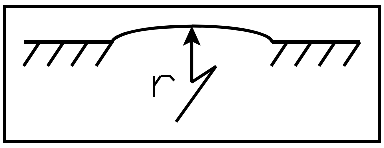
Problèmes sur le chapitre 10

Remarque :
Même si les exercices sont proposés pour une méthode, rien n'empêche de résoudre ceux-ci d'une façon différente.

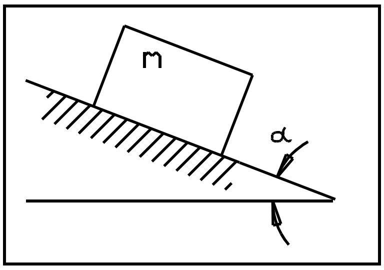
Exercices concernant principalement la "*loi fondamentale*" (*§ 10.2.*)

102.01. Le rayon de courbure d'un pont est égale à r au point A. Trouver quel effort $\left\|\vec{f}_N\right\|$ exerce sur le pont au point A une automobile de masse m, se déplaçant à la vitesse scalaire $\|\vec{v}\|$ constante.



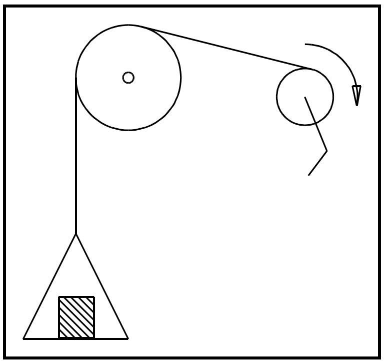
Réponse : $\left\|\vec{f}_N\right\| = m\left(\|\vec{g}\| - \dfrac{v^2}{r}\right)$

102.02. Un corps assimilé à un point matériel glisse sans frottement sur un plan incliné d'un angle α. Calculer son accélération $\|\vec{a}\|$ a le long de ce plan.



Réponse : $\|\vec{a}\| = \|\vec{g}\| \sin\alpha$

102.03. Un maçon monte un chargement de briques à l'aide d'un treuil. Quelle est la tension dans la corde si le maçon tourne le treuil à vitesse constante (on néglige tout frottement) ? Est-il correct de dire que le chargement monte parce que le treuil exerce une force plus grande que le poids du chargement ? Y a-t-il eu un moment de la montée où cet énoncé était correct ?



Réponses : $\left\|\vec{f}_{câble}\right\| = m\|\vec{g}\|$; non; oui, au démarrage

102.04. Une navette spatiale est supposée initialement à vitesse constante dans l'espace. Le commandant de bord allume les trois moteurs; la poussée de chaque moteur est de 2300 *kN*, et les trois poussées sont parallèles; leur action résultante passe par le centre de masse G de la navette. Déterminer l'accélération supportée par les astronautes si la masse de la navette est de 100 tonnes.

Réponse : $\|\vec{a}\| = 69\ m/s^2$

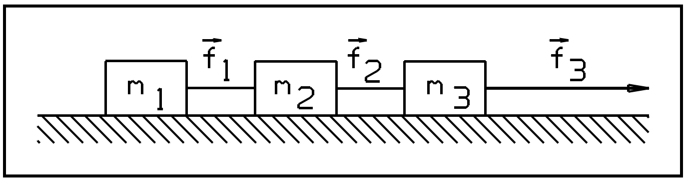
102.05. Un avion atteint la vitesse de 1000 *km/h* en piqué vertical. En gardant cette vitesse constante, le pilote sort ensuite l'avion du piqué en décrivant un arc de cercle de rayon $r = 600\ m$ dans un plan vertical. Le pilote a une masse de 80 *kg*. Déterminer la plus grande force de pression exercée par le pilote contre son siège.

Réponse : $\left\|\vec{f}_p\right\| = 11073\ N$

102.06. Une automobile assimilée à un point matériel roule sur un sol horizontal à 90 *km/h*; elle est freinée, à partir de t_1, par une force constante égale au quart de son poids de sorte qu'elle s'arrête au temps $t_2 = t_1 + \Delta t$. On demande de calculer Δt et le déplacement parcouru pendant Δt.

Réponses : $\Delta t = 10.2\ s$; $d = 127.4\ m$

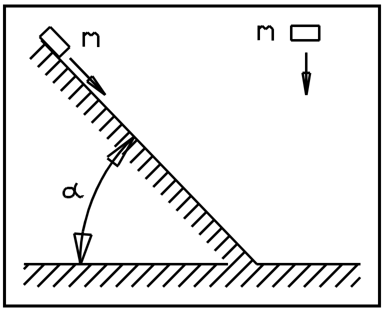
102.07. Une force $\vec{f}_3$ tire trois blocs sur une table horizontale sans frottement ($\mu_k = 0$). Les blocs sont reliés entre eux comme indiqué ci-contre.



Si $\left\|\vec{f}_3\right\| = 60\ N$, $m_1 = 10\ kg$, $m_2 = 20\ kg$ et $m_3 = 30\ kg$, trouver les tensions $\left\|\vec{f}_1\right\|$ et $\left\|\vec{f}_2\right\|$ dans les deux autres cordes. Même question mais avec un coefficient de frottement $\mu_k = 0.1$.

Réponses : $\left\|\vec{f}_1\right\| = 10\ N$; $\left\|\vec{f}_2\right\| = 30\ N$; Ne varie pas

102.08. Un solide de masse *m* met *n* fois plus de temps à descendre, sans frottement, le long d'un plan incliné, qu'à tomber, à la verticale, de la même hauteur. Quel est l'angle *α* que fait ce plan avec l'horizontale ?



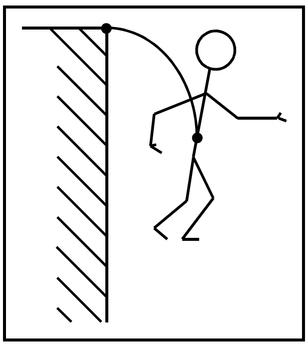
Réponse : $\alpha = \arcsin \dfrac{1}{n}$

102.09. Un objet glisse sur une surface de glace le long d'une droite horizontale. En un certain point A de sa trajectoire la vitesse de l'objet est $\left\|\vec{v}_0\right\|$; il s'immobilise après avoir parcouru la distance *l* depuis 0. Que vaut le coefficient de frottement entre l'objet et la glace ?

Réponse : $\mu_k = \dfrac{v_0^2}{2\left\|\vec{g}\right\| l}$

102.10. Un ascenseur de masse 800 *kg* descend tout d'abord à une vitesse constante de 2 *m/s*, et puis freine et s'arrête en 5 *s*, d'un mouvement uniformément décéléré.Calculer durant la période de freinage la tension $\left\|\vec{f}_t\right\|$ du câble de suspension.

Réponse : $\left\|\vec{f}_t\right\| = 8168\ N$

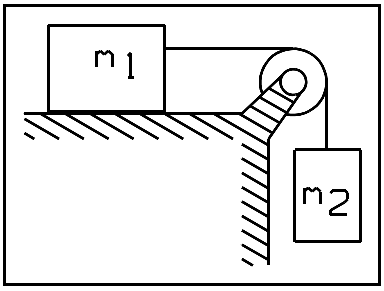


102.11. Un alpiniste de 80 *kg* grimpe le long d'une paroi verticale tout en étant assuré par un ami à l'aide d'une corde capable de résister à une traction de 2500 *N*. Quelle est la hauteur maximale de chute pour être certain que celle-ci résistera ? (La corde est fabriquée de telle manière qu'elle est capable d'arrêter la chute en 1 seconde à partir du moment où elle se tend. On supposera la norme de la décélération comme constante).

Réponse : $h = 23.42\ m$

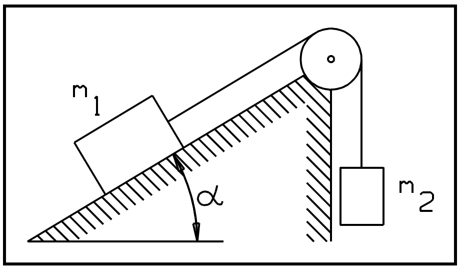
102.12. Un solide de masse $m_1 = 16\ kg$ glisse sur un plan horizontal, entraîné au moyen d'un fil passant sur une poulie (de masse négligeable), par un solide de masse $m_2 = 8\ kg$ suspendu librement.
Quelle sera l'accélération de m_1 et que vaudra la tension dans le fil :

a) en considérant un coefficient de frottement nul entre le solide m_1 et le plan horizontal;
b) en considérant un coefficient de frottement μ_k valant 0.15 ?



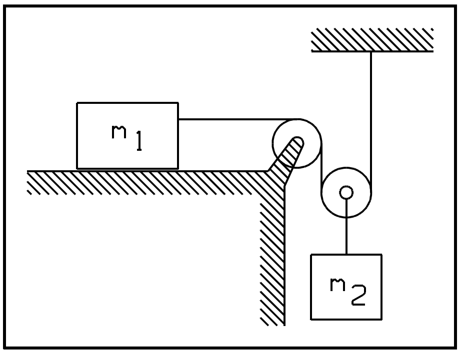
Réponses : a) $\|\vec{a}\| = 3.27\ m/s^2$; $\|\vec{f}_t\| = 52.3\ N$ b) $\|\vec{a}\| = 2.29\ m/s^2$; $\|\vec{f}_t\| = 60.2\ N$

102.13. Déterminer l'accélération avec laquelle se déplacent les corps à la figure ci-contre, ainsi que la tension dans les fils, sachant qu'au temps $t = 0$ la vitesse est nulle. Le coefficient de frottement entre m_1 et le plan incliné vaut μ_k. On néglige les autres frottements.
Appliquer avec :
$m_1 = 200\ g$, $m_2 = 180\ g$, $\mu_k = 0.3$ et $\alpha = 30°$.



Réponses : $\|\vec{a}\| = 0.72\ m/s^2$; $\|\vec{f}_1\| = 1.64\ N$

102.14. A partir du schéma représenté ci-contre, calculer l'accélération des corps m_1 et m_2 et la tension $\|\vec{f}_t\|$ de la corde. Toutes les poulies ont un poids négligeable et les corps glissent sans frottement.
Appliquer au cas où $m_1 = 1\ kg$ et $m_2 = 5\ kg$. Que peut-on dire de l'accélération de m_1 ?



Réponses : $\|\vec{f}_t\| = \dfrac{2\ m_1\ m_2\ g}{4\ m_1 + m_2}$

$\|\vec{a}_1\| = \dfrac{2\ m_2\ g}{4\ m_1 + m_2}$; $\|\vec{a}_2\| = \dfrac{m_2\ g}{4\ m_1 + m_2}$

numériquement : $\|\vec{a}_1\| = 10.9\ m/s^2 \left(> \|\vec{g}\|!\right)$; $\|\vec{a}_2\| = 5.45\ m/s^2$

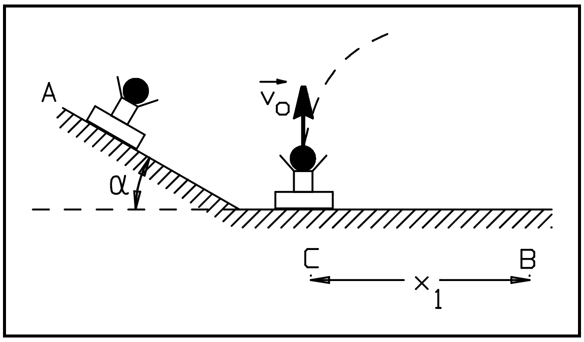
102.15. Une sphère de 1 kg est suspendue à une ficelle de 0.6 m. Si on donne à cette sphère un coup de marteau suivant une direction horizontale, elle acquiert une vitesse horizontale instantanée $\vec{v}_0$ qui résulte du choc. Quelle doit être la grandeur de cette vitesse pour que la ficelle casse (la charge de rupture de la ficelle étant de 30 N) ?

Réponse : $\|\vec{v}_0\| = 3.48\ m/s$

102.16. Une étudiante, de masse égale à 55 kg, cherche à vérifier les lois de la dynamique. Elle emporte à cet effet un pèse-personne dans un ascenseur. Au cours du trajet, elle lit successivement les valeurs extrêmes suivantes, sur la balance : 70 *kg* et 45 *kg*. Quelle sont les valeurs correspondantes d'accélération de l'ascenseur ?

<u>*Réponses*</u> : $\left\|\vec{a}_{montée}\right\| = 2.68\, m/s^2$; $\left\|\vec{a}_{descente}\right\| = 1.78\, m/s^2$

102.17. Un chariot descend un plan incliné de $\alpha = 20°$ avec l'horizontale. Le coefficient de frottement $\mu_k = 0.1$. Le chariot, de masse $m = 5\, kg$, a été lâché sans vitesse initiale. Il prend un mouvement rectiligne uniformément accéléré.



a) Calculer l'accélération du chariot;
b) Calculer sa vitesse quand il arrive en bas du plan incliné, sachant que la descente a duré 5 secondes;
c) Le chariot prend sur le plan horizontal, parfaitement lisse (pas de frottement), un mouvement rectiligne uniforme dont la vitesse $\left\|\vec{v}_1\right\|$ est celle qu'il a lorsqu'il arrive en bas du plan incliné. Au point C, une butée déclenche un ressort qui lance une bille, perpendiculairement au chariot, avec une vitesse v_0. Le chariot continue à avancer. Ecrire l'équation de la trajectoire de la bille et démontrer que la bille retombe sur le ressort en B (distance $\overline{CB} = x_1$).
d) Pour $x_2 = 3/4\, x_1$, déterminer les vecteurs vitesse et accélération de la bille.

Application numérique : $\left\|\vec{v}_0\right\| = 20\, m/s$; on négligera la résistance de l'air.

<u>*Réponses*</u> : a) $\left\|\vec{a}\right\| = 2.43\, m/s^2$ b) $\left\|\vec{v}_1\right\| = 12.17\, m/s$ c) $y = \dfrac{-\left\|\vec{g}\right\|}{2\, v_1^2}\, x^2 + \dfrac{\left\|\vec{v}_0\right\|}{\left\|\vec{v}_1\right\|}\, x$

d) $\left\|\vec{v}\right\| = 15.76\, m/s$ et $\left\|\vec{a}\right\| = +\left\|\vec{g}\right\|\, m/s^2$

102.18. Un satellite artificiel, de masse 4000 *kg*, tourne autour de la terre sur une orbite circulaire, à l'altitude de 630 *km*. Calculer, en *km/s*, la vitesse de ce satellite; déterminer la durée d'une révolution.

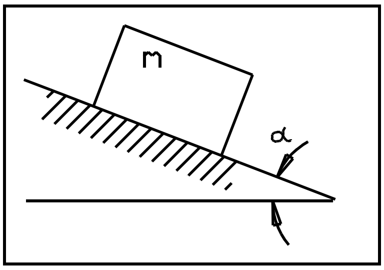
Rappel : formule de Newton : $\left\|\vec{f}_a\right\| = G\,\dfrac{m\, m_T}{r^2}$

dans laquelle : m : masse du satellite
m_T : masse de la terre ($m_T = 5.98\, 10^{24}\ kg$)
G : constante ($G = 6.67\, 10^{-11}\ m^3/kgs^2$)
r : distance du satellite au centre de la terre
r_T : rayon de la terre ($r_T = 6\,370\, km$)

Comment déterminer la vitesse du satellite si on ne connaît pas la masse de la terre, mais en utilisant le fait que l'accélération de la pesanteur au voisinage de la surface terrestre vaut 9.81 m/s^2 ?

<u>*Réponses*</u> : $\left\|\vec{v}_{satellite}\right\| = 27\,175\, km/h$; T = 1 *h* 37.1′

_102.19._ Un bloc de masse *m*, assimilé à un point matériel, est abandonné sans vitesse initiale en un point d'un plan, incliné d'un angle α avec l'horizontale. Le coefficient de frottement sur le plan est μ_k. Sous quelle condition le bloc va-t-il se mettre en mouvement ? Dans ce cas, étudier l'évolution de sa position en fonction du temps *t*. Quelle est la vitesse du bloc lorsqu'il a parcouru une distance de *d* mètres ?

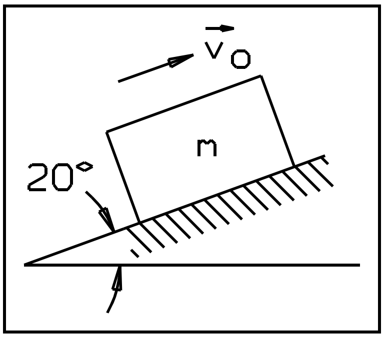


Réponses : $\alpha > \varphi_s$; $x = \dfrac{\|\vec{g}\|\left(\sin\alpha - \mu_k \cos\alpha\right) t^2}{2}$

$\left\|\vec{v}_{x=d}\right\| = \sqrt{2\,\|\vec{g}\|\, d\left(\sin\alpha - \mu_k \cos\alpha\right)}$

_102.20._ Un corps de masse $m = 100\,kg$ est lancé avec une vitesse initiale $\|\vec{v}_0\| = 10\,m/s$ suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle $\alpha = 20°$ avec l'horizontale.

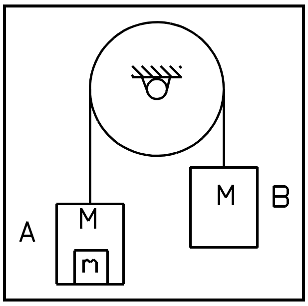
a) En négligeant le frottement, étudier le mouvement du corps (position, vitesse en fonction du temps...)
b) Si le coefficient de frottement vaut $\mu_k = 0.25$, quelle distance parcourra le corps avant de s'arrêter ? Combien mettra-t-il de temps pour s'immobiliser ?
c) Le coefficient de frottement valant $\mu_k = 0.25$, on recommence l'expérience en lançant cette fois le corps avec $\|\vec{v}_0\| = 10\,m/s$, mais en sens opposé à celui de la première expérience. Etudier le mouvement.



Réponses : a) $x = \dfrac{v_0^2 - v^2}{2\,\|\vec{g}\| \sin\alpha}$; $t = \dfrac{\|\vec{v}_0\| - \|\vec{v}\|}{\|\vec{g}\| \sin\alpha}$ b) $x_{arrêt} = 8.83\,m$; $t_{arrêt} = 1.77\,s$

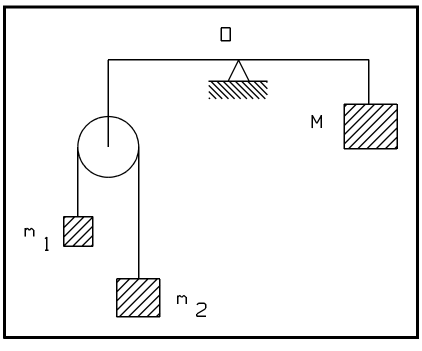
c) $\varphi_k > \alpha$ pour arrêt

_102.21._ Un monte-charge de mine est constitué de deux bennes A et B ayant chacune une masse *M* de 2000 *kg*. On place une surcharge de masse *m* égale à 500 *kg* dans la benne A. Trouver l'accélération que prendra chaque benne (en considérant que la masse de la poulie est nulle et que les frottements câble-poulie sont négligeables). Quelle sera la tension dans le câble ?



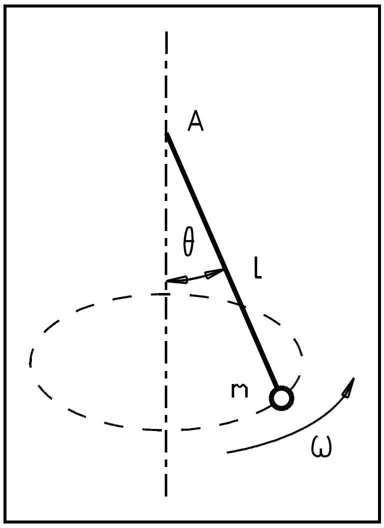
Réponses : $\|\vec{a}\| = 1.09\,m/s^2$; $\|\vec{f}_1\| = 21800\,N$

_102.22._ Une barre pivote librement en son milieu O. A une extrémité est accrochée une poulie de masse négligeable, sur laquelle passe une ficelle; deux masses m_1 et m_2 ($m_2 > m_1$) sont attachées aux extrémités de cette ficelle. Quand on laisse descendre la masse m_2, quelle masse *M* faut-il accrocher à la deuxième extrémité de la barre pour la maintenir horizontale ?



Réponse : $M < m_1 + m_2$

102.23. On fait tourner autour de la verticale, avec une vitesse angulaire ω constante, une masse m suspendue à un point fixe, par un fil de longueur l; on appelle ce dispositif un "*pendule conique*". Trouver l'angle θ que forme le fil avec la verticale.



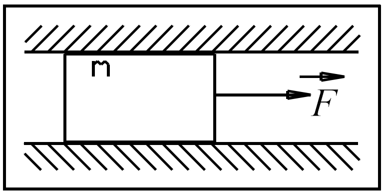
Réponse : $\theta = \arccos\left(\dfrac{\|\vec{g}\|}{\omega^2\, l}\right)$

Exercices concernant principalement les "*équations différentielles (1D)*" (*§ 10.4.*)

104.01. En considérant que la résultante $\vec{F}$ de toutes les forces agissant sur le piston varie suivant la loi :

$$\|\vec{F}\| = 0.4\,\|\vec{f}_p\|\,(1-\lambda\,t),$$

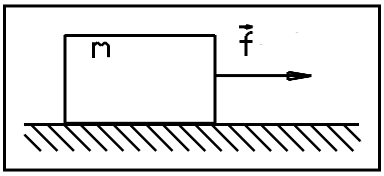
dans laquelle $\|\vec{f}_p\|$ désigne le poids du piston, t le temps en s, et λ un coefficient strictement positif, déterminer la vitesse du piston à l'instant t, si à l'instant $t_0 = 0$, sa vitesse est v_0.



Réponse : $\|\vec{v}_x\| = \|\vec{v}_0\| + 0.4\,\|\vec{g}\|\,t\left(1-\dfrac{\lambda\,t}{2}\right)$

104.02. Un corps de masse $m = 5\ kg$ se meut sur un plan horizontal en partant du repos, sous l'action d'une force $\vec{f}$ constante en direction, mais dont la grandeur varie avec le temps :

$\|\vec{f}\| = 0.5\,t$ (en N).



Déterminer la loi du mouvement de ce corps, en considérant un coefficient de frottement μ_k égal à 0.2 (on considérera que le coefficient de frottement statique est égal au coefficient de frottement dynamique). Après combien de temps se mettra-t-il effectivement en mouvement ?

Réponses :

$$t_{mvt} = 2\,m\,\|\vec{g}\|\,\mu_k = 19.62\ s$$

$$x = \frac{t^3}{12\,m} - \frac{\|\vec{g}\|\,\mu_k\,t^2}{2} + m\left(\|\vec{g}\|\,\mu_k\right)^2 t - \frac{2}{3}\,m^2\left(\|\vec{g}\|\,\mu_k\right)^3$$

104.03. Un ressort vertical de masse négligeable, fixé à son extrémité supérieure, subit un allongement de 20 cm quand on accroche une masse de 5 g à son autre extrémité. Le ressort et la masse sont alors placés sur une table horizontale sans frottement. On écarte la masse de 20 cm de sa position d'équilibre, et on la lâche. Ecrire l'équation différentielle et les conditions initiales décrivant le mouvement. Calculer la position en fonction du temps t; calculer l'amplitude, la période et la fréquence des oscillations.

Réponses : $x = 0.2\cos(7\,t)$; $A = 0.2\ m$; $\mathrm{T} = \dfrac{2\,\pi}{7}\ s$; $\nu = 1/\mathrm{T}$

104.04. Une goutte d'eau sphérique de masse m_0 et de rayon r_0 tombe en chute libre dans l'air, sans vitesse initiale. La résistance de l'air est $\vec{f}_r = -\,\lambda\,m_0\,\vec{v}$ où $\lambda = 4$ *unités SI* est une constante supposée indépendante de la masse de la goutte.

a) Quelle est la vitesse limite $\|\vec{v}_{\lim}\|$ de la goutte d'eau ?
b) Ecrire la loi de variation de la vitesse $\|\vec{v}\|$ en fonction du temps.
c) Ecrire la loi de variation de l'espace en fonction du temps.
d) Après combien de temps la goutte acquiert-elle sa vitesse limite avec une précision de 1 $^{o}/_{oo}$?

Réponses : a) $\|\vec{v}_{\lim}\| = \|\vec{g}\|/\lambda$ b) $\|\vec{v}\| = \|\vec{g}\|/\lambda\,\left(1-\exp(-\,\lambda\,t)\right)$

c) $x = \frac{\|\vec{g}\|}{\lambda^2}\left(\exp\left(-\lambda\, t\right)-1\right)+\frac{\|\vec{g}\|}{\lambda}\, t$ d) $t = 1.72\ s$

104.05. La force de résistance à l'avancement dans l'air peut être déterminée par la formule :

$$\left\|\vec{f}_{aéro}\right\| = \frac{\rho\, S\, C_x\, v^2}{2} \quad \text{(en } N\text{)}$$

dans laquelle :

ρ est la masse volumique de l'air ($\rho = 1.2\ kg/m^3$)

S (m^2) est la surface de la projection du corps sur le plan perpendiculaire à la direction du mouvement

C_x est un coefficient sans dimension, qui dépend de la forme du corps.

On demande de déterminer la vitesse limite de la chute d'un parachutiste dont la masse, parachute compris, vaut 75 kg :

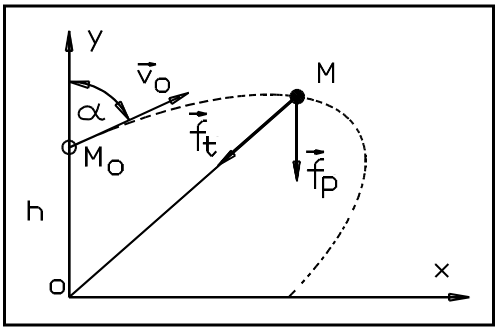
a) dans un saut à ouverture retardée, en supposant dans ce cas que $S = 0.4\ m^2$ et $C_x = 1$;

b) dans un saut avec le parachute ouvert, en supposant dans ce cas que $S = 36\ m^2$ et $C_x = 1.4$.

Trouver dans les deux cas la distance h à partir de laquelle la vitesse du parachutiste est égale à 0.95 fois la vitesse limite déterminée ci-dessus.

Réponses : $\|\vec{v}_{\lim}\| = \sqrt{\frac{2\, m\, \|\vec{g}\|}{\rho\, S\, C_x}}$; $h = 1.164\ \frac{2\, m}{\rho\, S\, C_x}$; $h_a = 364\ m$ et $h_b = 4.9\ m$

104.06. Un jokari est constitué d'une balle de masse m accrochée à un fil élastique de constante de raideur k. L'autre extrémité du fil est fixée à un point O du sol. A l'aide d'une raquette on lance la balle avec une vitesse $\vec{v}_0$ sous un angle α avec la verticale, depuis un point situé à la hauteur h au-dessus du sol; elle est ensuite soumise à son poids et à la tension du fil qu'on supposera proportionnelle à sa longueur. Déterminer la trajectoire de la balle. En quel point retouchera-t-elle le sol si on la lance sous un angle $\alpha = 45°$ avec une vitesse initiale $\|\vec{v}_0\| = 14.1\ m/s$? On donne : $m = 100\ g$; $k = 0.1\ N/m$ et $h = 1\ m$.



Réponses :

$$\begin{cases} x = \left(\sqrt{\frac{m}{k}}\ v_0\ \sin\alpha\right)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right) \\ y = -\frac{\|\vec{g}\|\, m}{k} + \left(h + \frac{m\,\|\vec{g}\|}{k}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right) + \left(\sqrt{\frac{m}{k}}\ v_0\ \cos\alpha\right)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right) \end{cases}$$

104.07. On veut arrêter une automobile, dont la masse est de 1000 kg, sur une distance de 200 m, en agissant sur les freins. La vitesse $\|\vec{v}_0\|$ au début du freinage vaut 25 m/s. La résistance $\vec{f}_{air}$ à l'avancement dans l'air est une force supposée horizontale, donnée par la relation $\vec{f}_{air} = -\,0.9\ \vec{v}$ ($\vec{v}$ étant la vitesse du véhicule). On suppose que la force de freinage $\|\vec{f}_f\|$ due aux freins est constante. Calculer la valeur de cette force de freinage. (On néglige l'inertie des parties tournantes).

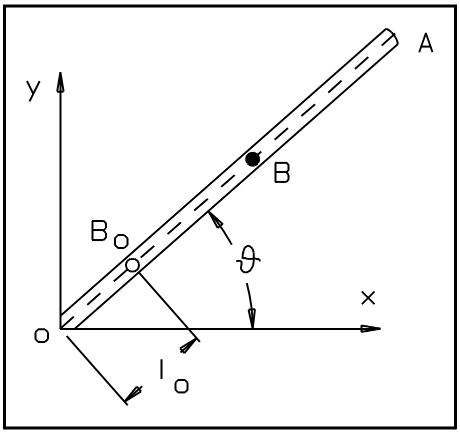
Réponse : $\left\|\vec{f}_f\right\| = 1550\ N$ (Par itération ;-))

104.08. Un embarcation de 40 *kg* vogue a une vitesse constante de 1 *m/s*. Au temps $t = 0$, on arrête de ramer. En supposant que la force de résistance à l'avancement dans l'eau est égale à $\vec{f}_f = -\lambda\,\vec{v}$ ($\vec{v}$ étant la vitesse, en *m/s*, et λ étant une constante valant 2 *Ns/m*) :

a) déterminer après combien de temps la vitesse diminuera de moitié;
b) quelle distance aura alors parcouru le embarcation ?
c) Trouver aussi la distance qu'aura parcourue le embarcation avant de s'arrêter (et après combien de temps) ?

Réponses : a) $t_{v=\frac{1}{2}v_0} = 13.86\,s$ b) $x_{v=\frac{1}{2}v_0} = 10\,m$ c) $t_{v=0} = \infty$; $x_{v=0} = 20\,m$

104.09. Un tube $\overline{OA}$ de longueur $l = 1\,m$ tourne dans un plan horizontal autour d'un axe vertical passant par O avec une vitesse angulaire constante $\left\|\vec{\omega}\right\| = 10\,s^{-1}$. Une bille B, assimilable à un point matériel de masse $m = 2\,10^{-3}\ kg$, est placée dans le tube à la distance $l_0 = 0.01\,m$, et abandonnée sans vitesse initiale. Le frottement entre la bille et le tube est négligé. Déterminer la durée du parcours de la bille dans le tube, et sa vitesse absolue au moment où elle quitte le tube.



Réponses : $t = 0.53\,s$; $\left\|\vec{v}\right\| = 14.14\,m/s$

104.10. Un bateau, de 1000 *kg*, a une vitesse maximale de 25 *km/h*. On admet que l'eau exerce une force de frottement $\vec{f}_{fr} = -\lambda\,\vec{v}$ (avec $\lambda = 30\ Ns/m$).

a) Calculer la force $\left\|\vec{f}_0\right\|$ exercée par l'hélice lorsque le bateau avance à vitesse maximale.
b) Le bateau est parti du port sous l'action de cette force $\left\|\vec{f}_0\right\|$; calculer le temps nécessaire pour atteindre 18 *km/h* et la distance alors parcourue.
c) A cet instant, le moteur tombe en panne; calculer la distance que parcourra encore le bateau avant de s'immobiliser.

Réponses : a) $\left\|\vec{f}_0\right\| = 208.3\ N$

b) $t = 42.4\ s$; $d = \dfrac{\left\|\vec{f}_0\right\|}{\lambda}\,t + \dfrac{m\left\|\vec{f}_0\right\|}{\lambda^2}\left(\exp\left(-\dfrac{\lambda}{m}\,t\right) - 1\right) = 127.8\,m$

c) $d = 167\ m$ en un temps infini

104.11. Une petite sphère de plomb P, de masse *m*, est envoyée, vers le haut à partir du point O ($z = 0$) avec une vitesse initiale verticale $\left\|\vec{v}_0\right\|$, à un instant qu'on prendra pour origine des temps. Le module de résistance de l'air, opposée au mouvement de P, est proportionnel au carré de la vitesse de P : $\left\|\vec{f}_{fr}\right\| = \lambda\,m\,v^2$ avec $\lambda = cst$.

a) Ecrire les expressions de la vitesse $\|\vec{v}\|$ et de l'espace parcouru z en fonction du temps, au cours du *mouvement ascendant*.
b) En déduire l'altitude maximale $z_{\max}$ atteinte par P, comptée à partir de O. La comparer à celle obtenue en ne tenant pas compte de la résistance de l'air.

Application numérique : $\lambda = 2\,10^{-3}\ S.I.$; $\|\vec{g}\|$ supposé constant; $\|\vec{v}_0\| = 122\ m/s$.

<u>*Réponses*</u> :

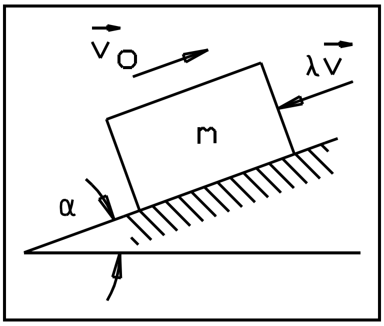
a) $\|\vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{g}\|/\lambda}\ \tan\left(-\lambda\sqrt{\|\vec{g}\|/\lambda}\ t + C\right)$ avec : $\tan C = \|\vec{v}_0\|\sqrt{\lambda/\|\vec{g}\|}$

b) $z = \dfrac{1}{\lambda}\ln\left(\dfrac{\cos\left(-\lambda\sqrt{\|\vec{g}\|/\lambda}\ t + C\right)}{\cos C}\right)$

$$z_{\max} = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\sqrt{1+\frac{\lambda\, v_0^2}{\|\vec{g}\|}}\right) = 348.7\ m \qquad z_{\max\ sans\ frottement} = 758.6\ m$$

104.12. Un corps de masse m est lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$, suivant la ligne de plus grande pente d'un plan, incliné d'un angle α avec l'horizontale. Une force de frottement s'oppose à son mouvement :

$\vec{f}_{fr} = -\lambda\,\vec{v}$.



a) Ecrivez l'équation de la position en fonction du temps;
b) Ecrivez l'équation de la vitesse en fonction du temps;
c) Quel temps t faut-il pour que la masse m s'arrête ?

<u>*Réponses*</u> :

a) $x(t) = \dfrac{m}{\lambda}\left(\|\vec{v}_0\| + \dfrac{m\|\vec{g}\|}{\lambda}\sin\alpha\right)\left(1-\exp\left(-\dfrac{\lambda}{m}t\right)\right) - \left(\dfrac{m\|\vec{g}\|}{\lambda}\sin\alpha\right)t$

b) $v(t) = \left(\|\vec{v}_0\| + \dfrac{m\|\vec{g}\|}{\lambda}\sin\alpha\right)\exp\left(-\dfrac{\lambda}{m}t\right) - \left(\dfrac{m\|\vec{g}\|}{\lambda}\sin\alpha\right)$

c) $t = \dfrac{m}{\lambda}\ln\left(\dfrac{\|\vec{v}_0\| + \dfrac{m\|\vec{g}\|}{\lambda}\sin\alpha}{\dfrac{m\|\vec{g}\|}{\lambda}\sin\alpha}\right)$

104.13. Un corps de masse m (en kg) initialement au repos, tombe dans un fluide dont la résistance en N est proportionnelle à la vitesse (en m/s) ($\vec{f}_R = -\lambda\,\vec{v}$). Concernant la force d'Archimède, considérer que la masse volumique du fluide est 1/7 ième de celle du corps. Si la vitesse limite est de 6 m/s, trouver :
a) la vitesse du corps au bout de 3 s;
b) la distance parcourue au bout de ces 3 s.

<u>*Réponses*</u> : a) $\|\vec{v}\| = 6\left(1-\exp(-1.401\,t)\right) = 5.91\ m/s$ b) $x_{t=3\,s} = 13.8\ m$

104.14. Une locomotive de masse m se déplace à la vitesse constante $\vec{v}_0$ sur des rails horizontaux.

a) Combien de temps la locomotive met-elle pour s'immobiliser après que l'on ait arrêté le moteur sachant que la résistance au mouvement est égale à $\alpha + \beta\, v^2$, où v est la vitesse instantanée et α et β sont des constantes ?
b) Quelle est la distance parcourue ?

Ce souvenir que : $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Réponses :

a) $t_f = \dfrac{m}{\sqrt{\alpha\,\beta}} \arctan\left(\|\vec{v}_0\| \sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}\right)$

b) $x = \dfrac{m}{\beta} \ln\left(\dfrac{\left|\cos\left(-\dfrac{\sqrt{\alpha\,\beta}}{m}\,t + \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\,C\right)\right|}{\cos\left(\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\,C\right)}\right)$ avec $C = \sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}} \arctan\left(\|\vec{v}_0\| \sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}\right)$

$x_f = \dfrac{m}{2\,\beta} \ln\left(1 + v_0^2\, \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$

104.15. Une masse m est lancée verticalement vers le haut, à partir de la surface de la Terre, avec une grande vitesse initiale $\vec{v}_0$. Déterminer l'altitude h atteinte par la masse si la force d'attraction (newtonienne) varie en raison inverse du carré de la distance de la masse au centre de la Terre : $\|\vec{f}_N\| = m\,g\,\dfrac{r_T^2}{x^2}$ (avec : r_T rayon de la Terre et x la position à partir du centre de la Terre). On négligera la résistance de l'air. Quelle vitesse faudrait'il donner à la masse m pour qu'elle puisse vaincre l'attraction terrestre, c'est-à-dire lorsque $h \to \infty$ *(Vitesse de libération* ou *seconde vitesse cosmique*) ?

Réponses : $h = \dfrac{r_T\, v_0^2}{2\,g\,r_T - v_0^2}$; $\|\vec{v}^{\,II}_{\cos mique}\| = \sqrt{2\,g\,r_T} = 11179\ m/s$ (avec $r_T = 6\,370\ km$)

104.16. S'éloignant d'un centre fixe O, le point matériel M de masse m se déplace sur un plan, sans frottement, horizontal sous l'action d'une force de répulsion $\vec{f}_R$ dont l'intensité est proportionnelle à la distance au centre, $\|\vec{f}_R\| = \lambda^2\, m\, x$. A l'instant initial le point occupait la position M_0 à une distance a du centre fixe O, et avait une vitesse $\vec{v}_0$ orientée dans le sens des x positifs. On demande l'équation horaire du mouvement de M.

Réponse : $x = \dfrac{a}{2}\left(\exp(\lambda\, t) + \exp(-\lambda\, t)\right) + \dfrac{\|\vec{v}_0\|}{2\,\lambda}\left(\exp(\lambda\, t) - \exp(-\lambda\, t)\right)$

Exercices concernant principalement les "*théorèmes*" (*§ 10.6.*)

106.01. Une balle de 20 *g* est tirée au travers de plusieurs planches de bois empilées. L'épaisseur de l'empilage est de 200 *mm*; la vitesse d'arrivée de la balle est de 700 *m/s*, et sa vitesse de sortie est de 350 *m/s*. Déterminer la résistance à la pénétration exercée par les planches sur la balle, en supposant cette résistance constante. Quel temps met la balle pour traverser les planches ?

Réponses : $\left\|\vec{f}\right\| = 18\,375\ N$; $t = 0.38\,10^{-3}\ s$

106.02. Un bloc de 1 *kg* entre en collision avec un ressort ayant une masse négligeable et une constante élastique de 6 *N/m*. Le bloc comprime le ressort de 0.50 *m*. Calculez la vitesse du bloc au moment de la collision sachant que le coefficient de frottement cinétique entre le bloc et la surface horizontale est de 0.25.

Réponse : $\left\|\vec{v}_0\right\| = 1.99\ m/s$

106.03. Un homme courant à la vitesse de 4 *m/s* saute sur un chariot immobile et s'assied dessus. Les masses de l'homme et du chariot valent respectivement 60 *kg* et 20 *kg*. Quelle est la vitesse finale du chariot avec l'homme assis dessus ? (Hypothèses : on néglige les parties tournantes, pas de frottement entre le chariot et le sol)

Réponse : $\left\|\vec{v}_f\right\| = 3\ m/s$

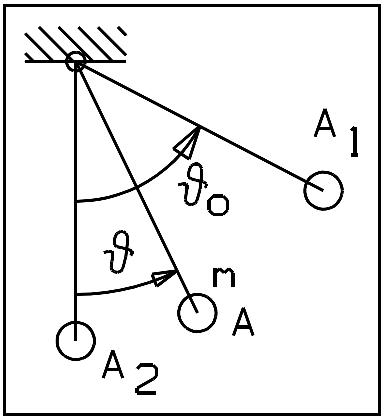
106.04. Une voiture dont la masse est 1500 *kg* passe à l'altitude de 143 *m* avec une vitesse de 70 *km/h*. On la retrouve à l'altitude de 116 *m* avec une vitesse de 80 *km/h*. Y a-t-il eu, entre les deux pointages, un travail moteur ou un travail résistant ? Que vaut-il ? Calculez ensuite la vitesse finale s'il n'y avait pas eu freinage.

Réponses : $W_{moteur} = -\,310.4\ kJ$ (donc résistant); $\left\|\vec{v}_{final}\right\| = 108.5\ km/h$

106.05. Une balle de tennis de masse $m = 0.1\ kg$ frappe une raquette avec une vitesse $\left\|\vec{v}_1\right\| = 32\ m/s$, perpendiculaire aux cordes. Elle est renvoyée à une vitesse $\left\|\vec{v}_2\right\| = 24\ m/s$, également perpendiculaire à la raquette. En supposant que la durée du choc est de $2/100^{ième}$ de seconde, et que la force $\vec{f}$ appliquée par la raquette reste constante durant ce laps de temps, déterminer cette force. La balle est renvoyée avec une vitesse $\vec{v}_2$ horizontale, depuis une hauteur de 1 *m* au-dessus du sol; quelle distance *d* aura parcourue la balle avant de toucher le sol (on néglige la résistance de l'air) ?

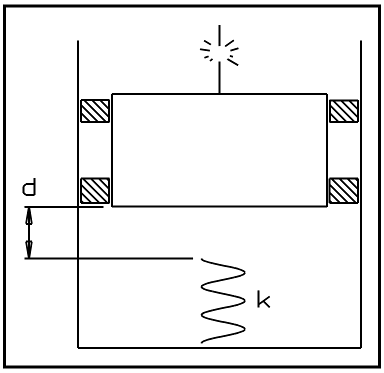
Réponses : $\left\|\vec{f}\right\| = 280\ N$; $d = 10.8\ m$

106.06. Un corps A, de masse *m*, suspendu à un fil de longueur *l* est écarté de la verticale d'un angle θ_0, puis lâché sans qu'on lui imprime une vitesse initiale. Trouver la vitesse du corps au moment où le fil forme un angle θ avec la verticale. Déterminer la tension $\left\|\vec{f}_t\right\|$ dans le fil au moment où le corps passe par la position la plus basse.



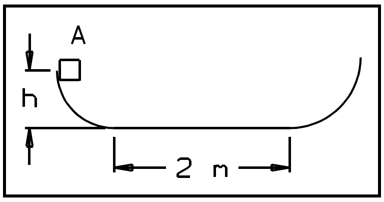
Réponses : $\|\vec{v}\| = \sqrt{2\,g\,l\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}$; $\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{f}_t\right\| = m\,\|\vec{g}\|\left(3 - 2\cos\theta_0\right)$

106.07. Le câble d'un ascenseur de 2000 *kg* se brise au moment où ce dernier se trouve arrêté au rez-de-chaussée. La base de l'ascenseur est alors à $d = 4\ m$ au-dessus d'un ressort dont la constante de raideur *k* vaut 1.4 10^5 *N/m*.
Un mécanisme de sûreté se déclenche et pousse latéralement sur des rails verticaux créant ainsi une force de friction totale de 5000 *N*. Trouver la vitesse $\|\vec{v}\|$ de l'ascenseur à l'instant de toucher le ressort. Trouver la distance *e* de compression du ressort. A quel hauteur *h* rebondira l'ascenseur ?



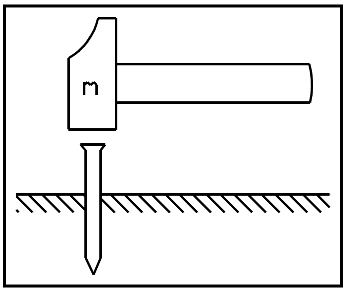
Réponses : $\|\vec{v}\| = 7.65\ m/s$; $e = 1.02\ m$
$h = 1.94\ m$ au-dessus du ressort

106.08. Une particule glisse le long d'une piste dont la forme est illustrée ci-contre. Les portions courbes de la piste sont sans frottement tandis que la portion horizontale, longue de $l = 2\ m$, présente un coefficient de frottement $\mu_k = 0.2$.
On libère la particule du point A, situé à $h = 1\ m$ au-dessus de la portion horizontale de la piste. Localiser l'endroit où la particule s'arrêtera.



Réponse : exactement au milieu de la portion rectiligne

106.09. On laisse tomber, à la verticale et d'une hauteur $h = 800\ mm$, un marteau de masse $m = 700\ g$; il frappe un clou, de masse négligeable, qui s'enfonce de $a = 10\ mm$. Calculer la résistance (supposée constante) à l'enfoncement du clou dans la planche. Combien a-t-il fallu de temps pour que le clou s'enfonce de *a* valant 10 *mm* ? De combien se serait-il enfoncé si le marteau avait eu une vitesse double à l'instant du choc ?



Réponses : $\left\|\vec{f}_R\right\| = 556\ N \quad t_{a=10} = 0.005\ s$
Enfoncement quadruplé

106.10. Un véhicule se déplace en mouvement rectiligne, à une vitesse $\vec{v}_0$. Au temps $t = 0$, il est freiné en bloquant les quatre roues, la force de freinage valant $\left\|\vec{f}_f\right\| = \mu_k \left\|\vec{f}_p\right\|$ (μ_k étant le coefficient de frottement pneu-route, et $\left\|\vec{f}_p\right\|$ étant le poids du véhicule). Calculer le temps et la distance de freinage en fonction de $\|\vec{v}_0\|$ et de $\left\|\vec{f}_p\right\|$, et appliquer les résultats trouvés pour $\mu_k = 0.7$ (sol sec) et pour $\mu_k = 0.2$ (sol humide), avec $\|\vec{v}_0\| = 60\ km/h$ et $\left\|\vec{f}_p\right\| = 6\ kN$.

Réponses : $t_{frein} = \dfrac{\|\vec{v}_0\|}{\mu_k\,\|\vec{g}\|}$; $d_{frein} = \dfrac{v_0^2}{2\,\mu_k\,\|\vec{g}\|}$

pour $\mu_k = 0.7$: $t_{frein} = 2.4\,s$ et $d_{frein} = 20.2\,m$

pour $\mu_k = 0.2$: $t_{frein} = 8.5\,s$ et $d_{frein} = 70.8\,m$

Remarque : le temps de freinage ainsi que la distance de freinage ne dépendent pas du poids du véhicule !

106.11. Un bateau de transport de 25000 tonnes se déplace à la vitesse de 15 noeuds ($1\,noeud = 0.5144\,m/s$). Son moteur développe une puissance de 5500 CV ($1\,CV = 736\,W$). Au moment où on arrête le moteur, combien de temps mettra le bateau avant de s'immobiliser, en supposant que la résistance à l'avancement est constante et que le rendement moteur-hélice vaut 0.4 ? Quelle distance aura-t-il parcouru depuis moteur à l'arrêt ?

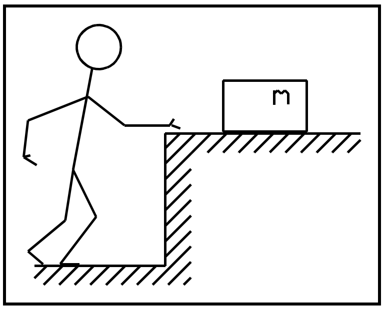
Réponses : $t_{arrêt} = 920\,s$; $d_{arrêt} = 3548\,m$

106.12. Une voiture, de 1 tonne de masse, lancée à 120 *km/h* freine, de manière constante, sur une longueur de 100 *m* jusqu'à l'arrêt.

a) Que doit valoir le coefficient d'adhérence minimum pour éviter le glissement des roues sur le sol ?
b) Quelle sera l'expression de la puissance instantanée, en fonction du temps, dissipée par les freins si l'effort de freinage est constant ?

Réponses : a) $\mu_{s\,\min} = 0.57$ b) $P = \left\|\vec{f}_f\right\| \left(-\dfrac{\left\|\vec{f}_f\right\|}{m} t + \left\|\vec{v}_0\right\| \right)$; $P_{t=0} = 185.2\,kW\,(!)$

106.13. On lance, sur un plan horizontal, un bloc en forme de parallélépipède rectangle, de masse $m = 1\,kg$; le coefficient de frottement μ_k entre bloc et plan vaut 0.2. Quelle doit être la vitesse initiale du bloc pour qu'il s'arrête après avoir parcouru 10 *m* ? Combien de temps durera le mouvement ?

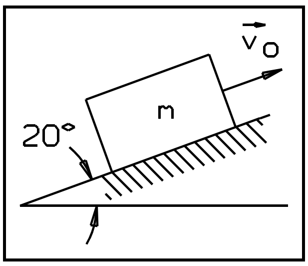


Réponses : $\left\|\vec{v}_0\right\| = 6.26\,m/s$; $t = 3.19\,s$

106.14. Une balle de 60 grammes frappe une paroi rigide, horizontalement, sous un angle de 30° à la vitesse de 10 *m/s*. La durée du choc est de 0.01 *s*. On constate qu'elle rebondit sous le même angle et, dans l'hypothèse d'un choc élastique, calculons la valeur de la variation de la quantité de mouvement de la balle au cours du choc, puis la valeur de la force moyenne exercée par la balle sur la paroi pendant la durée du choc.

Réponses : $\left\|\Delta\vec{p}\right\| = 0.6\,kgm/s$; $\left\|\vec{f}\right\| = 60\,N$

106.15. Un corps de masse $m = 10\,kg$ est lancé avec une vitesse initiale $\left\|\vec{v}_0\right\| = 10\,m/s$, suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle $\alpha = 20\,°$ avec l'horizontale. Si le coefficient de frottement μ_k vaut 0.25, quelle distance parcourra le corps avant de s'arrêter ? Combien de temps mettra-t-il pour s'immobiliser ? Restera-t-il alors immobile ou se remettra-t-il en mouvement ?

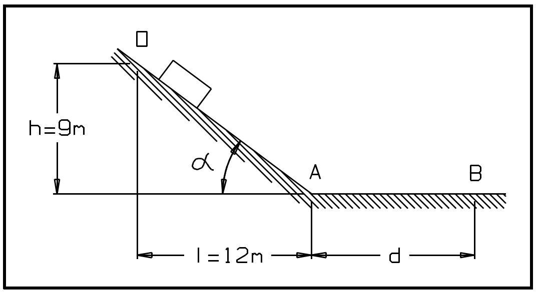


Réponses : $d = 8.83\,m$; $t = 1.77\,s$; en mouvement

106.16. Une météorite qui tombe sur la Terre a une masse de 39 *kg*. Elle s'est enfoncée dans le sol d'une profondeur de 1.875 *m*. La résistance du sol à l'enfoncement est de 500 *kN*. A quelle vitesse la météorite a-t-elle atteint la surface de la terre ? Quel temps a-t-elle mis pour s'enfoncer ?

Réponses : $\|\vec{v}\| = 219.2\ m/s$; $t = 17.1\,10^{-3}\ s$

106.17. Un petit bloc de masse *m* est abandonné en O sans vitesse. Le coefficient de frottement sur les deux plans est $\mu_k = 0.3$. On suppose par ailleurs que la vitesse initiale avec laquelle il commence à se déplacer sur $\overline{AB}$ a la même valeur que celle acquise en glissant sur $\overline{OA}$. Déterminer la distance d'arrêt *d* ainsi que le temps total de parcours.



Réponses :

$$d = \frac{\overline{OA}\left(\sin\alpha - \mu_k\ \cos\alpha\right)}{\mu_k}$$

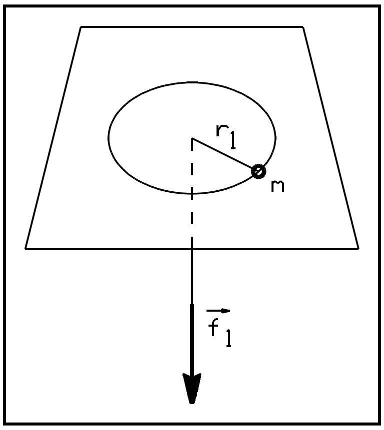
$$t_{tot} = \frac{\sqrt{2\,\|\vec{g}\|\,\overline{OA}\left(\sin\alpha - \mu_k\ \cos\alpha\right)}}{\|\vec{g}\|}\left(\frac{1}{\mu_k} + \frac{1}{\left(\sin\alpha - \mu_k\ \cos\alpha\right)}\right)$$

106.18. Deux hommes, chacun de masse *m*, se trouvent dans un wagon immobile de masse *M*. Le premier saute vers l'arrière du wagon avec une vitesse horizontale $\|\vec{v}_h\|$. Ensuite, le second saute à son tour aussi vers l'arrière, avec une vitesse horizontale $\|\vec{v}_h\|$ *par rapport au wagon*.

a) Quelle sera la vitesse finale du wagon ?
b) Sera-t-elle supérieure ou inférieure à celle qu'il aurait eu si les deux hommes avaient sauté en même temps ? Démontrez-le !

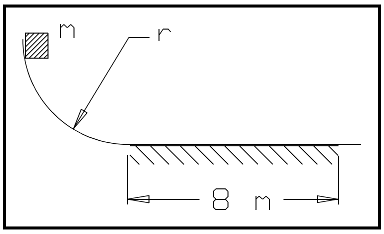
Réponses : a) $\|\vec{v}_{w\,a}\| = \|\vec{v}_h\|\,\dfrac{m}{M}\left(\dfrac{m+2\,M}{m+M}\right)$ b) $\|\vec{v}_{w\,b}\| = \|\vec{v}_h\|\,\dfrac{2\,m}{M}$; $\|\vec{v}_{w\,b}\| > \|\vec{v}_{w\,a}\|$

106.19. Un bloc de masse *m* décrit à vitesse scalaire $\|\vec{v}_1\|$ une trajectoire circulaire de rayon r_1, sur une table horizontale, sans frottements. Une ficelle attachée au bloc coulisse sans frottement à travers une ouverture percée dans la table. La ficelle est maintenue par une force constante $\vec{f}_1$. Que vaut $\|\vec{f}_1\|$ en fonction des variables du problème ? Si on augmente $\|\vec{f}_1\|$, le rayon de la trajectoire circulaire va progressivement diminuer. Quelle sera la vitesse $\|\vec{v}_2\|$ associée au rayon r_2 (< r_1) ? Avec $m = 0.15\,kg$, $r_1 = 0.3\,m$ et $\|\vec{v}_1\| = 4\ m/s$, quel travail va effectuer $\vec{f}_1$ dans son lent mouvement vers le bas, jusqu'à un rayon $r_2 = 0.1\,m$?



Réponses : $\|\vec{f}_1\| = \dfrac{m\,v_1^2}{r_1}$; $\|\vec{v}_2\| = \|\vec{v}_1\|\,\dfrac{r_1}{r_2}$; $W_{f_1} = 9.6\ J$

106.20. Un bloc de 2 *kg* est lâché sans vitesse initiale du haut d'une glissière en forme de quart de cercle de rayon *r*. Le bloc glisse ensuite sur un plan horizontal sur lequel il finit par s'arrêter au bout de 8 *m*. La glissière courbe est sans frottement, mais une force de frottement de 8 *N*, constante, s'exerce sur le bloc quand il glisse horizontalement.



a) Que vaut *r*, le rayon de la glissière ?
b) Combien de temps le bloc glisse-t-il horizontalement ?
c) Que vaut le coefficient de frottement ?

Réponses : a) $r = 3.26\,m$ b) $t = 2\,s$ c) $\mu_k = 0.407$

106.21. Une fusée de 7200 *kg* (carburant compris) se déplace à la vitesse de 1500 *m/s*. On décide de modifier sa trajectoire d'un angle de 1.0°, en allumant brièvement les moteurs. Les tuyères sont orientées de manière telle que les gaz de combustion soient expulsés perpendiculairement à la direction initiale, à la vitesse de 2400 *m/s*. Quelle quantité de gaz faut-il brûler ?

Réponse : $m = 78.5\,kg$

106.22. Un homme de 60 *kg* retombe sur le sol après avoir saute d'un toit situé à 6 *m* de haut. Estimons la force moyenne exercée sur les jambes de cet homme qui atterrit sur ses deux pieds. Tout d'abord, s'il touche le sol les jambes raides, seule l'élasticité des os, cartilages, ...lui permet de décélérer sur une distance de 1 *cm* environ. Ensuite regardons ce qui se passe s'il amortit sa chute en pliant les genoux, dans ce cas son centre de gravité s'abaisse de 50 *cm* environ.

Réponses : $\left\|\vec{f}_{1\,cm}\right\| = 354\,kN$; $\left\|\vec{f}_{50\,cm}\right\| = 7.65\,kN$

106.23. Un train, d'une masse totale de 60 tonnes, circule entre la gare 1 (point A) et la gare 2 (point F). On note que 200 personnes de 75 *kg* (poids moyen) sont entrées en gare 1 (le train est supposé vide de passagers avant). Le trajet du train est le suivant :

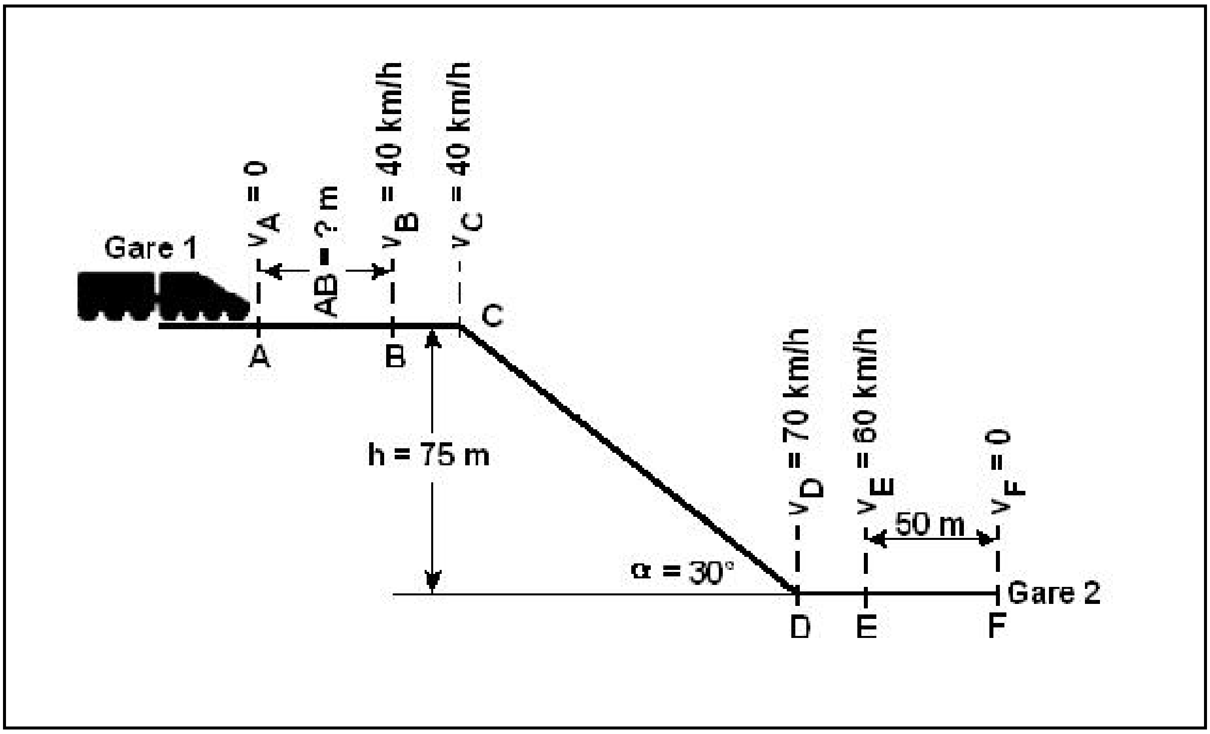
- Le train démarre au point A en utilisant toute la puissance de son moteur qui provoque une force de traction $\left\|\vec{f}_T\right\|$ constante équivalente de 300 *kN*. Le conducteur accélère jusqu'à atteindre la vitesse de 40 *km/h* (point B).
- De B à C, le conducteur fait en sorte que sa vitesse reste constante à 40 *km/h*.
- En C, le train dévale une pente (angle de 30° par rapport à l'horizontal) de 75 *m* de dénivelé vertical. Par sécurité pour les passagers, le conducteur freine avec une force $\left\|\vec{f}_C\right\|$ constante. A la fin de la pente, le train arrive au point D.
- Entre D et E, la vitesse du train étant trop importante par rapport à la limitation en vigueur sur ce tronçon, le conducteur décide de freiner et ramène la vitesse à 60 *km/h* qu'il gardera constante jusqu'en E.
- A partir de E (à 50 *m* du point F), comme il s'approche de la prochaine gare, il arrête le moteur et commence à freiner, de manière constante, pour s'arrêter en face du quai (point F).

On demande de :

a) Calculer la *distance entre A et B* (x_1) en sachant qu'il existe une force de frottement $\left\|\vec{f}_f\right\|$, constante, qui vaut 150 *kN*.

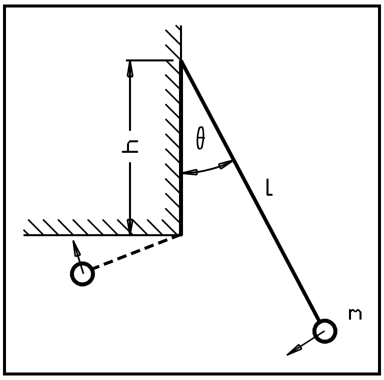
b) Calculer la *force de freinage* $\left\|\vec{f}_C\right\|$ pour que le train ait une vitesse de 70 *km/h* au point D. La force de frottement constante $\left\|\vec{f}_f\right\|$ est toujours présente et vaut 150 *kN*.

c) Calculer *le temps* que met le train pour parcourir la distance de 50 m entre les points E et F. Si la force de frottement constante $\left\|\vec{f}_f\right\|$ est toujours présente et vaut 150 kN, en déduire la force de freinage $\left\|\vec{f}_E\right\|$.



Réponses : a) $d_{\overline{AB}} = 30.9\ m$ b) $\left\|\vec{f}_C\right\| = 154.2\ kN$ c) $t = 6\ s$; $\left\|\vec{f}_E\right\| = 58.3\ kN$

Exercices concernant principalement la "*conservation de l'énergie*" (*§ 10.7.*)

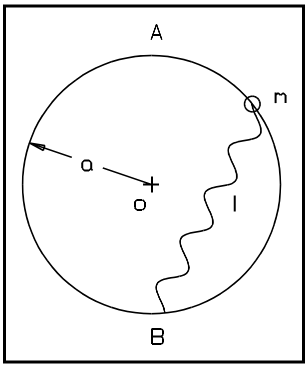


107.01. Que doit valoir l'angle θ minimum pour que la masse m vienne toucher le rebord horizontal du mur ?

Réponse : $\theta = \arccos(h/l)$

107.02. A quelle vitesse doit courir un sauteur à la perche pour pouvoir atteindre la hauteur de 6 m (Sans tenir compte de l'énergie supplémentaire fournie pas l'athlète) ?

Réponse : $\|\vec{v}\| = 10.85\, m/s$

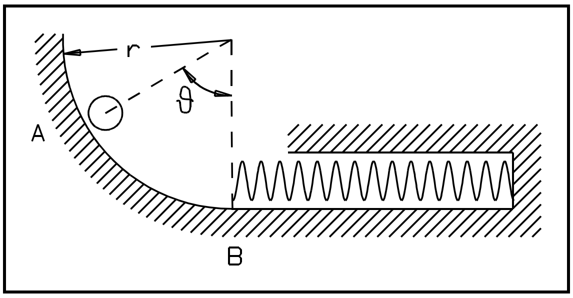


107.03. Un anneau coulisse sans frottement sur un cercle vertical de rayon a. Il est soumis à la traction $\|\vec{f}\| = k\, l$ d'un ressort (l = longueur du ressort) et à son poids. Quelle sera la vitesse de l'anneau en B s'il est lâché de A avec une vitesse nulle ?
Remarque : en B on considérera que le ressort à une longueur nulle.

Réponse : $\|\vec{v}_B\| = \sqrt{4\, g\, a + \dfrac{4\, k\, a^2}{m}}$

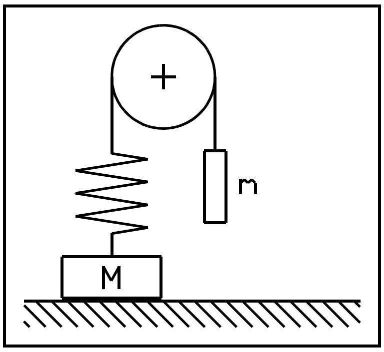
107.04. Une boule de masse m glisse sans frottement sur une piste circulaire de rayon r. Elle est abandonnée au repos en A et vient cogner en B sur un ressort de raideur k. Déterminer :

a) la réaction d'appui de la piste circulaire, quand m passe en B;
b) la flèche maximale (compression maximale) e_{max} prise par le ressort.



Réponses : a) $\|\vec{f}_R\| = m\, \|\vec{g}\| \left(3 - 2\cos\theta\right)$

b) $e_{\max} = \sqrt{\dfrac{m}{k}\, 2\, \|\vec{g}\|\, r\, \left(1 - \cos\theta\right)}$



107.05. Un point matériel de masse M est attaché à un ressort (de raideur k) dont l'autre extrémité est reliée par un fil à une masse m. Le ressort étant initialement détendu - et le fil tendu - on laisse tomber m sans vitesse initiale. Pour quelles valeurs de m est-il possible de soulever M (ne fut-ce qu'un court instant) ?

Réponse : $m > M/2$

107.06. Un élastique de longueur l, dont la constante de rappel est de 1600 N/m, est accroché à un pont. Un homme de 80 kg, attaché à l'élastique, saute du pont. Quel doit être la longueur maximale de l'élastique pour que l'homme atteigne le fond du ravin, d'une profondeur de 45 m, sans vitesse ?

Réponse : $l_{corde} = 38.4\, m$

Exercices concernant principalement la "*force d'inertie*" (*§ 10.8.*)

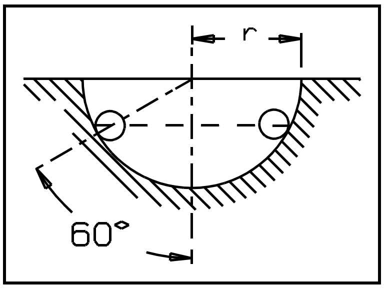
108.01. Dans le wagon d'un train qui suit une courbe à la vitesse de 75 *km/h*, on pèse une charge avec un dynamomètre à ressort; le poids de la charge est 50 *N*, et le dynamomètre indique 51 *N*. Déterminer le rayon de courbure de la voie en négligeant la masse du dynamomètre.

Réponse : $r = 220.1\,m$

108.02. Un cycliste roule sur un plan horizontal en y décrivant une circonférence. Sa vitesse scalaire est de 5 *m/s*. Le coefficient de frottement des pneus sur le plan est $\mu_s = 0.2$. Déterminer le rayon minimum de la circonférence décrite par le centre de gravité de l'ensemble cycliste-vélo, pour que les roues ne "*chassent*" pas (glissement transversal).

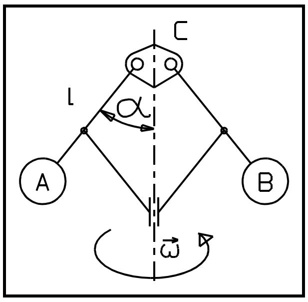
Réponse : $r_{\min} = 12.75\,m$

108.03. On désire qu'une bille, lancée dans une cuvette hémisphérique fixe, de rayon $r = 0.6\,m$, décrive un *cercle horizontal*, de manière que le rayon qui passe par la bille fasse un angle $\alpha = \pi/3$ avec la verticale.
La bille est de dimensions négligeables, et sa masse est *m*; il n'y a pas de frottement entre bille et cuvette. Déterminer la vitesse $\|\vec{v}_0\|$ avec laquelle la bille doit initialement être lancée.



Réponse : $\|\vec{v}_0\| = 2.97\,m/s$

108.04. En négligeant la masse de tous les organes en rotation d'un régulateur de Watt, par rapport à celle des boules A et B, trouver l'angle *α* que forme la tige $\overline{AC}$ (ou $\overline{BC}$) avec l'axe de rotation vertical, si le régulateur tourne à une vitesse angulaire constante valant $\vec{\omega}$. La longueur de $\overline{AC}$ est *l*.



Réponse : $\alpha = \arccos \dfrac{\|\vec{g}\|}{\omega^2\, l}$

108.05. Un cyclomotoriste négocie un virage à 30 *km/h*. Le rayon de courbure du virage est de 10 *m*. Calculer *α*, l'angle d'inclinaison de l'ensemble, par rapport à la verticale.

Réponse : $\alpha = 35.3°$

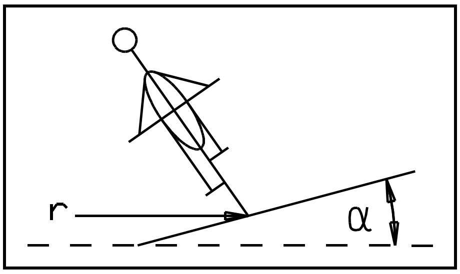
108.06. Un homme est debout sur le plateau d'un camion roulant à 36 *km/h*. Sous quel angle *α* et dans quelle direction l'homme doit-il se pencher pour éviter de tomber, si, en deux secondes, la vitesse du camion tombe à 9 *km/h* ?

Réponses : $\alpha = 20.9°$ vers l'arrière

108.07. Un skieur de 70 *kg* passe à la vitesse de 60 *km/h* sur une bosse, puis dans un creux (sa vitesse a la même norme). Calculez la force "normale" que le skieur exerce au sommet de la bosse et au fond du creux. Le rayon de courbure au sommet de la bosse et au fond du creux est de 35 *m*.

Réponses : $\left\| \vec{f}_{n\ sommet} \right\| = 130.9\ N$; $\left\| \vec{f}_{n\ creux} \right\| = 1242.5\ N$

108.08. Les virages d'un vélodrome représentent en profil une droite inclinée par rapport à l'horizontale, de sorte que sur ces tronçons curvilignes, le bord extérieur est plus haut que le bord intérieur.

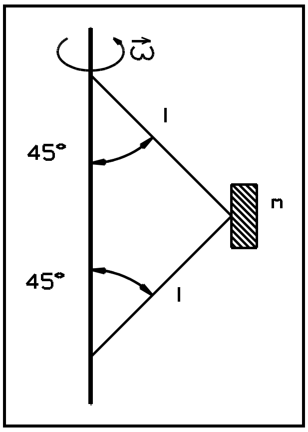


a) Déterminer la plus grande vitesse de déplacement en virage de rayon r et d'angle d'inclinaison α par rapport à l'horizontale, si le coefficient de frottement entre les pneus et le sol vaut μ_s.

b) Quel doit être le rayon r de la circonférence décrite par les roues pour que celles-ci ne "*chassent*" pas (glissement transversal), si $\alpha = 15°$, $\mu_s = 0.2$ et la vitesse scalaire du cycliste est de 5 *m/s* ?

Réponse : a) $\left\| \vec{v}_{\max} \right\| = \sqrt{\left\| \vec{g} \right\| r \tan(\alpha + \varphi_s)}$ b) $r_{\min} = 5.16\, m$

108.09. Une masse m est fixée à deux tiges, bi-articulées, de masse négligeable et de longueur l reliées à un axe vertical tournant avec une vitesse angulaire ω constante. Les deux tiges font un angle de $45°$ avec l'axe. Trouver la tension dans les deux tiges. On considérera les deux tiges comme bi-articulées.

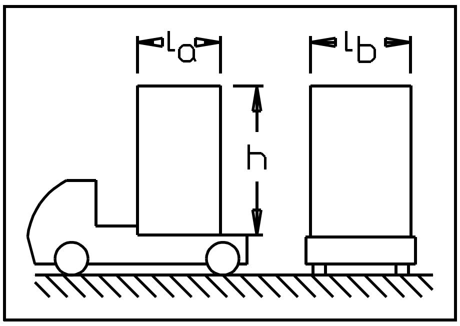


Réponses : $\left\| f_{t\,1} \right\| = m\left(\frac{\left\| \vec{g} \right\|}{\sqrt{2}} - \frac{\omega^2\, l}{2} \right)$; $\left\| f_{t\,2} \right\| = m\left(\frac{\left\| \vec{g} \right\|}{\sqrt{2}} + \frac{\omega^2\, l}{2} \right)$

108.10. Une attraction foraine est constituée d'une cuve de rayon $r = 2.5\, m$ pouvant tourner autour de son axe vertical. On y fait entrer des badauds et on met la cuve en mouvement, les badauds sont adossés à la paroi. Quand la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est suffisante, on escamote le plancher de la cuve. Calculez la valeur limite de cette vitesse angulaire au-dessus de laquelle les badauds restent "collés" à la paroi, avec laquelle ils ont un coefficient de frottement statique μ_s égal à 0.4.

Réponse : $n = 29.9\ tr/\min$

108.11. Un bloc parallélépipédique ($h = 3\, m$; $l_a = 1\, m$; $l_b = 2\, m$) est posé sur la plate-forme d'un camion qui roule à 72 *km/h*. Quelle est la décélération limite qui ferait basculer le bloc vers l'avant (son glissement étant empêché par un petit rebord de hauteur faible) ? Que se passerait-il si le camion négocie, à 72 *km/h*, un virage de rayon $r = 50\, m$ (avec $\mu_s = 0.5$ entre bloc et camion) ?



Réponses : $\left\| \vec{a} \right\| \geq 3.27\ m/s^2$; glisse et ne bascule pas

Exercices concernant principalement les "*applications de la dynamique*" (*§ 10A.1.*)

10A.01. Une météorite de 2000 *kg* est animée d'une vitesse de 80 *m/s* au moment de l'impact sur le sol terrestre. Le choc est de plein fouet. Déterminez la vitesse de recul de la terre.
Masse de la terre : $m_{terre} = 5.98\,10^{24}\ kg$.

Réponse : $\left\|\vec{v}_{terre}\right\| = 2.68\,10^{-20}\ m/s$

10A.02. Une balle de mastic de 500 *g* se déplaçant horizontalement à 6 *m/s* entre en collision avec un bloc posé sur une surface horizontale sans frottement. A la suite de la collision, la balle reste attachée au bloc. Si 25 % de l'énergie cinétique du système est perdue, quelle est la masse du bloc ? Quelle est la vitesse de l'ensemble après le choc ?

Réponses : $m = 0.167\ kg$; $\left\|\vec{v}_f\right\| = 4.5\, m/s$

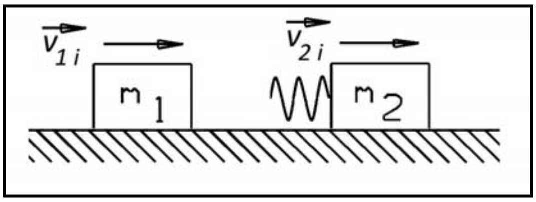
10A.03. Deux billes A et B se déplaçant dans un plan se heurtent au point P. Elles sont respectivement de masses 2 *kg* et 3 *kg*. On connaît les vitesses, mesurées en *m/s*, juste avant le choc pour chacune des deux billes, et juste après le choc seulement pour la bille B :

$$\vec{v}_{A\,0} = 4\,\vec{1}_x - 6\,\vec{1}_y\,; \quad \vec{v}_{B\,0} = 2\,\vec{1}_x + 2\,\vec{1}_y\,; \qquad \vec{v}_{B\,f} = 2\,\vec{1}_x - 2\,\vec{1}_y$$

a) Calculer la valeur de la vitesse de la bille A juste après le choc.
b) Le choc est-il élastique ?

Réponse : a) $\left\|\vec{v}_{A\,f}\right\| = 4\ m/s$ b) non $(\Delta K = -\,36\ J)$

10A.04. Un bloc possédant une masse m_1 de 2 *kg* glisse à 10 *m/s* sur une table sans frottement. Devant lui, un bloc de masse m_2 de 5 *kg* se déplace à 3 *m/s* dans le même sens. On a fixé derrière m_2 un ressort de masse négligeable dont la constante d'élasticité *k* est de 1120 *N/m*. Quelle sera la compression maximale du ressort pendant la collision ?



Réponse : $comp_{\max} = 0.25\, m$

10A.05. Un électron entre en collision élastique avec un atome d'hydrogène immobile. La collision s'effectue à une dimension. Quelle fraction de son énergie cinétique l'électron transfert-il à l'atome d'hydrogène ? La masse de l'hydrogène est 1840 fois supérieure à celle de l'électron.

Réponse : $\Delta K = 0.22\ \%$

10A.06. On lâche une balle d'une hauteur *h* de 1.6 mètres au-dessus du sol et l'on constate qu'elle rebondit seulement jusqu'à une hauteur h_1 de 0.9 mètre. Calculons le coefficient de restitution *e* entre la balle et le sol et voyons quelle hauteur h_2 la balle atteindra après le bond suivant.

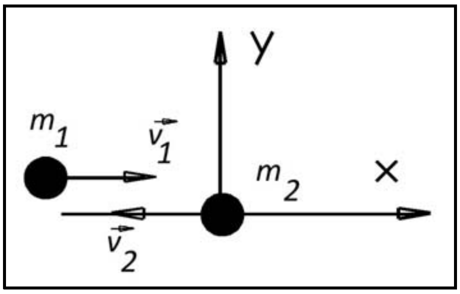
Réponses : $e = 0.75$; $h_2 = 0.506\, m$

10A.07. Une balle de tennis de 60 grammes frappe le sol à la vitesse de 25 *m/s* selon un angle de 40° par rapport à l'horizontale. Elle rebondit dans le même plan vertical à la vitesse de 20 *m/s* selon un angle de 30° par rapport à l'horizontale.

a) Quelle est la perte d'énergie cinétique de la balle au cours du choc ?
b) Calculez la valeur de la variation de quantité de mouvement de la balle au cours du choc. En déduire, si la collision dure 5 *ms*, la valeur de la force $\left\|\vec{f}_{moy}\right\|$ (supposée constante) exercée par le sol sur la balle ?

Réponses : a) $\Delta K = -6.75\ J$ b) $\|\Delta\vec{p}\| = 1.57\ kgm/s$; $\left\|\vec{f}_{moy}\right\| = 314\ N$

10A.08. Une rondelle de masse $m_1 = 5\,kg$ se dirige, sur une surface horizontale sans frottement, à une vitesse de 4 *m/s* vers une deuxième rondelle de masse $m_2 = 3\,kg$ se dirigeant en sens contraire à une vitesse de 1 *m/s*. Après la collision, la trajectoire de la rondelle de masse m_1 est déviée de 20°, par rapport à sa direction initiale, et la deuxième rondelle se dirige maintenant à 40° sous l'horizontale vers les x positifs.



a) Quelle est la grandeur de la vitesse de chacune des rondelles après la collision ?
b) Est-ce une collision élastique ? Quantifier la perte d'énergie.

Réponses : a) $\|\vec{v}_1\| = 2.52\ m/s$; $\|\vec{v}_2\| = 2.24\ m/s$ b) Non; $\Delta K_{perte} = 18.1\ J$

10A.09. Une collision se produit à une intersection entre un véhicule de 1200 *kg* se dirigeant vers l'est et un deuxième de 1350 *kg* se dirigeant vers le sud. Après la collision, les véhicules restent soudés ensemble et une trace de glissement des pneus de 8 *m* de longueur orientée azimut 118°. Si le coefficient de frottement cinétique entre les pneus des véhicules et la chaussée est de 0.6, quelle était la vitesse de chacun des véhicules tout juste avant la collision ?

Réponses : $\|\vec{v}_{1\,i}\| = 18.2\ m/s$ (vers l'est); $\|\vec{v}_{2\,i}\| = 8.60\ m/s$ (vers le sud)

10A.10. A l'aide d'une arme à feu, on tire horizontalement une balle de 4.5 10^{-3} *kg* vers un bloc de 1.8 *kg* immobile sur une surface horizontale. Le coefficient de frottement cinétique entre le bloc et la surface est de 0.20. La balle demeure dans le bloc, qui se déplace de 1.8 *m* après le choc. Quelle était la vitesse de la balle au moment de percuter le bloc ?

Réponse : $\|\vec{v}_{i\ balle}\| = 1065.7\ m/s$

10A.11. Deux billes élastiques suspendues de façon oscillante à la même hauteur, l'une m_1 est deux fois plus lourde que l'autre m_2. La plus lourde est soulevée à une hauteur h et lâchée. Quelles hauteurs h_1 et h_2 les billes atteignent-elles après la collision ?

Réponses : $h_1 = \frac{1}{9}h$; $h_2 = \frac{16}{9}h$

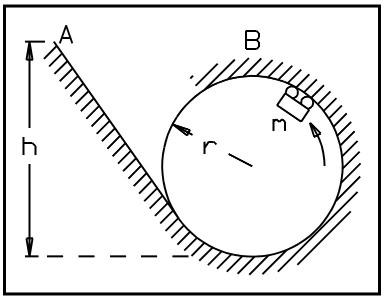
10A.12. Un individu de 75 *kg*, tenant dans ses mains une balle de 1 *kg*, glisse vers l'est à une vitesse de 2 *m/s* sur une surface gelée sans frottement. L'individu lance alors la balle à une vitesse de 10 *m/s* (par rapport à la surface glacée).

a) Quelle est la nouvelle vitesse de l'individu si la vitesse de la balle est dirigée vers l'ouest ?
b) Quelle est la nouvelle vitesse de l'individu si la vitesse de la balle est dirigée vers le nord ?

Réponses : a) $\left\|\vec{v}_f\right\| = 2.16\, m/s$ vers l'est b) $\left\|\vec{v}_f\right\| = 2.03\, m/s$ à 3.76° au sud-est

Exercices combinant différentes notions

10S.01. A Walibi, une attraction présente un wagonnet qui descend une pente d'une hauteur *h*, pour faire un tour complet à l'intérieur d'une boucle circulaire de rayon *r*.
La vitesse initiale du mobile en A étant nulle, et le mouvement se faisant sans frottement, Déterminer la hauteur *h* minimum, en fonction du rayon *r* de la boucle, pour que le wagonnet ne se détache à aucun moment du chemin de roulement.



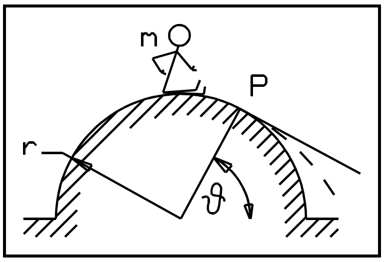
Réponse : $h_{\min} = \frac{5}{2}r$

10S.02. Par un beau jour de printemps, sur une route horizontale et rectiligne, Gaston et Moiselle Jeanne se promènent sur de jolies bicyclettes dont la masse vaut 10 *kg*. L'ambiance est à la bonne humeur et on néglige tous les frottements. Ils roulent ensemble côte à côte à 18 *km/h*. Tout-à-coup, dans un excès de galanterie dont il a le secret, Gaston pousse sa compagne dans le dos pour la faire aller plus vite. Après cette "poussette", Jeanne roule à 25.2 *km/h*.

a) Calculer la nouvelle vitesse de Gaston sachant que sa masse vaut 65 *kg* alors que celle de Jeanne vaut 50 *kg*.
b) Calculer la force moyenne avec laquelle Gaston a poussé Jeanne sachant que la "poussette" a duré 0.50 seconde.
c) Calculer la force moyenne qui a agit sur Gaston pendant qu'il a poussé Jeanne.

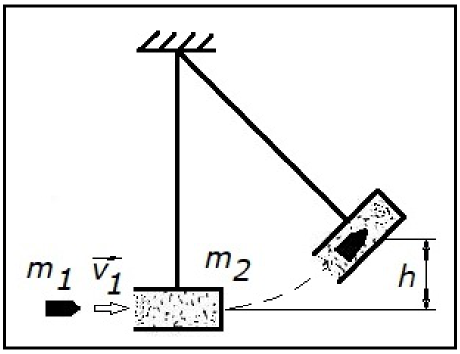
Réponses : a) $v_{f\ gaston} = 3.40\ m/s$ (vers l'avant) b) $f_{Gaston \to Jeanne} = 240\ N$
c) $f_{Jeanne \to Gaston} = -240\ N$

10S.03. Un enfant de masse *m* est assis au sommet d'une bute de glace hémisphérique, de rayon *r*. S'il se laisse glisser, en quel point P l'enfant quittera-t-il la butte (on suppose le frottement nul) ?



Réponse : Le point *P* correspond à $\theta = \arcsin\frac{2}{3}$

10S.04. Un projectile de masse m_1, et de vitesse initiale v_1 est absorbé, dans un choc mou, par un cylindre (rempli de sable) de masse m_2 et de vitesse initiale nulle. On demande la relation qui existe entre la vitesse v_i du projectile et la hauteur *h* qu'atteindra l'ensemble, le cylindre tournant librement autour du point 0 (problème du "pendule balistique").



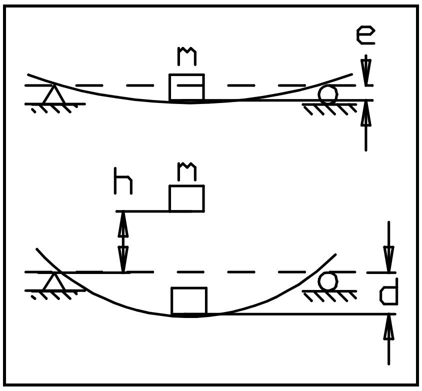
Réponse : $h = \frac{m_1^2\ v_1^2}{2\left(m_1 + m_2\right)^2\ g}$

10S.05. En 1999 l'Autrichien Harry Egger bat le record du monde de ski de vitesse. Pour établir cette marque, le skieur s'élança du haut d'une piste située à une altitude de 2710 *m*. Au bas de la piste, 565 *m* plus bas, il avait atteint une vitesse de 248 *km/h* (actuellement le record est détenu par

Simone Origone avec 252.454 *km/h*). Si la masse corporelle du skieur et de son équipement est de 105 *kg*, quelle quantité d'énergie thermique a été dissipée lors de sa descente ?
En supposant que le frottement entre la neige et les skis est négligeable et que le corps du skieur absorbe toute l'énergie thermique produite par le frottement de l'air sur son corps. Quelle sera l'élévation de la température de son corps si la chaleur massique du corps humain est de 4000 *J/kgK* ?

<u>Réponses</u> : $Q = -\,333\ kJ\ ;\ \Delta T = 0.79\ °C$

10S.06 Une masse *m* posée au milieu d'une poutre élastique la fléchit d'une grandeur *e* (flexion statique de la poutre). En négligeant la masse de la poutre, déterminer la valeur de la flexion maximum *d* que prendra la poutre si la masse *m* est lâchée à partir d'une hauteur initiale *h*.
<u>Remarque</u> : la force nécessaire pour fléchir d'une valeur *x* une poutre élastique est de formulation $f_r = k\,x$, *k* étant la "*constante de raideur*" du ressort que constitue la poutre.



<u>Réponse</u> : $d = e + \sqrt{e^2 + 2\,h\,e}$

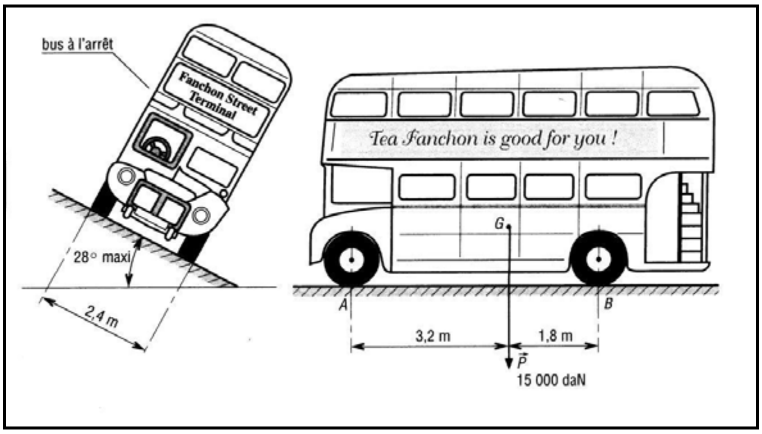
<u>Remarque</u> : si $h = 0$, c'est-à-dire si on "*pose*" brutalement le bloc sur la poutre, $d = 2\,e$

10S.07. Une horloge dans un ascenseur fonctionne grâce à un pendule. Si l'ascenseur descend avec une accélération de 2 m/s^2, l'horloge va-t-elle avancer ou retarder ? De combien ?

<u>Réponse</u> : l'horloge va retarder de 10.8 %

10S.08. Les normes britanniques imposent que les autobus à deux étages ne doivent pas verser si, à l'arrêt, ils sont inclinés de moins de 28° :

a) si la largeur des essieux est de 2.4 *m*, déterminer la position limite du centre de masse G, l'autobus étant supposé symétrique;
b) sur route horizontale et dans un virage de rayon $r = 20\,m$, quelle est la vitesse limite admissible au renversement ?

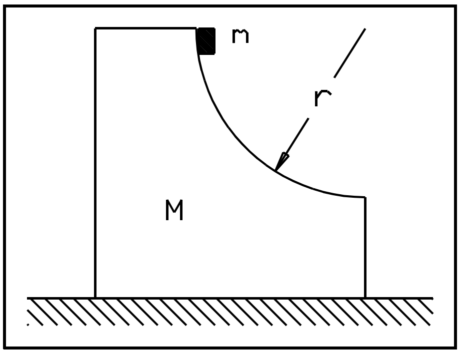


<u>Réponses</u> : a) $h = 2.26\,m$ max b) $v_{\max} = 10.2\ m/s$

10S.09. Le tamis d'un enrichisseur de minerai effectue des oscillations harmoniques verticales d'amplitude $A = 5\,cm$. Trouver la plus petite fréquence ν des oscillations du tamis pour laquelle les morceaux de minerais qui s'y trouvent se séparent et soient lancés vers le haut.

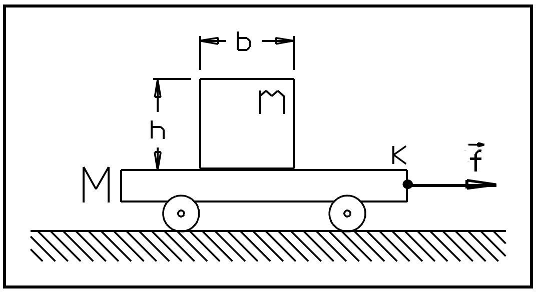
<u>Réponse</u> : $\nu = 2.23\ Hz$

10S.10. Un petit cube de masse m glisse sans frottement sur un quart de cercle de rayon r découpé dans un bloc de masse M qui peut lui-même glisser sur une table, sans frottement. Sa vitesse initiale est nulle. On lâche le cube de la partie la plus élevée du quart de cercle sans vitesse initiale. Quelle est la vitesse du bloc M lorsque le cube quitte le bloc M ?



Réponse : $v_M = \sqrt{\dfrac{2\,m\,g\,r}{M\left(\dfrac{M}{m}+1\right)}}$

10S.11. Un bloc de masse m repose sur un chariot de masse M. Le coefficient de frottement entre bloc et chariot est μ_s. Une force $\vec{f}$ appliquée horizontalement sur le chariot au point K lui communique une accélération. Etudier l'équilibre du bloc sur le chariot en envisageant les deux mouvements possibles. Discuter. En déduire la valeur limite de f qui assure l'adhérence du bloc.



On donne : $m = 50\,kg$; $M = 250\,kg$; $b = 1\,m$; $h = 0.75\,m$; $\mu_s = 0.3$.

Réponses : Valeur limite de f qui assure l'adhérence : 883 N
Valeur limite de f qui assure le non basculement : 3924 N
Le bloc glisse avant de basculer

10S.12. Une balle en acier de 10 grammes est tirée horizontalement à la vitesse de 600 m/s. Elle vient s'incruster dans un bloc de bois de 5 kg libre de glisser sur un rail horizontal. On constate que le bloc, initialement immobile, recule de 10 cm. La chaleur massique c_p de l'acier vaut 448 J/kgK.
Calculez le coefficient de frottement entre le bloc et le rail ainsi que l'élévation de température de la balle en supposant qu'elle absorbe toute l'énergie cinétique perdue au cours du choc.
Rappel : $Q = m\,c_p\,\Delta T$

Réponses : $\mu_k = 0.73$; $\Delta T = 402\,°C$

10S.13. *1ère partie*

Une cabine spatiale P, de masse m, repérée par les coordonnées polaires $r = \overline{OP}$ (O est le centre de la terre) et θ = angle polaire, est soumise à la force d'attraction terrestre ($f_a = G\,\dfrac{m\,m_T}{r^2}$). Un propulseur lui communique une force de poussée constante $\vec{f}_p$, toujours perpendiculaire à $\overline{OP}$. Enfin, la cabine est soumise à une force de frottement atmosphérique $\vec{f}_f$, supposée constante, opposée à la vitesse.

a) Montrer que la force d'attraction peut aussi s'écrire sous la forme : $f_a = m\,g\,(r_T/r)^2$;
b) Ecrire, en coordonnées polaires, les équations différentielles du mouvement;
c) En négligeant le terme en $\ddot{r}$ devant les autres termes, écrire l'expression de la vitesse radiale en fonction de r.

Notations :

m_T	masse de la terre
m	masse de la cabine spatiale
r_T	rayon de la terre
r	position radiale du satellite par rapport au centre de la terre
θ	position angulaire du satellite
g	accélération de la pesanteur au niveau du sol terrestre
G	constante

Réponse : $\dot{r} \approx \dfrac{2\left(f_p - f_f\right)}{m\sqrt{g}\, r_T}\, r^{3/2}$

2ième partie

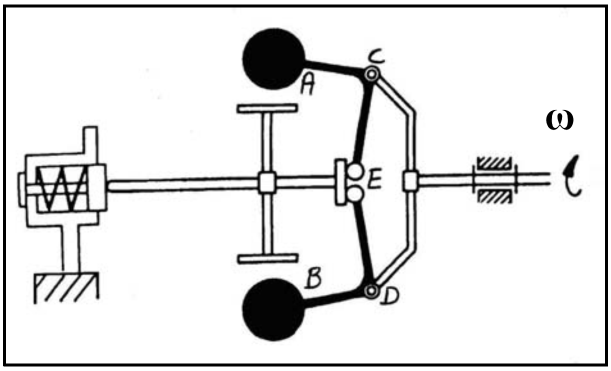
La cabine spatiale est transférée d'une orbite circulaire de rayon r_0 à une orbite circulaire de rayon $r_1 = 2\, r_0$ pendant un temps t_1; le propulseur, fonctionnant pendant toute la durée du transfert, éjecte les gaz avec un débit massique constant q_m (kg/s). Déterminer la poussée f_p. On se servira de la réponse trouvée dans la *1ère partie* soit : $\dot{r} \approx \dfrac{2\left(f_p - f_f\right)}{m\sqrt{g}\, r_T}\, r^{3/2}$.

On donne :
$r_0 = 8\,000\ km$; $r_T = 6400\ km$; masse de la cabine juste avant le transfert $m_0 = 50\ tonnes$; $q_m = 100\ kg/s$; force de frottement $f_f = 1.4\, 10^4\ N$; $t_1 = 6 \min 40 \sec$.

Indice : $q_m = -\dfrac{dm}{dt}$

Réponse : $f_p = f_f + \dfrac{q_m\, r_T \left(1-\sqrt{2}\right)}{\ln\left(1 - \dfrac{q_m}{m_0}\, t_1\right)} \sqrt{\dfrac{g}{2\, r_0}}$

10S.14. Un régulateur de Watt fonctionne grâce à deux boules A et B dont la masse m est prépondérante sur celle des autres accessoires. Le système est destiné à actionner un ressort précontraint dont la caractéristique est $f_r = k\, x + b$ (b étant la précontrainte et k la constante de raideur du ressort). Trouver la loi liant le déplacement x du ressort à la vitesse de rotation ω. Les appuis en E sont assimilés à des rouleaux.
$\overline{AC} = \overline{CE} = \overline{ED} = \overline{BD} = l$ et $\overline{AC} \perp \overline{CE}$.

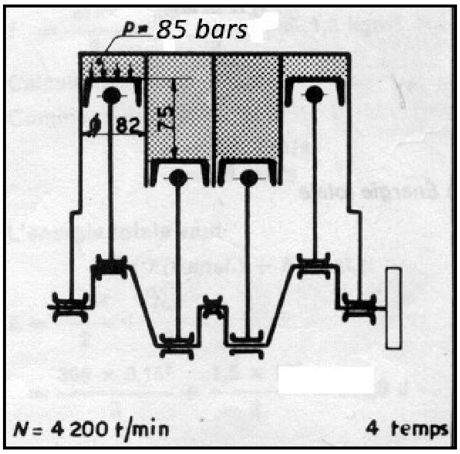


Réponse : $x = \dfrac{b - 2\, m\, \omega^2\, l}{2\, m\, \omega^2 - k}$

10S.15. Un moteur d'automobile a les caractéristiques suivantes :

- 4 cylindres 4 temps
- alésage : 82 *mm*
- course : 75 *mm*
- vitesse : 4200 *tr/min*
- pression moyenne effective : 8.5 *bars*

Calculez la puissance du moteur.



Réponse : $P = 47.2\ kW$

10S.16. Pour décrire le sautillement d'un jouet tel que celui du dessin ci-dessous (tiré de Gaston Lagaffe), on représente ce dernier par un ressort vertical au sommet duquel est fixé un objet de masse m. La base du ressort est fixée à un socle de masse M qui est posé, sans être attaché, sur un support horizontal. La longueur du ressort non comprimé est l_0, sa constante de raideur est k.

a) En prenant l'origine au niveau du support horizontal, faire un schéma et déterminer la constante de raideur k en fonction de l'altitude z_e de la masse m.
b) On appuie sur la masse m avec une force $\vec{f}$ dirigée vers le bas. À l'instant $t = 0$, on arrête d'appliquer la force $\vec{f}$. Écrire l'équation de la dynamique de la masse m en supposant que la masse M reste immobile. Décrire le mouvement (z fonction du temps).
c) En déduire l'expression de la réaction f_R du support. Quelle est la condition sur f_R pour que la masse M ne décolle pas du support ? En déduire la valeur minimale de f qu'il faut appliquer pour faire sauter le bonhomme.

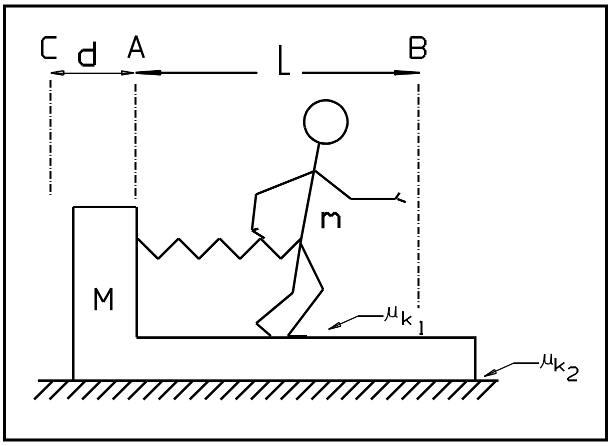
Réponses : a) $k = \dfrac{m\,g}{(l_0 - l)}$ b) $z = z_e + (z'_e - z_e)\cos\left(\sqrt{k/m}\ t\right)$ c) $f_{\min} = (m + M)\,g$

10S.17. Un étudiant de l'ECAM s'amuse sur l' "*élastorun*" ($M = 50\ kg$), le jour de l'inauguration. Il veut tenter de battre le record que Monsieur Melotte a instauré. Celui-ci est de $\overline{AB} = l = 7.9\ m$. L' "*élastorun*" est constitué d'une structure gonflable, posée sur le sol, sur laquelle l'étudiant essaie de parcourir la plus grande distance $\overline{AB}$. L'étudiant est attaché à la structure gonflable par un élastique et reste constamment sur la structure.

a) Va-t-il réussir à battre ce record ? Calculer la distance $\overline{AB'}$ sachant que sa masse est de 70 *kg*, qu'il démarre avec une vitesse de 25.2 *km/h*, que la constante de raideur de la corde (associée à un ressort) est de 75 *N/m* et que l'on négligera tous les frottements.
b) Fatigué par son effort, il se laisse tomber, en B', sur le sol et l'élastique le traîne en arrière jusqu'à sa position d'origine A. Avec quelle vitesse va-t-il percuter le mur qui se trouve à la position de départ ? On estime que le coefficient de frottement dynamique μ_{k1} entre le corps de l'étudiant et l' "*élastorun*" est de 0.15.

c) Comme dit précédemment, l'étudiant percute le mur à l'origine A. Cela a pour effet de déplacer toute la structure vers l'arrière. Calculer la vitesse que la structure a acquise après le choc. On le considérera parfaitement inélastique (choc mou).

d) Sur base de la vitesse calculée précédemment, déterminé la distance $\overline{AC}$ parcourue par la structure en considérant que le coefficient de frottement dynamique $\mu_{k\ 2}$ entre l' "*élastorun*" et le sol est de 0.5.



<u>*Réponses*</u> : a) $\overline{AB'} = 6.76\,m$ b) $v_f = 5.39\,m/s$ c) $v_f = 3.14\,m/s$ d) $d = 1.01\,m$