overline{AB} \,.\, \overline{AE}$$

Il faut remarquer que $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2$ est un *scalaire* et non un vecteur ! Il est donc impossible de le "*représenter*".

Un exemple de *représentation physique* du produit scalaire est le *travail* :

$W = \vec{f} \bullet \vec{OA} = \left\|\vec{f}\right\| \left\|\vec{OA}\right\| \cos\theta$ (θ étant l'angle entre les deux vecteurs).

Les lois suivantes sont valables :

a) $$\begin{cases} si : -\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2} & \Rightarrow \quad \vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 > 0 \\ si : \theta = \pm \dfrac{\pi}{2} & \Rightarrow \quad \vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = 0 \\ si : \dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2} & \Rightarrow \quad \vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 < 0 \end{cases}$$

b) $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} soit : \vec{V}_1 \;\; et/ou \;\; \vec{V}_2 = \vec{0} \\ soit : \vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \end{cases}$ {*Formule 7 p.827*}

c) $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \bullet \vec{V}_1$ (commutativité)

d) $\vec{V}_1 \bullet \left(\vec{V}_2 + \vec{V}_3\right) = \vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \bullet \vec{V}_3$ (distributivité par rapport à l'addition vectorielle)

e) $n\left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2\right) = \left(n\,\vec{V}\right)_1 \bullet \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \bullet \left(n\,\vec{V}_2\right)$ (n étant un scalaire)

f) $\begin{cases} \vec{1}_x \bullet \vec{1}_x = \vec{1}_y \bullet \vec{1}_y = \vec{1}_z \bullet \vec{1}_z = 1 \\ \vec{1}_x \bullet \vec{1}_y = \vec{1}_y \bullet \vec{1}_z = \vec{1}_z \bullet \vec{1}_x = 0 \end{cases}$

g) $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_1 = \left\|\vec{V}_1\right\|^2 \underbrace{\cos 0°}_{=1} = V_{1x}^2 + V_{1y}^2 + V_{1z}^2$

h) $\theta = \arccos \dfrac{\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2}{\left\|\vec{V}_1\right\|\left\|\vec{V}_2\right\|}$

i) *expression analytique du produit scalaire* entre $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$:

$$\left\{\begin{aligned} \vec{V}_1 &= V_{1x}\,\vec{1}_x + V_{1y}\,\vec{1}_y + V_{1z}\,\vec{1}_z \\ \vec{V}_2 &= V_{2x}\,\vec{1}_x + V_{2y}\,\vec{1}_y + V_{2z}\,\vec{1}_z \end{aligned}\right\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = V_{1x}\,V_{2x}\underbrace{\left(\vec{1}_x \bullet \vec{1}_x\right)}_{=1} + V_{1x}\,V_{2y}\underbrace{\left(\vec{1}_x \bullet \vec{1}_y\right)}_{=0} + V_{1x}\,V_{2z}\underbrace{\left(\vec{1}_x \bullet \vec{1}_z\right)}_{=0} + \ldots$$

d'où :

$$\boxed{\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = V_{1x}\,V_{2x} + V_{1y}\,V_{2y} + V_{1z}\,V_{2z}}$$

{Dans le Stewart, ceci est une définition}

Application 1.3. Dans un espace orienté Oxyz, deux vecteurs sont donnés par :

$\vec{V}_1 = \overrightarrow{AB}$ avec A (1; 3; 8) et B (6; 7; 8)

$\vec{V}_2 = -8\,\vec{1}_x + 10\,\vec{1}_y + 7\,\vec{1}_z$

Déterminer l'angle que forment ces deux vecteurs entre eux.

Solution :

Recherche de l'expression analytique de $\vec{V}_1$:

$$\vec{V}_1 = (6-1)\,\vec{1}_x + (7-3)\,\vec{1}_y + (8-8)\,\vec{1}_z = 5\,\vec{1}_x + 4\,\vec{1}_y$$

Recherche de l'angle :

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2}{\left\|\vec{V}_1\right\|\left\|\vec{V}_2\right\|}\right) = \arccos\left(\frac{\left(5 \times (-8)\right) + \left(4 \times 10\right)}{\sqrt{5^2 + 4^2} \times \sqrt{8^2 + 10^2 + 7^2}}\right) = \arccos(0)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

1.4.2. Produit vectoriel

{Section 12.4 p.832}

Soit $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ deux vecteurs libres, tracés à partir d'une origine commune (***fig. 1.23.***).

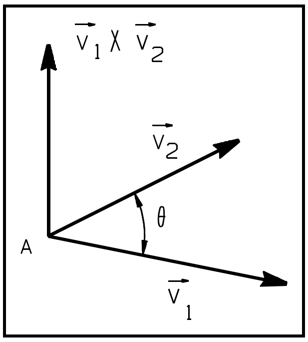

fig. 1.23. *- Produit vectoriel.*

> *Définition* : Le produit vectoriel $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ est un vecteur dont le module est défini comme le produit des modules de $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ par le sinus de l'angle des deux vecteurs; la direction de $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ est perpendiculaire au plan formé par $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ et son sens est tel que $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ forment un trièdre direct. [2]

D'où : *{Dans le Stewart, ceci est un théorème}*

$$\begin{array}{l} \left\|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right\| = \left\|\vec{V}_1\right\| \left\|\vec{V}_2\right\| \sin\theta \quad avec \quad 0 < \theta < \pi \\ \left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right) \perp \vec{V}_1 \quad et \quad \left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right) \perp \vec{V}_2 \\ \vec{V}_1, \vec{V}_2 \ et \left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right) \quad orientation\ directe \end{array}$$

(θ : angle entre les directions positives des vecteurs)

---

[2] *Plusieurs notations sont en concurrence pour le produit vectoriel :*

- *En France, le produit vectoriel de $\vec{V}_1$ et de $\vec{V}_2$ est noté $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$, où le V inversé se lit wedge ou vectoriel. Cette notation a été initiée par Cesare Burali-Forti et Roberto Marcolongo en 1908. Son inconvénient est de rentrer en conflit avec la notation du produit extérieur.*
- *Dans la littérature anglophone (et au Canada francophone, ainsi qu'en Suisse), le produit vectoriel est noté $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$. Cette notation est due à Josiah Willard Gibbs. Son inconvénient est d'induire une confusion éventuelle avec le produit des réels et le produit cartésien. Mais ces produits ne portent pas sur des objets de même nature.*
- *Une troisième notation est l'utilisation des crochets de Lie : $\left[\vec{V}_1, \vec{V}_2\right]$.*

Un exemple de *représentation physique* du produit vectoriel est la *force magnétique ou force de Lorentz*, force qui s'exerce sur une particule électrique en mouvement dans un champ magnétique.
Si une particule de charge électrique q en mouvement à une vitesse $\vec{v}$ dans une région de l'espace ou agit un champ magnétique $\vec{B}$, alors elle est soumise à une force magnétique $\vec{f}$ égale à :

$\vec{f} = \left(q\,\vec{v}\right) \times \vec{B}$ $\quad$ ($\|\vec{B}\|$ exprimé en T; $\|\vec{v}\|$ en m/s et q en C)

De par la définition du produit vectoriel, il en découle une notion de "*vrai vecteur*" et de "*pseudo-vecteur*".

En effet, pour écrire les vecteurs, il est nécessaire de les exprimer dans la base orthonormé d'un repère. Conventionnellement, on choisit une base "*directe*"où les vecteurs de la base sont donnés par les trois doigts de la main droite: le troisième vecteur est le produit vectoriel des deux premiers et son sens définit le caractère "*direct*" de la base.

Il s'en suit que :

- Un vecteur est un "*vrai vecteur*" (ou *vecteur polaire*) si son sens ne dépend pas de l'orientation de l'espace.
- Un "*pseudo-vecteur*" (ou *vecteur axial*) si son sens dépend de l'orientation de l'espace.

- Les vecteurs position, vitesse, accélération, force,... sont de *vrais vecteurs* (le repère utilisé pour décrire le mouvement d'un solide n'a pas d'influence sur sa vitesse réelle).
- les vecteurs champs magnétique, rotation instantanée, moment d'une force, moment cinétique, sont des *pseudo-vecteurs*.

De manière générale, tout produit vectoriel de deux *vrais vecteurs* est un *pseudo-vecteur*, alors que le produit vectoriel d'un *vrai vecteur* par un *pseudo-vecteur* est un *vrai vecteur*.

Les lois suivantes sont valables :

a) $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = -\,\vec{V}_2 \times \vec{V}_1$ (anti-symétrique)

b) $\vec{V}_1 \times \left(\vec{V}_2 + \vec{V}_3\right) = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \times \vec{V}_3$ (distributivité par rapport à l'addition vectorielle)

c) $n\left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right) = \left(n\,\vec{V}_1\right) \times \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \times \left(n\,\vec{V}_2\right)$ (n étant un scalaire)

d) $$\begin{cases} \vec{1}_x \times \vec{1}_x = \vec{1}_y \times \vec{1}_y = \vec{1}_z \times \vec{1}_z = \vec{0} \\ \vec{1}_x \times \vec{1}_y = \vec{1}_z ; \vec{1}_y \times \vec{1}_z = \vec{1}_x ; \vec{1}_z \times \vec{1}_x = \vec{1}_y \\ \vec{1}_y \times \vec{1}_x = -\,\vec{1}_z ; \vec{1}_z \times \vec{1}_y = -\,\vec{1}_x ; \vec{1}_x \times \vec{1}_z = -\,\vec{1}_y \end{cases}$$

e) $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = -\,\vec{V}_2 \times \vec{V}_1$ et $\left\|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right\|$ = surface d'un parallélogramme de côtés $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$

f) Si $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \vec{0}$ et si $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ ne sont pas des vecteurs nuls, alors $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont parallèles (car $\sin\theta = \sin 0 = 0$)

g) *expression analytique du produit vectoriel* entre $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{V}_1 = V_{1x}\ \vec{1}_x + V_{1y}\ \vec{1}_y + V_{1z}\ \vec{1}_z \\ \vec{V}_2 = V_{2x}\ \vec{1}_x + V_{2y}\ \vec{1}_y + V_{2z}\ \vec{1}_z \end{array}\right\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = V_{1x}\, V_{2x} \underbrace{\left(\vec{1}_x \times \vec{1}_x\right)}_{=\vec{0}} + V_{1x}\, V_{2y} \underbrace{\left(\vec{1}_x \times \vec{1}_y\right)}_{=\vec{1}_z} + V_{1x}\, V_{2z} \underbrace{\left(\vec{1}_x \times \vec{1}_z\right)}_{=-\vec{1}_y} + \ldots$$

d'où :

$$\boxed{\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \left(V_{1y}\, V_{2z} - V_{1z}\, V_{2y}\right)\vec{1}_x - \left(V_{1x}\, V_{2z} - V_{1z}\, V_{2x}\right)\vec{1}_y + \left(V_{1x}\, V_{2y} - V_{1y}\, V_{2x}\right)\vec{1}_z}$$

ou :

$$\boxed{\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \\ V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \end{vmatrix}}$$

h) $\vec{V}_1 \times \left(\vec{V}_2 + \lambda\, \vec{V}_1\right) = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 + \underbrace{\vec{V}_1 \times \lambda\, \vec{V}_1}_{=\vec{0}\,(2\ vecteurs\ //)} = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 \quad (\lambda \in R)$

Application 1.4. Dans le plan Oxy, on donne le vecteur $\vec{V}_1 = \overrightarrow{AB}$ avec A (3; 1) et B (6; 4). Calculer, par l'algèbre vectorielle, la distance d séparant C (4; 5) de la ligne d'action du vecteur $\vec{V}_1$ $\left(\|\vec{1}_x\| = \|\vec{1}_y\| = 1\, cm\right)$.

Solution :

Recherche de l'expression de la distance :

On peut écrire :

$$d = \|\overrightarrow{AC}\| \sin\theta = \left(\|\overrightarrow{BC}\| \sin\theta'\right)$$

Or :

$$\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \|\overrightarrow{AB}\| \underbrace{\|\overrightarrow{AC}\| \sin\theta}_{=d}$$

et dès lors :

$$d = \frac{\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

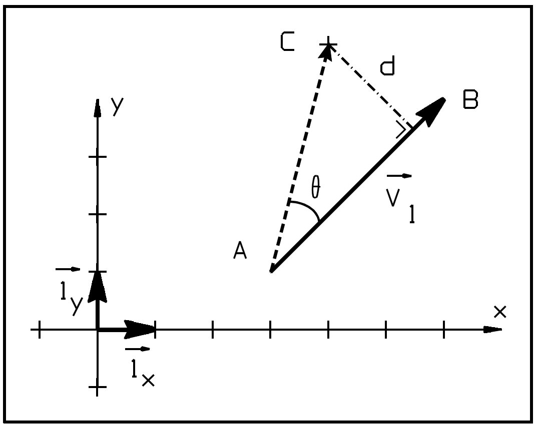

fig. 1.24. - Application 1.4.

Les expressions analytiques des vecteurs sont :

$$\begin{cases} \vec{AB} = 3\,\vec{1}_x + 3\,\vec{1}_y \\ \vec{AC} = 1\,\vec{1}_x + 4\,\vec{1}_y \end{cases}$$

Le produit vectoriel vaut :

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 9\,\vec{1}_z$$

La distance vaut :

$$d = \frac{\left\| \vec{AB} \times \vec{AC} \right\|}{\left\| \vec{AB} \right\|} = \frac{9}{\sqrt{3^2 + 3^2}} = 2.12\ cm$$

1.4.3. Produit mixte

{Triple poduct p.836}

Soit $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ trois vecteurs libres. On définit le produit mixte par :

$$\boxed{\vec{V}_1 \bullet \left(\vec{V}_2 \times \vec{V}_3\right)} \qquad \text{(c'est un scalaire !).}$$

Remarque : $\quad \vec{V}_1 \times \left(\vec{V}_2 \bullet \vec{V}_3\right)$ n'a pas de sens !

En écrivant l'expression analytique de $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$ puis celle du produit scalaire entre $\vec{V}_1$ et le résultat obtenu, on a :

$$\boxed{\vec{V}_1 \bullet \left(\vec{V}_2 \times \vec{V}_3\right) = \begin{vmatrix} V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \\ V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \\ V_{3x} & V_{3y} & V_{3z} \end{vmatrix}}$$

Le *produit mixte* représente le *volume d'un parallélépipède* de côtés $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ ou l'opposé de ce volume selon que $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ forment ou ne forment pas un trièdre direct.

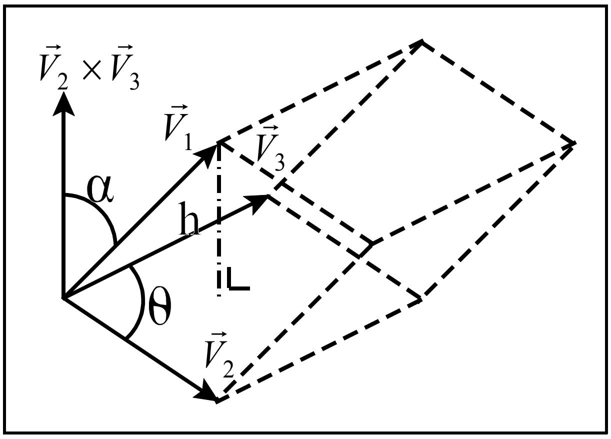

fig. 1.25. *- Produit mixte.*

En effet :

$$\vec{V}_1 \bullet \left(\vec{V}_2 \times \vec{V}_3\right) = \left\|\vec{V}_1\right\| \left\|\vec{V}_2 \times \vec{V}_3\right\| \cos\alpha$$

or : $\quad \left\|\vec{V}_1\right\| \cos\alpha = h$ et $\left\|\vec{V}_2 \times \vec{V}_3\right\| = \left\|\vec{V}_2\right\| \left\|\vec{V}_3\right\| \sin\theta = A \quad \Rightarrow \quad V = A\,h \quad cqfd$

Application 1.5. Quelle est le volume du parallélipipède construit sur les points suivant (exprimé en *cm*) :
O (0; 0; 0); A_1 (2; 0; 0); A_2 (0; 4; 0); A_3 (0; 0; 7).

Solution :
Volume = produit mixte

$$Volume = \vec{OA}_1 \bullet \left(\vec{OA}_2 \times \vec{OA}_3 \right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 56\, cm^3$$

Ce qui revient bien à :

$$Volume = surface\ de\ base \times hauteur = (2 \times 4) \times 7 = 56\, cm^3$$

<u>*Les lois suivantes sont valables*</u> :

a) $\vec{V}_1 \bullet \left(\vec{V}_2 \times \vec{V}_3\right) = \left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right) \bullet \vec{V}_3$ (permutation de signes scalaire et vectoriel)

b) $\left(\vec{V}_1 + \vec{V}_1'\right) \bullet \left(\vec{V}_2 \times \vec{V}_3\right) = \vec{V}_1 \bullet \left(\vec{V}_2 \times \vec{V}_3\right) + \vec{V}_1' \bullet \left(\vec{V}_2 \times \vec{V}_3\right)$ (distributivité par rapport à l'addition vectorielle)

c) $k\,\vec{V}_1 \bullet \left(m\,\vec{V}_2 \times n\,\vec{V}_3\right) = k\,m\,n\left(\vec{V}_1 \bullet \left(\vec{V}_2 \times \vec{V}_3\right)\right) \quad k, m, n \in R$ (multiplication par un réel)

d) $\vec{V}_1 \bullet \left(\vec{V}_2 \times \vec{V}_3\right) = -\,\vec{V}_2 \bullet \left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_3\right)$ (permutation de 2 vecteurs, le produit mixte change de signe)

e) $\vec{V}_1 \bullet \left(\vec{V}_2 \times \vec{V}_3\right) = \vec{V}_2 \bullet \left(\vec{V}_3 \times \vec{V}_1\right) = \vec{V}_3 \bullet \left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right)$ (permutation circulaire des vecteurs)

f) $\vec{V}_1 \bullet \left(\vec{V}_2 \times \vec{V}_3\right) = 0$

- un des vecteurs est nul;
- ou 2 vecteurs ont la même direction;
- ou les 3 vecteurs déterminent un même plan.

1.4.4. Double produit vectoriel

{Pas dans le Stewart}

Soit $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ trois vecteurs libres. On définit le double produit vectoriel par :

$\boxed{\left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right) \times \vec{V}_3}$ (c'est un vecteur !)

Le vecteur résultat est : $\perp$ à $\vec{V}_3$ et $\perp$ à $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$

Remarque : $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 \times \vec{V}_3$ n'a pas de sens !

On peut démontrer facilement l'égalité suivante, en développant séparément chacun des termes de l'égalité :

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right) \times \vec{V}_3 &= \left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_3\right)\vec{V}_2 - \left(\vec{V}_2 \bullet \vec{V}_3\right)\vec{V}_1 \\ \vec{V}_1 \times \left(\vec{V}_2 \times \vec{V}_3\right) &= \left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_3\right)\vec{V}_2 - \left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2\right)\vec{V}_3 \end{aligned}}$$

Autrement dit : $\left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right) \times \vec{V}_3 = m\,\vec{V}_2 - n\,\vec{V}_1$ (où m et n sont des scalaires).

Le double produit vectoriel revient donc à une différence de 2 vecteurs.

Il est clair que : $\left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right) \times \vec{V}_3 \neq \vec{V}_1 \times \left(\vec{V}_2 \times \vec{V}_3\right)$

Application 1.6. Que vaut $\vec{V}_1 \times \left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right)$ si $\vec{V}_1$ est perpendiculaire à $\vec{V}_2$?

Solution :

Développement du double produit vectoriel

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 \times \left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right) &= \underbrace{\left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2\right)}_{=\vec{0}}\vec{V}_1 - \left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_1\right)\vec{V}_2 \\ &= -\left\|\vec{V}_1\right\|^2 \vec{V}_2 \end{aligned}$$

1.4.5. **Division vectorielle**

{Pas dans le Stewart}

Soit à déterminer un vecteur $\vec{X}$ tel que $\vec{X} \times \vec{V}_1 = \vec{V}_2$.

L'opération *n'est possible que si et seulement si $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont perpendiculaires* (définition du produit vectoriel).

Or $\vec{X}$ doit aussi être perpendiculaire à $\vec{V}_2$; $\vec{X}$ doit donc appartenir au plan contenant $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$.

En effet :

$$et \begin{cases} \vec{V}_1 & \perp \vec{V}_2 \quad \left(\vec{X} \times \vec{V}_1 = \vec{V}_2\right) \\ \left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right) & \perp \vec{V}_2 \quad \left(par\ définition\right) \end{cases}$$

ce qui implique que $\vec{X}$ est dans le plan formé par $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ puisque $\vec{X}$ doit être perpendiculaire à $\vec{V}_2$.

On peut ainsi écrire $\vec{X}$ comme combinaison de ces 2 vecteurs :

$$\vec{X} = m\,\vec{V}_1 + n\left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right) \qquad \text{(avec } m \text{ et } n \text{ deux scalaires)}$$

Il reste à déterminer *m* et *n*; pour ce faire, remplaçons $\vec{X}$ par l'expression ci-dessus :

$$\vec{X} \times \vec{V}_1 = \vec{V}_2$$

$$\left(m\,\vec{V}_1 + n\left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right)\right) \times \vec{V}_1 = \vec{V}_2$$

$$\underbrace{m\,\vec{V}_1 \times \vec{V}_1}_{=\vec{0}\left(2\ vecteurs\ //\right)} + n\left(\left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_1\right)\vec{V}_2 - \underbrace{\left(\vec{V}_2 \bullet \vec{V}_1\right)}_{=0\left(2\ vecteurs\ \perp\right)}\vec{V}_1\right) = \vec{V}_2$$

$$n\left\|\vec{V}_1\right\|^2 \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{1}{\left\|\vec{V}_1\right\|^2}$$

La solution générale du problème est donc :

$$\boxed{\vec{X} = \frac{\vec{V}_1 \times \vec{V}_2}{\left\|\vec{V}_1\right\|^2} + m\,\vec{V}_1} \qquad \text{(}m\text{ étant un scalaire réel quelconque)}$$

Remarque :

Il existe donc une infinité de solutions.

1.5. ***Fonctions vectorielles - Dérivées***

1.5.1. Fonction vectorielle

Si à chaque valeur d'une variable scalaire *t* correspond un vecteur $\vec{V}(t)$, ce vecteur est appelé "*fonction vectorielle*" de *t*. $\vec{V}(t)$ est donc un vecteur dont le module, la direction et le sens dépendent de la variable *t* (qui sera en général le temps).

1.5.2. Règles de dérivation

Dans une base Oxyz fixe, le vecteur $\vec{V}(t)$ est donné par :

$$\vec{V}(t) = V_x(t)\,\vec{1}_x + V_y(t)\,\vec{1}_y + V_z(t)\,\vec{1}_z$$

La dérivée de $\vec{V}(t)$ est définie par (***fig. 1.26.***).

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t}$$ à condition que cette limite existe.

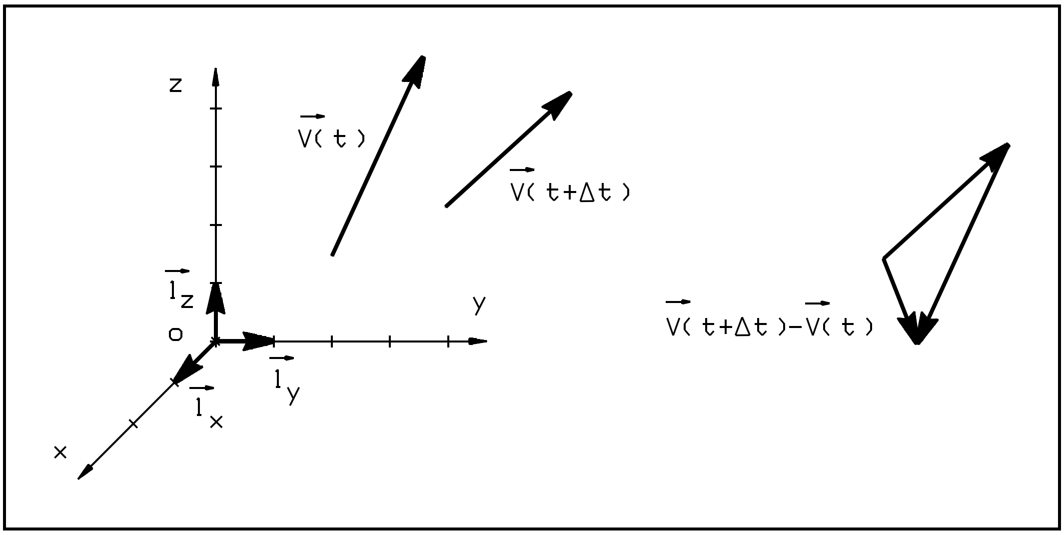

fig. 1.26. *- Dérivation d'un vecteur.*

On utilisera comme notation, dans le cas où *t* représente le temps, sachant que la dérivée des vecteurs unitaires sont nuls (constant en grandeur <u>*et*</u> en direction) ($\dot{\vec{1}}_x = \vec{0}$; ...) :

$$\dot{\vec{V}} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\,\vec{1}_x + \frac{dV_y}{dt}\,\vec{1}_y + \frac{dV_z}{dt}\,\vec{1}_z$$

$$\boxed{\dot{\vec{V}} = \dot{\vec{V}}(t) = \dot{V}_x\,\vec{1}_x + \dot{V}_y\,\vec{1}_y + \dot{V}_z\,\vec{1}_z}$$

De même, on peut définir des dérivées d'ordre supérieur. Par exemple, la dérivée seconde de $\vec{V}(t)$ est donnée par :

$$\ddot{\vec{V}} = \frac{d^2\vec{V}(t)}{dt^2} = \frac{d^2V_x}{dt^2}\,\vec{1}_x + \frac{d^2V_y}{dt^2}\,\vec{1}_y + \frac{d^2V_z}{dt^2}\,\vec{1}_z$$

$$\boxed{\ddot{\vec{V}} = \ddot{\vec{V}}(t) = \ddot{V}_x\,\vec{1}_x + \ddot{V}_y\,\vec{1}_y + \ddot{V}_z\,\vec{1}_z}$$

Les lois suivantes sont valables :

a) si $\left\|\vec{V}(t)\right\|$ est constant, $\dot{\vec{V}}$ *n'est pas nécessairement nul*; en effet, la direction de $\vec{V}(t)$ peut changer dans le temps;

b) si la direction de $\vec{V}(t)$ est constante dans le temps, la dérivée $\dot{\vec{V}}$ se ramène à $\dot{V} = \frac{d\left\|\vec{V}\right\|}{dt}$ c'est-à-dire à la dérivée du module $\left\|\vec{V}\right\|$ de $\vec{V}(t)$, la direction de $\dot{\vec{V}}$ coïncidant avec celle, constante, de $\vec{V}(t)$;

c) pour que $\dot{\vec{V}} = \vec{0}$, il faut que :
- le module $\left\|\vec{V}(t)\right\|$ soit constant;
- ***et*** que la direction de $\vec{V}(t)$ soit constante;

d) $\frac{d\left(\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right)}{dt} = \dot{\vec{V}}_1 + \dot{\vec{V}}_2$;

e) $\frac{d\left(m\vec{V}\right)}{dt} = m\dot{\vec{V}} + \dot{m}\vec{V}$ (si *m* est un scalaire constant, $\dot{m}$ est nul)

f) $\frac{d\left(\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2\right)}{dt} = \dot{\vec{V}}_1 \bullet \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \bullet \dot{\vec{V}}_2$; (c'est un scalaire !)

g) $\frac{d\left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right)}{dt} = \dot{\vec{V}}_1 \times \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \times \dot{\vec{V}}_2$ (c'est un vecteur !)