CHAPITRE 10A. DYNAMIQUE DU POINT - APPLICATIONS

10A.1. *Collisions*

10A.1.1. Introduction

Si un bâton frappe une balle de base-ball, le début et la fin de la collision peuvent être déterminés d'une façon précise. Le bâton demeure en contact avec la balle pendant un intervalle de temps très court comparativement à la durée totale de notre observation.

Durant l'impact, le bâton exerce une grande force sur la balle. Nous pouvons difficilement mesurer cette force, car elle varie avec le temps de façon complexe. Lors du choc, le bâton et la balle subissent une déformation. Nous appelons *forces d'impulsion* les forces qui agissent pendant un intervalle de temps court comparativement au temps d'observation du système dans lequel elles interviennent.

L'objectif de ce paragraphe est de déterminer le mouvement après collision de deux particules connaissant la cinématique du système avant collision

Remarque :
Puisque nous étudions la dynamique du "*point*", le solide de masse m, considéré comme ponctuel, n'a pas de vitesse de rotation angulaire.

10A.1.2. Conservation de la quantité de mouvement

Pendant la collision, la force d'impulsion est généralement plus grande que toute force extérieure pouvant agir sur le système.

Soient deux particules entrant en collision.

La variation de la quantité de mouvement résultant de la collision est donnée par :

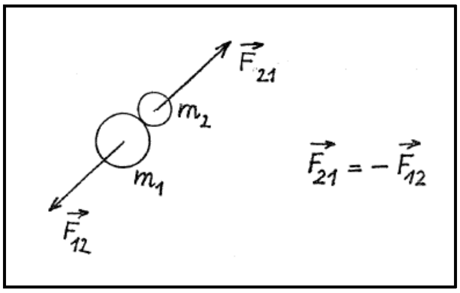


fig.10A.1. *- Choc.*

$$\Delta\vec{p}_1 = \int_i^f \vec{F}_{12}\, dt = \vec{F}_{12\,moyen}\, \Delta t \qquad \text{pour } m_1$$

$$\Delta\vec{p}_2 = \int_i^f \vec{F}_{21}\, dt = \vec{F}_{21\,moyen}\, \Delta t \qquad \text{pour } m_2$$

Si aucune autre force n'agit sur les particules, $\Delta\vec{p}_2$ et $\Delta\vec{p}_2$, donnent la variation totale de la quantité de mouvement de chaque particule. Puisque :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

et $$\Delta\vec{p} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = \vec{0}$$

1) lorsqu'il n'y a *aucune force extérieure* la quantité de mouvement totale du système n'est pas affectée par la collision;
2) l'effet d'éventuelles autres forces extérieures au système est *négligeable* comparativement à celui des forces d'impulsion.

En conséquence, lorsque deux particules entrent en collision, nous admettrons *qu'il y a conservation de la quantité de mouvement totale du système (système isolé).*

Si $\vec{v}_{1\,i}$ et $\vec{v}_{2\,i}$ sont les vitesses avant la collision des deux particules de masses m_1 et m_2 et si $\vec{v}_{1\,f}$ et $\vec{v}_{2\,f}$ désignent les vitesses juste après collision de ces deux particules :

$$\boxed{\vec{p}_i = m_1\,\vec{v}_{1\,i} + m_2\,\vec{v}_{2\,i} = m_1\,\vec{v}_{1\,f} + m_2\,\vec{v}_{2\,f} = \vec{p}_f}$$

10A.1.3. Classification des collisions

A) *Collisions "élastiques"*

Si *l'énergie cinétique se conserve.*

$$\boxed{K_i = \frac{m_1\,v_{1\,i}^2}{2} + \frac{m_2\,v_{2\,i}^2}{2} = \frac{m_1\,v_{1\,f}^2}{2} + \frac{m_2\,v_{2\,f}^2}{2} = K_f}$$

B) *Collisions "inélastiques"*

Si la collision s'accompagne d'une *perte de l'énergie cinétique* du système.

$$\boxed{K_f < K_i}$$

En particulier on s'intéressera aux collisions "*parfaitement inélastiques*" pour lesquelles la perte d'énergie cinétique ($K_i - K_f$) est aussi élevée que le permet la conservation de la quantité de mouvement.

C) *Coefficient de restitution*

Laissons tomber une balle sur une surface rigide : on constate qu'elle rebondit mais la hauteur des rebonds ne cesse de décroître au cours du temps, ce qui traduit une dissipation d'énergie cinétique au moment de l'impact. En effet, lors de l'impact une partie de l'énergie cinétique s'est convertie en énergie interne (échauffement et déformation). L'analyse d'un rebond étant très complexe, on adopte une approche phénoménologique en définissant un *coefficient de restitution e* pour exprimer cette perte. Ce coefficient vaut par définition :

$$\boxed{e = \frac{v_{après}}{v_{avant}}}$$

où "avant" et "après" désignent les moments juste avant et juste après le choc.

De manière générale, pour une collision inélastique directe, on définit le coefficient de restitution à partir du rapport des vitesses relatives :

$$\boxed{\frac{\left|v_{f\,1} - v_{f\,2}\right|}{\left|v_{i\,1} - v_{i\,2}\right|} = e}$$

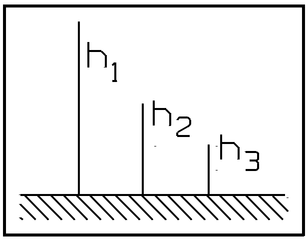
On verra que dans le cas de la collision élastique étudiée ci-dessous, e vaut 1 et que dans le cas d'un choc non élastique à 1 dimension, on trouvera que $0 \le e < 1$, la valeur 0 correspond au choc mou (choc inélastique parfait).

Solide 1	*Solide* 2	*e*	*Solide* 1	*Solide* 2	*e*
bois	bois	1/2	ivoire	ivoire	8/9
liège	liège	5/9	verre	verre	15/16
acier	acier	19/20			

Application 10A.1. Une balle tombe en chute libre et rebondit sur une dalle horizontale d'abord jusqu'à 1.21 *m* de hauteur, puis à 0.64 *m*. De quelle hauteur *h* la balle a-t-elle été initialement lâchée ?

Solution :

Recherche du coefficient de restitution



Vitesse finale (2) (au sol), par conservation de l'énergie :

$$m\,g\,h_2 = \frac{m\,v_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2\,g\,h_2}$$

De même pour la vitesse finale (3) (au sol) :

$$m\,g\,h_3 = \frac{m\,v_3^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_3 = \sqrt{2\,g\,h_3}$$

Si on néglige les frottements de l'air, la vitesse de rebond en (2) est égale à la vitesse d'arrivée au sol en (3), d'où :

$$e = \frac{v_f}{v_i} = \frac{\sqrt{2\,g\,h_3}}{\sqrt{2\,g\,h_2}} = \frac{\sqrt{h_3}}{\sqrt{h_3}} = \sqrt{\frac{0.64}{1.21}} = 0.727$$

Comme le coefficient de restitution est constant :

$$e = cst = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{h_2}{e^2} = \frac{1.21}{0.727^2} = 2.29\ m$$

10A.1.4. Collisions élastiques à une dimension

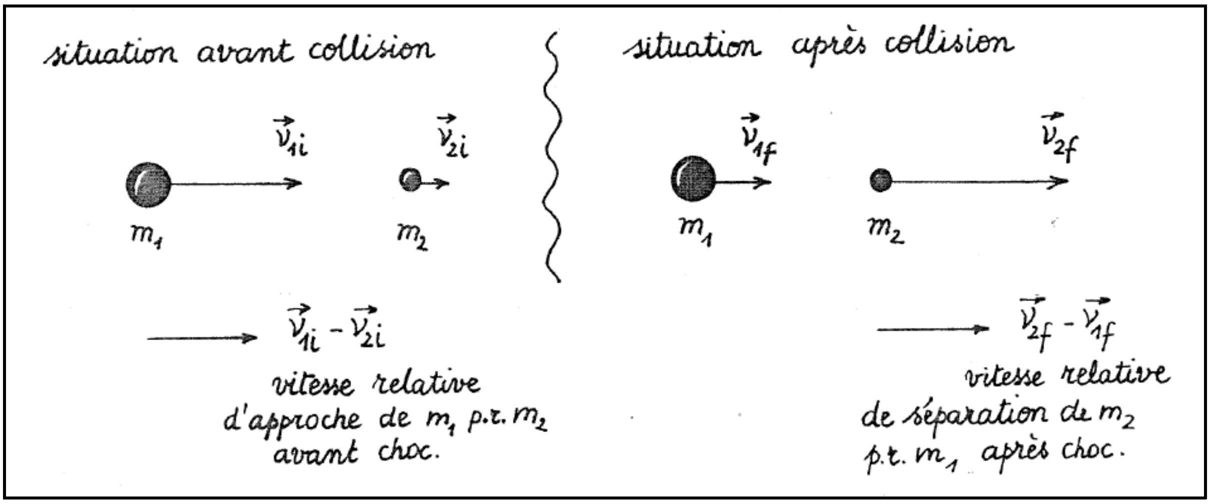


fig.10A.3. - *Collisions élastiques à une dimension.*

Conservation de la quantité de mouvement $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$

$$m_1\ \vec{v}_{1\,i} + m_2\ \vec{v}_{2\,i} = m_1\ \vec{v}_{1\,f} + m_2\ \vec{v}_{2\,f}$$

$$m_1\ v_{1\,i}\ \vec{1}_x + m_2\ v_{2\,i}\ \vec{1}_x = m_1\ v_{1\,f}\ \vec{1}_x + m_2\ v_{2\,f}\ \vec{1}_x$$

$$\Rightarrow \quad m_1\ v_{1\,i} + m_2\ v_{2\,i} = m_1\ v_{1\,f} + m_2\ v_{2\,f} \qquad (1)$$

où $v_{1\,i}$, $v_{2\,i}$, $v_{1\,f}$ et $v_{2\,f}$ sont bien les “*composantes*” (et non les grandeurs !) des vecteurs correspondants.

Conservation de l'énergie cinétique $K_i = K_f$

$$\frac{m_1\ v_{1\,i}^2}{2} + \frac{m_2\ v_{2\,i}^2}{2} = \frac{m_1\ v_{1\,f}^2}{2} + \frac{m_2\ v_{2\,f}^2}{2} \qquad (2)$$

Résolution : 2 équations à 2 inconnues.

$$(1) \qquad \Rightarrow \quad m_1\left(v_{1\,i} - v_{1\,f}\right) = m_2\left(v_{2\,f} - v_{2\,i}\right)$$

$$(2) \qquad \Rightarrow \quad m_1\left(v_{1\,i}^2 - v_{1\,f}^2\right) = m_2\left(v_{2\,f}^2 - v_{2\,i}^2\right)$$

En divisant l'équation (1) par l'équation (2) on obtient :

$$v_{1\,i} + v_{1\,f} = v_{2\,i} + v_{2\,f} \qquad (3)$$

et

$$v_{1\,i} - v_{2\,i} = v_{2\,f} - v_{1\,f}$$

Une première conclusion s'impose : lors *d'une collision élastique* à une dimension, *la vitesse relative d'approche des corps avant l'impact* est égale à la *vitesse relative de séparation après l'impact*.

Recherchons les vitesses finales des deux corps.

L'équation (3) peut s'écrire : $v_{2\,f} = v_{1\,i} + v_{1\,f} - v_{2\,i}$ et en remplaçant dans (1), on trouve :

$$m_1\ v_{1\,i} + m_2\ v_{2\,i} = m_1\ v_{1\,f} + m_2\left(v_{1\,i} + v_{1\,f} - v_{2\,i}\right)$$

$$m_1\ v_{1\,i} + m_2\ v_{2\,i} - m_2\ v_{1\,i} + m_2\ v_{2\,i} = \left(m_1 + m_2\right) v_{1\,f}$$

$$\boxed{v_{1\,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\ v_{1\,i} + \frac{2\ m_2}{m_1 + m_2}\ v_{2\,i}}$$

de façon analogue si on remplace : $v_{1\,f} = v_{2\,f} + v_{2\,i} - v_{1\,i}$ dans (1), on obtient :

$$m_1\ v_{1\,i} + m_2\ v_{2\,i} = m_1\left(v_{2\,f} + v_{2\,i} - v_{1\,i}\right) + m_2\ v_{2\,f}$$

$$m_1\ v_{1\,i} + m_2\ v_{2\,i} - m_1\ v_{2\,i} + m_1\ v_{1\,i} = \left(m_1 + m_2\right) v_{2\,f}$$

$$\boxed{v_{2\,f} = \frac{2\ m_1}{m_1 + m_2}\ v_{1\,i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\ v_{2\,i}}$$

Cas particuliers

1) *Les 2 particules ont la même masse*

$$m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_{1f} = v_{2i} \\ v_{2f} = v_{1i} \end{cases}$$

Les deux particules de même masse ne font qu'échanger leur vitesse.

2) *Une particule (m_2 par exemple) se trouve initialement à l'arrêt :*

$$v_{2i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_{1f} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_{1i} \\ v_{2f} = \dfrac{2\, m_1}{m_1 + m_2}\, v_{1i} \end{cases}$$

3) *Les 2 particules ont la même masse et une particule (m_2 par exemple) se trouve initialement à l'arrêt* :

$$m_1 = m_2 \text{ et } v_{2i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_{1f} = 0 \\ v_{2f} = v_{1i} \end{cases}$$

4) *Une particule (m_2 par exemple) se trouve initialement à l'arrêt et est bien plus massive que m_1 ($m_2 >>> m_1$)* :

$$v_{2i} = 0 \text{ et } m_2 >>> m_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_{1f} \approx - v_{1i} \\ v_{2f} \approx 0 \end{cases}$$

5) *Une particule (m_2 par exemple) se trouve initialement à l'arrêt et est bien plus petite que m_1 ($m_1 >>> m_2$)* :

$$v_{2i} = 0 \text{ et } m_2 <<< m_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_{1f} \approx v_{1i} \\ v_{2f} \approx 2\, v_{1i} \end{cases}$$

La vitesse de la particule massive varie très peu pendant sa collision avec la particule immobile qui, elle, décolle à une vitesse deux fois plus grande que celle de la particule incidente.

Application 10A.2. On attache une boule d'acier de 0.5 *kg* à une corde mesurant 1 *m*. Après l'avoir élevée comme le montre la figure ci-contre, on la relâche. Lorsque la boule passe au plus bas de sa trajectoire, elle entre en collision élastique avec un bloc de 2 *kg* qui se trouve au repos.
Déterminez la vitesse de la boule et du bloc immédiatement après la collision.

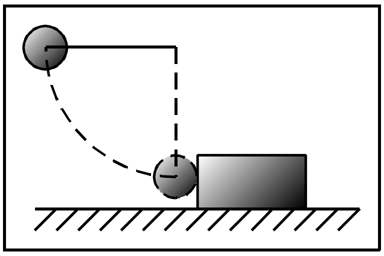


fig.10A.4. *- Application 10A.2.*

Solution :

Choc élastique

La vitesse finale de la boule est donné par, sachant qu'il y a conservation de la quantité de mouvement ainsi que la conservation de l'énergie cinétique :

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2\,m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

Il faut connaître la vitesse v_{1i} (vitesse de la boule juste avant le choc).

Utilisons la conservation de l'énergie entre la position haute de la boule et sa position basse :

$$m\,g\,h = \frac{m\,v_{1i}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_{1i} = \sqrt{2\,g\,h} \quad \text{(chute libre)}$$

En remplaçant, on trouve :

$$v_{1f} = \frac{0.5 - 2}{0.5 + 2} \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 1} = -\,2.66\,m/s$$

La boule repart "en arrière".

Pour v_{2f} :

$$v_{2f} = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} = \frac{2 \times 0.5}{0.5 + 2} \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 1} = 1.77\,m/s$$

10A.1.5. <u>Collisions parfaitement inélastiques à une dimension (choc mou)</u>

Dans une collision inélastique, l'énergie cinétique ne se conserve pas par définition. L'énergie cinétique finale sera inférieure à sa valeur initiale, la différence étant transformée par exemple en chaleur ou en énergie potentielle de déformation pendant la collision.

On peut démontrer que si ($K_i - K_f$) est maximum les vitesses après choc des deux particules sont identiques (c'est le cas lorsque, après choc, les deux particules sont collées l'une à l'autre). Soit :

$$\boxed{v_{1f} = v_{2f} = v_f}$$

En effet :

$$K_f = \frac{m_1\, v_{1f}^2}{2} + \frac{m_2\, v_{2f}^2}{2} \qquad \text{doit être minimum.}$$

$$m_1\, v_{1i} + m_2\, v_{2i} = m_1\, v_{1f} + m_2\, v_{2f} \quad \Rightarrow \quad v_{2f} = \frac{m_1}{m_2} v_{1i} + v_{2i} - \frac{m_1}{m_2} v_{1f} \quad (1)$$

En introduisant cette dernière équation dans celle de l'énergie cinétique, on trouve :

$$K_f\left(v_{1f}\right) = \frac{m_1}{2} v_{1f}^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{m_1}{m_2} v_{1i} + v_{2i} - \frac{m_1}{m_2} v_{1f}\right)^2$$

La relation de v_{1f} rendant l'expression de K_f minimum doit satisfaire la relation suivante :

$$\frac{dK_f}{dv_{1f}} = 0 = m_1\, v_{1f} - m_2\left(\frac{m_1}{m_2} v_{1i} + v_{2i} - \frac{m_1}{m_2} v_{1f}\right)\frac{m_1}{m_2}$$

$$= \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) v_{1f} - \left(\frac{m_1}{m_2} v_{1i} + v_{2i}\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_{1f} = \frac{m_1\, v_{1i} + m_2\, v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Et en remplaçant dans l'équation (1) on en déduit :

$$v_{2f} = \frac{m_1}{m_2} v_{1i} + v_{2i} - \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{m_1\, v_{1i} + m_2\, v_{2i}}{m_1 + m_2}\right)$$

$$= \frac{m_1}{m_2}\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}$$

$$= \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$\Rightarrow \quad v_{2f} = \frac{m_1\, v_{1i} + m_2\, v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Conclusion : $\quad v_{1f} = v_{2f} = v_f \qquad$ CQFD

Quelle que soit la situation, la conservation de la quantité de mouvement reste valable et pour une *collision parfaitement inélastique (choc “mou”)*, la quantité de mouvement s’écrit :

$$\boxed{m_1\, v_{1\,i} + m_2\, v_{2\,i} = m_1\, v_{1\,f} + m_2\, v_{2\,f} = \left(m_1 + m_2\right) v_f} \quad (4)$$

Dans le cas d’une collision parfaitement inélastique à une dimension la relation (4) nous permet de calculer la vitesse v_f des deux particules après impact.

Exemples d’application.

a) Utilisation du marteau pour enfoncer un clou dans un matériau relativement mou.

Soit à enfoncer un clou, de masse m, dans du bois par exemple. Si le marteau, de masse M, ne rebondit pas, le marteau et le clou ont la même vitesse après le choc ($v_{1\,f} = v_{2\,f} = v_f$); on peut alors admettre que le choc du marteau sur le clou est un choc direct et mou. Après le choc, l’énergie cinétique restante K_f va être transformée en travail; le clou s’enfonce. Il importe donc que K_f soit aussi grand que possible, c’est à-dire que *la perte relative d’énergie cinétique due au choc doit être aussi faible que possible*.

La conservation de la quantité de mouvement due au choc s’exprime par :

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \quad \Rightarrow \quad M\, v_i = \left(M + m\right) v_f \quad \Rightarrow \quad \frac{v_f}{v_i} = \frac{M}{M+m}$$

et donc :

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{\dfrac{\left(M+m\right) v_f^2}{2}}{\dfrac{M\, v_i^2}{2}} = \frac{M+m}{M}\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 = \frac{M}{M+m}$$

Pour que cette perte relative soit faible, il faut que M soit grand; **il faut donc utiliser un marteau lourd**.

b) Utilisation du marteau pour casser une pierre posée sur un sol mou.

Les conditions théoriques sont les mêmes, mais il faut éviter que la pierre ne s’enfonce dans le sol. Par suite, il faut que la plus grande partie de l’énergie cinétique initiale soit absorbée dans le choc pour entraîner la rupture de la pierre. *Il faut donc que M soit faible*.

Mais il faut une énergie initiale suffisante pour la rupture; on l’obtiendra en ayant une vitesse initiale v_i très grande. Aussi le marteau du géologue ou du casseur de pierres est-il **de faible masse, mais muni d’un long manche**.

Application 10A.3. Un enfant de 50 *kg* au repos sur des patins à roulettes attrape une balle de 0.6 *kg* se dirigeant vers lui à la vitesse de 30 *m/s*. A quelle vitesse l'enfant se déplacera-t-il au moment où il l'attrape ?

Solution :

Application du théorème de la quantité de mouvement

$F = 0$ (pas de force extérieure, ni de frottement) conservation de la quantité de mouvement et comme l'enfant garde la balle, c'est un choc "mou" (vitesses finales égales).

Projection sur un axe horizontal :

$$m_{balle}\ v_{balle\ i} + m_{enfant}\ v_{enfant\ i} = \left(m_{balle} + m_{enfant}\right) v_f$$

Vitesse initiale de l'enfant nulle :

$$v_f = \frac{m_{balle}\ v_{balle\ i}}{\left(m_{balle} + m_{enfant}\right)} = \frac{0.6 \times 30}{(50 + 0.6)} = 0.356\, m/s$$

Dans le même sens que la balle.

Application 10A.4. *Le pendule balistique* : on utilise ce pendule pour déterminer la vitesse des balles des armes à feu. Il consiste en un gros bloc de bois de masse *M* suspendu à l'aide de deux cordes.

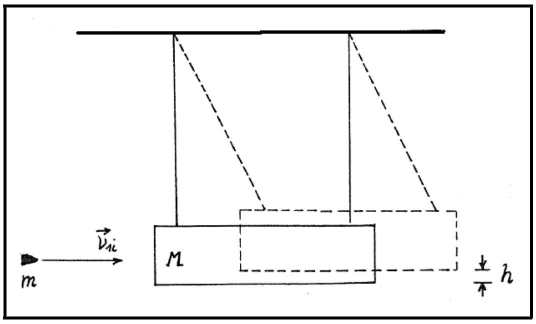


fig.10A.5. *- Application 10A.4.*

Solution :

Description

Une balle de masse *m*, se déplaçant à une vitesse horizontale $\vec{v}_{1\,i}$ frappe le bloc et s'y loge. Si le temps d'impact (nécessaire à la balle) pour s'arrêter dans le bloc) est très faible comparativement à celui de l'oscillation du pendule, les cordes du support demeurent approximativement sur la verticale pendant la collision. Ainsi, aucune force extérieure n'agit sur le système (balle et pendule) durant la collision.

Conservation de la quantité de mouvement (pendant le choc)

Soit :

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \quad \Rightarrow \quad m\, v_{balle\ i} = (m + M)\, v_f \qquad (1)$$

Avec : $\vec{v}_f$ la vitesse de l'ensemble $(m + M)$ juste après le choc.

Conservation de l'énergie (après le choc)

A la fin de l'interaction, le système $(m + M)$ oscille jusqu'à une hauteur maximale *h*, où l'énergie cinétique qui restait au système (juste après collision) s'est transformée en énergie potentielle gravitationnelle.

Système conservatif :

$$E_{Tot\,1} = E_{Tot\,2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(m + M)\, v_f^2 = (m + M)\, g\, h$$

On en déduit la vitesse juste après le choc :

$$v_f = \sqrt{2\, g\, h} \qquad (2)$$

Calcul de la vitesse initiale du projectile

En mettant (2) dans (1), on trouve :

$$v_{1\,i} = \frac{m+M}{m}\,v_f = \frac{m+M}{m}\sqrt{2\,g\,h}$$

Ainsi pouvons nous déterminer $\vec{v}_{1\,i}$ en mesurant *m*, *M* et *h*.

Perte d'énergie cinétique durant le choc

Evaluons la perte d'énergie cinétique accompagnant cette collision parfaitement inélastique :

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{\dfrac{(m+M)\,v_f^2}{2}}{\dfrac{m\,v_{balle\ i}^2}{2}} = \frac{m+M}{m}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2$$

$$= \frac{m}{m+M}$$

Application : si $m = 5\ g$ et $M = 2\ kg$

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{5}{2\,005} = 0.00249 \qquad \text{soit } 0.249\ \%$$

Le système conserve environ un quart de pour cent seulement de son énergie cinétique : 99.75 % se transforme pour devenir entre autre de la chaleur !

10A.1.6. Collisions élastiques à deux dimensions

Dans ce cas, les seules relations de conservation ne peuvent suffire à résoudre le problème. Il faut plus d'informations que celles fournies par les données initiales pour déterminer la cinématique après le choc.

Par exemple, le cas le plus simple est celui d'une collision élastique bi-dimensionnelle entre deux particules où nous avons quatre inconnues :

$$v_{1_x\,f} \text{ et } v_{1_y\,f}\,,\ v_{2_x\,f} \text{ et } v_{2_y\,f}\,.$$

Et pour résoudre ce problème, nous possédons que trois équations :

- la conservation de la quantité de mouvement (suivant Ox et Oy) :

$$\begin{cases} \left(\vec{1}_x\right) \;\Rightarrow\; m_1\,v_{1_x\,i} + m_2\,v_{2_x\,i} = m_1\,v_{1_x\,f} + m_2\,v_{2_x\,f} & (1) \\ \left(\vec{1}_y\right) \;\Rightarrow\; m_1\,v_{1_y\,i} + m_2\,v_{2_y\,i} = m_1\,v_{1_y\,f} + m_2\,v_{2_y\,f} & (2) \end{cases}$$

- la conservation de l'énergie cinétique :

$$\frac{m\left(v_{1_x\,i}^2 + v_{1_y\,i}^2\right)}{2} + \frac{m\left(v_{2_x\,i}^2 + v_{2_y\,i}^2\right)}{2} = \frac{m\left(v_{1_x\,f}^2 + v_{1_y\,f}^2\right)}{2} + \frac{m\left(v_{2_x\,f}^2 + v_{2_y\,f}^2\right)}{2} \qquad (3)$$

Les seules relations de conservation ne peuvent suffire à résoudre le problème. Le mouvement après collision sera déterminé que si l'on spécifie la valeur de l'une des inconnues.

Un exemple de relation obtenue par simple application des relations de conservation est celui du choc élastique latéral entre deux billes de même masse sur un plan (un problème de billard en est un exemple concret).

Dans ce cas :

$m_1 = m_2 = m$

$\vec{v}_{1i} = v_{1_x i}\ \vec{1}_x$

et $\vec{v}_{2i} = \vec{0}$

Le choc étant latéral, les vitesses après le choc ont deux composantes (suivant x et suivant y).

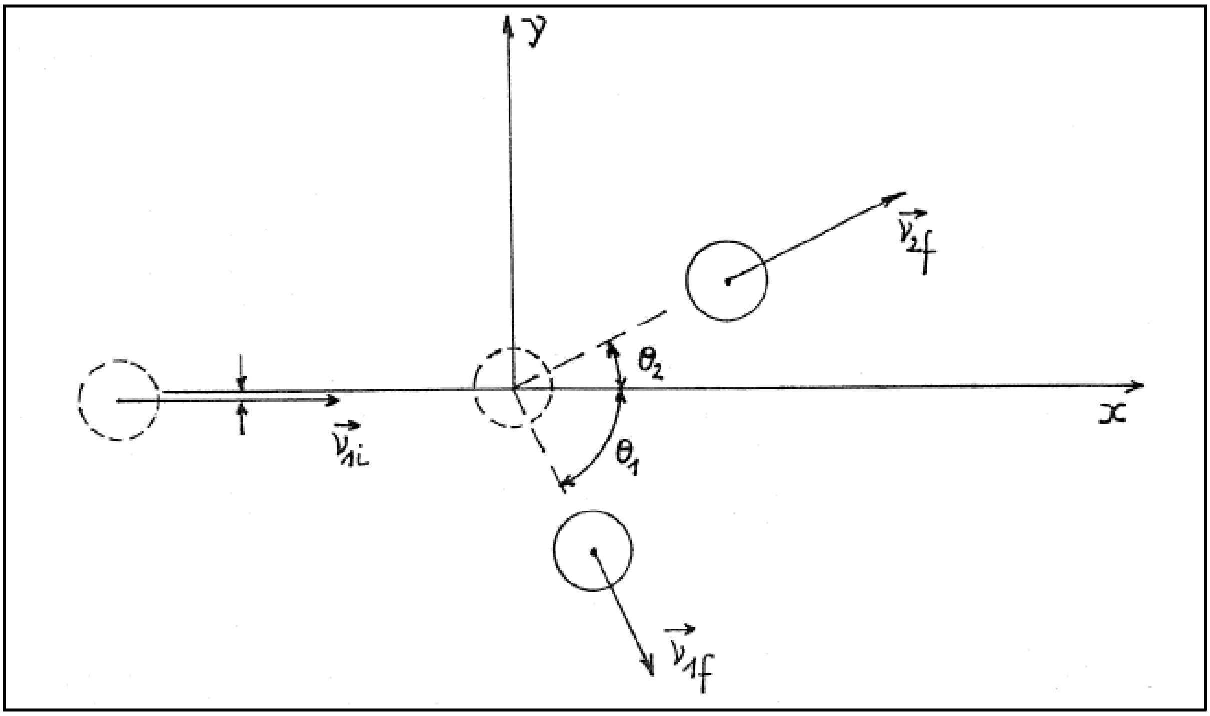


fig.10A.6. *- Collision à 2 dimensions.*

La conservation de la quantité de mouvement donne, sachant que $m_1 = m_2 = m$:

$$\begin{cases} (\vec{1}_x) & \Rightarrow \quad v_{1i} = v_{1f}\ \cos\theta_1 + v_{2f}\ \cos\theta_2 \quad (1) \\ (\vec{1}_y) & \Rightarrow \quad 0 = -\ v_{1f}\ \sin\theta_1 + v_{2f}\ \sin\theta_2 \quad (2) \end{cases}$$

La conservation de l'énergie cinétique :

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \quad (3)$$

Il y a trois équations mais quatre inconnues (!). Dans le cadre de la théorie de la dynamique du point, il est impossible de déterminer les résultats d'une collision en deux dimensions si l'on connaît uniquement les quatre conditions initiales, car les trois équations disponibles (si la collision est élastique) ne permettent pas de solutionner les quatre inconnues de la situation finale.

Toutefois, on peut démontrer que dans ce cas les angles θ_1 et θ_2 sont complémentaires. En effet :

$$\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}$$

En élevant au carré on obtient :

$$\vec{v}_{1i}^{\,2} = \vec{v}_{1f}^{\,2} + \vec{v}_{2f}^{\,2} + 2\,\vec{v}_{1f} \bullet \vec{v}_{2f} \quad \Rightarrow \quad v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\,\vec{v}_{1f} \bullet \vec{v}_{2f} \qquad (4)$$

En combinant (3) et (4) on remarque que : $2\,\vec{v}_{1f} \bullet \vec{v}_{2f} = 0$

En conséquence : soit $\vec{v}_{1f} \perp \vec{v}_{2f} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 + \theta_2 = \pi/2$

soit $v_{1f} = 0$ choc direct élastique à une dimension.

<u>Remarque</u> :

Si $m_1 \neq m_2$ les relations développées ci-dessus ne sont plus vraies.