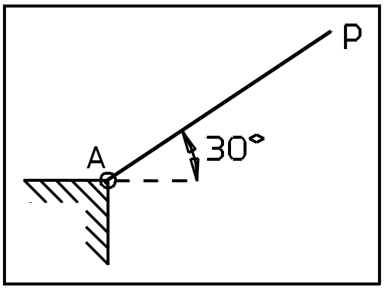
Problèmes sur le chapitre 11 . . . . ***- ex11.1 -***
Exercices concernant principalement la “*loi fondamentale*” (*§ 11.3.*) . . . . ***- ex11.1 -***
Exercices concernant principalement les “*équations différentielles*” (*§ 11.3.*) . . . . ***- ex11.3 -***
Exercices concernant principalement les “*théorèmes - conservation de l’énergie - chocs*” (*§ 11.5.*) . . . . ***- ex11.4 -***
Exercices combinant différentes notions . . . . ***- ex11.7 -***

Problèmes sur le chapitre 11

Remarque :
Même si les exercices sont proposés pour une méthode, rien n'empêche de résoudre ceux-ci d'une façon différente.

Exercices concernant principalement la "*loi fondamentale*" (*§ 11.3.*)

113.01. *Une accélération plus grande que l'accélération de chute libre.* Une tige mince homogène de 2 *kg*, dont la longueur est de 50 *cm*, est fixée à une de ses extrémités par une charnière; elle tombe en pivotant sous l'effet de son propre poids (schéma ci-contre). Déterminez :



a) l'accélération angulaire de la tige à l'instant où elle fait un angle $\theta = 30°$ par rapport à l'horizontale;
b) le module de l'accélération tangentielle de la particule P située à l'extrémité libre de la tige.

Rappel : moment d'inertie d'une tige mince homogène par rapport à son centre de gravité G : $J_G = \dfrac{1}{12} m\, l^2$.

Réponses : $\varepsilon_{30°} = 25.49\, rad/s^2$; $a_{P\,30°} = 12.74\, m/s^2$

113.02. Une meule pleine cylindrique de masse volumique 4000 kg/m^3 a un diamètre $d_{ext} = 600\, mm$ et une épaisseur $e = 50\, mm$. Elle tourne à la vitesse *n* de 900 *tr/min* d'un mouvement uniforme quand elle est entraînée par le moteur électrique.
On débraye le moteur. La meule n'est plus soumise qu'au couple de frottement C_f de son arbre sur les paliers. $C_f = 5\ Nm$.
Calculer la décélération angulaire, le temps d'immobilisation et le nombre de tours faits pendant ce temps.

Réponses : $\varepsilon = -\,1.96\, rad/s^2$; $t = 48.1\, s$; $n = 360.4\ tours$

113.03. Une machine est entraînée par un moteur électrique de fréquence nominale 1500 *tr/min*. Partant d'une vitesse nulle, celui-ci exerce au démarrage un couple moteur constant de 40 *Nm*. Le moment d'inertie de l'ensemble de la chaîne cinématique rapporté à l'axe du rotor est de 12.5 kgm^2. Le couple résistant dû aux frottements est supposé constant et égal à 4 *Nm*.
Calculer :
a) l'accélération angulaire du moteur pendant le démarrage;
b) le temps mis pour atteindre la fréquence nominale.

Réponses : a) $\varepsilon = 2.88\, rad/s^2$ b) $t = 54.5\, s$

113.04. Un câble d'acier assure le sciage de la pierre à la vitesse de 20 *m/s*; il est entraîné par un moteur solidaire d'un volant d'inertie de rayon 1.5 *m* et de masse 140 *kg* (en forme de jante $J_{axe\ rotation} = m\, r^2$). Lorsqu'il n'est plus solidaire de l'arbre moteur, ce volant est freiné par deux patins diamétralement opposés, ils exercent sur la jante un couple de forces tangentes à la jante et de valeur $f = f' = 20\, daN$.

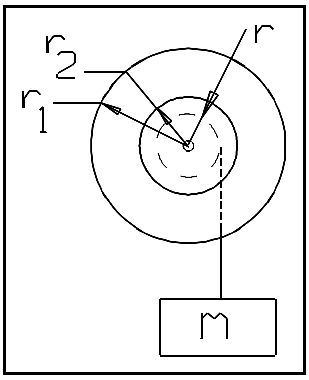
a) Quelle est la valeur de la décélération angulaire du volant durant la phase de freinage ?
b) Après combien de tours le volant d'inertie s'arrête t'il ?

<u>Réponses</u> : a) $\varepsilon = 1.9\ rad/s^2$ b) $N = 7.45\ tours$

113.05. Un volant avec une masse $m = 240\ kg$ et un rayon de giration $i_{g\,O} = 0.5\,m$ tourne initialement à une vitesse angulaire $\omega_0 = 100\ rad/s$. Le mécanisme d'entraînement de l'arbre du volant ne fonctionne plus pendant une durée Δt de 2 minutes. Avec quel pourcentage la vitesse angulaire du volant va-t-elle diminué sous l'effet d'un moment de frottement avec un intensité de 1.8 *Nm* ?

<u>Réponse</u> : 3.6 %

113.06. On considère un volant constitué de deux disques plats concentriques fixés l'un sur l'autre et mobiles autour d'un axe passant par le centre O. On fixe au centre du système une poulie de rayon $r = 2\ cm$ sur laquelle on enroule un fil. On considère alors que la masse de cette poulie est négligeable devant les autres masses du volant.



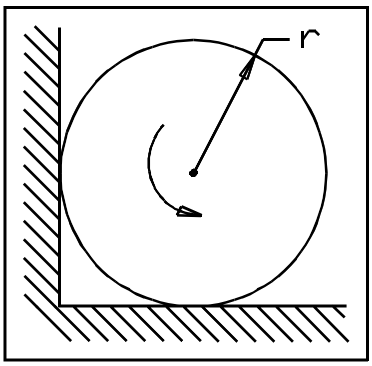
a) Si $m_1 = 1200\ g$, $m_2 = 550\ g$, $r_1 = 6\ cm$ et $r_2 = 3\ cm$ calculer le moment d'inertie J_{Oz} de l'ensemble par rapport à son axe de rotation Oz;
b) Si à l'extrémité de la poulie on accroche une masse $m = 100\ g$ le système se met en rotation. Calculer :
   - la tension dans le fil;
   - calculer l'accélération prise par le système, ainsi que l'accélération angulaire de la poulie.

<u>Réponses</u> : a) $J_{Oz\ tot} = 2.40\,10^{-3}\ kgm^2$
b) $a = 0.160\ m/s^2$; $f_T = 0.960\ N$; $\varepsilon = 8\ rad/s^2$

113.07. Une corde de 3 mètres est enroulée autour d'un volant. On applique une force constante correspondant au poids d'un corps de 4 *kg* à la corde. Au moment où celle-ci quitte l'axe, la roue fait 2 *tours/s*. Si on néglige le poids de la corde ainsi que les frottements, calculez le moment d'inertie de la roue.

<u>Réponse</u> : $J_{axe\ rotation} = 1.49\ kg/m^2$

113.08. Un cylindre homogène de rayon *r* est lancé en rotation avec une vitesse angulaire initiale ω_0 et placé dans un coin. Le coefficient de frottement entre le coin et le cylindre est égal à μ_k. Combien de tours accomplira le cylindre avant de s'arrêter ?



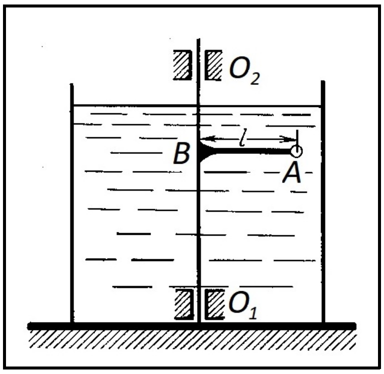
<u>Réponse</u> : $n = \dfrac{\left(1+\mu_k^2\right)}{\mu\left(1+\mu_k\right)}\,\dfrac{\omega_0^2\ r}{8\,\pi\ g}$

Exercices concernant principalement les “*équations différentielles*” (*§ 11.3.*)

114.01. Pour freiner rapidement de grands volants, on utilise un frein électrique. Ceux-ci créent un couple de freinage M_1 proportionnel à la vitesse v sur la jante du volant : $\vec{M}_1 = -\lambda\,\vec{v}$, où λ est un coefficient constant. Le moment M_2 dû au frottement dans les paliers peut-être considéré comme constant; le diamètre du volant est d, son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation est J_O. Calculez le temps d'arrêt du volant s'il tourne à la vitesse angulaire ω_0.

<u>Réponse</u> : $$t = \frac{2\,J_0}{\lambda\,d}\ln\left(1+\frac{\lambda\,d\,\omega_0}{2\,M_2}\right)$$

114.02. Une bille A, située dans un récipient contenant un liquide et fixé à l'extrémité d'une barre $\overline{AB}$ de longueur l, est mise en rotation autour d'un axe vertical $\overline{O_1O_2}$ avec une vitesse angulaire initiale ω_0. La force de résistance du liquide est proportionnelle à la vitesse angulaire de rotation : $f_r = -\lambda\,m\,\omega$, où m est la masse de la bille et λ le coefficient de proportionnalité.

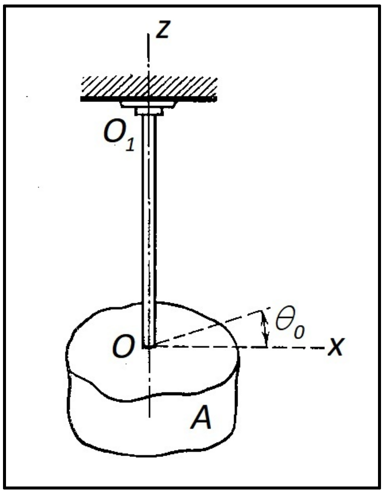


a) Calculer l'intervalle de temps pendant lequel la vitesse angulaire de rotation devient 2 fois plus petite que la vitesse angulaire initiale.
b) Calculer le nombre de tours que font la barre et la bille dans cet intervalle de temps.

La masse de la bille est concentrée en son centre, la masse de la barre est négligeable.

<u>Réponses</u> : a) $\Delta t = \dfrac{l}{\lambda}\ln 2$ b) $n = \dfrac{l\,\omega_0}{4\,\pi\,\lambda}$

114.03. Pour déterminer le moment d'inertie J_{Oz} d'un corps A par rapport à l'axe vertical Oz on le fixe à une barre verticale élastique $\overline{OO_1}$ et l'on soumet cette barre à une torsion autour de l'axe Oz en tournant le corps A d'un petit angle θ_0; on la laisse ensuite osciller; la durée de 100 demi-cycles est $100\,\mathrm{T}_1 = 2\ \mathrm{min}$, où T_1 est la demi-période; le moment des forces d'élasticité par rapport à l'axe Oz est $m_{Oz} = -c\,\theta$. pour déterminer le coefficient c on fait une seconde expérience : on fixe au point O de la barre un disque homogène de rayon $r_0 = 15\,cm$ et de masse $m_D = 1.6\,kg$; la durée du demi-cycle d'oscillation est alors $\mathrm{T}_2 = 1.5\,s$. Calculer le moment d'inertie J_{Oz} du corps.



<u>Réponse</u> : $$J_{Oz} = \frac{m_D\,r_0^2}{2}\left(\frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}_2}\right)^2 = 0.0115\,kgm^2$$

Exercices concernant principalement les "*théorèmes - conservation de l'énergie - chocs*" (*§ 11.5.*)

115.01. Considérons la terre comme une sphère homogène de rayon r et de masse m. Quelle est son énergie cinétique de rotation sur elle-même ? Supposant cette énergie utilisable, pendant combien de temps pourrait-elle fournir une puissance de 1 kW à chacun des habitants de la planète.
Données : $r = 6.4\,10^3\ km$; $m = 6\,10^{24}\ kg$; nombre d'habitants de la terre : 7 10^9 habitants.

Réponse : $t = 1.0\,10^9\ années$

115.02. Trouver le travail nécessaire pour augmenter la vitesse d'un disque de 3 à 7 *tours/sec*. Le disque a un rayon de 30 *cm* et une masse de 30 *kg*.

Réponse : $W = 1.066\,10^3\ J$

115.03. Une sphère pleine, d'une masse de 100 *g* et de 20 *cm* de diamètre, tourne sans frottement autour d'un axe fixe passant par son centre, à raison de 10 tours par seconde.
a) Exprimez l'énergie cinétique de la sphère en fonction des données ci-dessus;
b) On approche perpendiculairement à la surface un frotteur qui exerce un frottement constant sur la sphère et l'arrête en 20 secondes. Que vaut la composante de la force de frottement tangente à la sphère ?
c) Quelle est la longueur sur laquelle s'est exercée le frottement ?

Réponses : a) $K = 0.790\ J$ b) $f_f = 1.26\,10^{-2}\ N$ c) $s = 62.8\ m$

115.04. Un cylindre plein de 12 *cm* de rayon r et constitué d'un matériau homogène est lâché au sommet d'un plan incliné. Il roule, sans glisser, jusqu'au bas du plan.
a) A quelle vitesse arrive-t-il en bas si le plan incliné fait 4.7 *m* de longueur et qu'il est incliné de 3.3 degrés par rapport à l'horizontale ?
b) Si nous remplaçons ce cylindre par une sphère homogène de même masse ($J_{C\ sphère} = 2/5\, m\, r^2$), celle-ci arriverait à une vitesse plus ou moins élevée que le cylindre ? Justifiez sans refaire tous les calculs.

Réponses : $v = 1.88\ m/s$; plus vite car $J_{C\ sphère} < J_{C\ cylindre}$

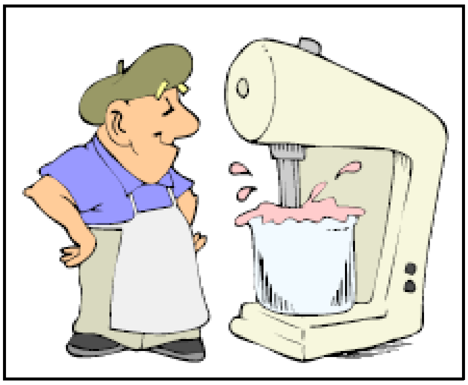
115.05. Deux solides de même masse et de même nature, l'un cubique, l'autre sphérique, se déplacent sur un plan incliné. Le premier glisse sans frottement, le second roule sans glissement. Ils sont lâchés du sommet du plan sans vitesse initiale. Que devient la vitesse de ces deux solides au cours du mouvement ? Déduisez en les vitesses finales des deux solides.
Données : hauteur du plan : $h = 0.36\ m$; longueur du plan : $l = 2\ m$; rayon de la sphère : $r = 8.5\ mm$; masse des solides : $m = 10\ g$.

Réponses : $v_{cube} = \sqrt{2\, g\, (x \sin\alpha)}$; $v_{shpère} = \sqrt{(10/7)\, g\, (x \sin\alpha)}$
Avec : x variant de 0 à l et $\alpha = 10.37°$

115.06. Une (grosse) meule de moment d'inertie $J_O = 40\ kgm^2$ tourne à la vitesse de 1200 *tr/min*. Après le freinage, elle s'arrête après avoir fait 450 tours.
a) Calculer la valeur du couple de freinage;
b) Quelle est la puissance instantanée maximale de freinage ?

<u>Réponses</u> : a) $C_f = 111.7\ Nm$ b) $P_{f\,\max} = 14.04\ kW$

115.07. Dans une usine de confiserie un malaxeur est chargé de mélanger les châtaignes à d'autres ingrédients. Le malaxeur est entraîné par un moteur électrique (vitesse de rotation nominale de ce moteur : 140 *tr/min*).



Le malaxeur est assimilé à un volant d'inertie en forme de jante (cylindre plein) de masse *m* égale à 40 *kg* et de diamètre *d* égal à 40 *cm*.

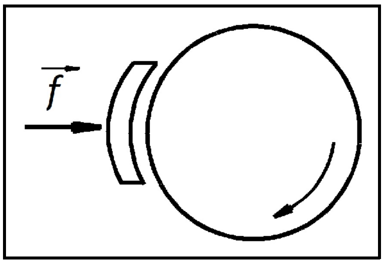
a) Si le moment d'inertie du moteur J_{moteur} est égal à 2 kgm^2, en déduire le moment d'inertie total J_{total} correspondant à la chaîne cinématique "*jante + moteur*". (Le moteur et le malaxeur ont évidemment le même axe de rotation).
b) Calculer le moment du couple moteur de ce moteur électrique lors de la phase de démarrage. On prendra $\varepsilon = 2\ rad/s^2$ et le moment du couple résistant du malaxeur est estimé à 10 *Nm* constant.
c) Quelle est la puissance *nominale* de ce moteur ?

<u>Réponses</u> : a) $J_{Tot} = 2.8\ kg/m^2$ b) $C_m = 15.6\ Nm$ c) $P_{nom} = 146.6\ W$

115.08. Une machine est entraînée par un moteur électrique à la vitesse nominale de 1500 *tr/min*. Celui-ci exerce au démarrage un couple moteur constant de 40 *Nm*. Le moment d'inertie de l'ensemble de la chaîne cinématique rapporté à l'axe du rotor est de 12 kgm^2. Le couple résistant dû aux frottements est supposé constant et égal à 4 *Nm*.
Calculer :
a) l'accélération angulaire du moteur pendant la phase de démarrage;
b) le temps mis pour passer de la vitesse nulle à la vitesse nominale;
c) le travail nécessaire pour démarrer cette machine (pour passer de la vitesse nulle à la vitesse nominale);
d) la puissance nécessaire au démarrage.

<u>Réponses</u> : a) $\varepsilon = 3\ rad/s^2$ b) $t = 52.4\ s$ c) $W = 148.04\ kJ$
d) $P = 2.83\ kW$

115.09. Un cylindre plein de 4 *kg* et 40 *cm* de rayon tourne librement à 600 tours/minute dans le sens horlogique. Un frein exerce sur le bord de la roue une force de 10 *N*, radiale et dirigée vers l'intérieur.
Si le coefficient de frottement est 0.5, combien de tours va effectuer la roue avant de s'arrêter ?



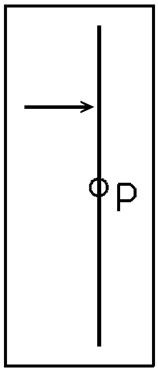
<u>Réponse</u> : $N = 50.26\ tours$

115.10. Un disque horizontal homogène, d'une masse de 1.5 *kg* et de 10 *cm* de rayon, peut tourner sans frottement autour de son axe vertical. Il est initialement au repos. Une balle d'une masse de 10 *g*, animée d'une vitesse horizontale de 200 *m/s*, vient frapper tangentiellement le bord du disque et s'y encastre.
Quelle est la vitesse angulaire du disque après la collision, exprimée en nombre de tours par

minute ?

Réponse : $n = 251\ tr/\min$

115.11. Une latte en bois, longue de 1 *m* et d'une masse de 300 *g*, initialement au repos, peut tourner sans frottement dans le plan horizontal, autour d'un pivot P vertical placé en son centre. Une balle de fusil de 4 *g*, tirée à l'horizontale perpendiculairement à la latte avec une vitesse de 250 *m/s*, vient frapper la latte a mi-distance entre le pivot et l'une des extrémités, et en ressort à la vitesse de 150 *m/s*. Quelle est la vitesse de rotation de la latte après l'impact ?
(On négligera les dégâts provoqués par la balle à la latte).



Réponse : $n = 0.637\ tr/s$

115.12. Un satellite artificiel comporte un corps cylindrique homogène de 1.2 *m* de rayon et de 4 *m* de longueur, dont la masse vaut 600 *kg*. Il est pourvu de bras légers extensibles, diamétralement opposés, qui comportent chacun une masse de 45 *kg* à leur extrémité. Bras repliés, les masses sont contre le corps du satellite et il tourne sur lui-même à une vitesse de 4.0 tours/seconde. Bras déployés, les masses sont situées à 5.0 *m* de l'axe du satellite. Quelle est alors sa vitesse de rotation ?

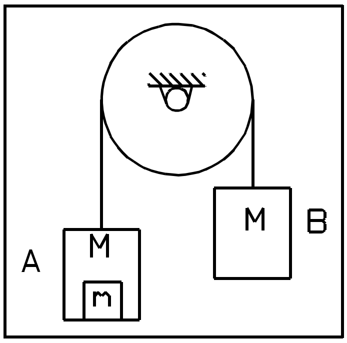
Réponse : $\omega_2 = 50\ tours/\min$

115.13. Une meule a la forme d'un disque de 20 *mm* d'épaisseur et de 20 *cm* de diamètre; sa masse volumique est de 1.75 g/cm^3. On l'utilise pour aiguiser une lame de canif, le coefficient de frottement étant de 0.75. On exerce sur le canif, afin de l'aiguiser, une force constante de 0.80 *N* dirigée vers le centre du disque. La meule tourne à raison de 4.5 tours par seconde, puis on coupe le courant, tout en continuant à appliquer la même force. Combien de tours la meule va-t-elle encore effectuer avant de s'arrêter ?
(On néglige tous les frottements, à l'exception de celui exercé par la lame du canif)

Réponse : 5.8 tours

Exercices combinant différentes notions

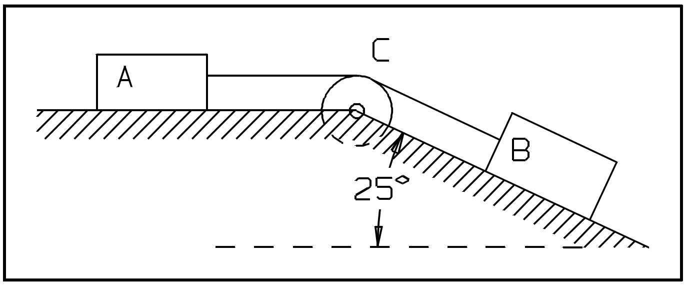
11S.01. Un monte-charge est constitué de deux bennes A et B ayant chacune une masse *M* de 20 *kg*. On place une surcharge de masse *m* égale à 5 *kg* dans la benne A. Le rayon de la poulie (poulie considérée comme un cylindre plein) vaut 30 *cm* et sa masse m_p vaut 20 *kg*.



a) Trouver l'accélération que prendra chaque benne (en considérant que les frottements câble-poulie sont négligeables). (La poulie tourne librement, sans frottement)
b) Quelle(s) sera(ont) la(les) tension(s) dans le câble ?
c) Que se passerait-il si on tenait compte d'un couple de frottement C_f dans l'articulation de la poulie ?

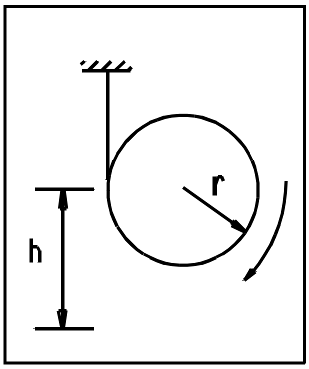
<u>*Réponses*</u> : a) $a = 0.89\ m/s^2$ b) $f_1 = 223\ N$ et $f_2 = 214\ N$ c) si le couple de frottement est trop grand il pourrait bloquer le système

11S.02. Les deux solides A et B ont respectivement une masse de $m_A = 10\ kg$ et $m_B = 20\ kg$. Le solide A repose sur un plan horizontal; le solide B repose sur un plan incliné d'un angle de 25° par rapport à l'horizontale. Les deux solides sont reliés entre eux par un câble passant sur la poulie C de masse $m_C = 2\ kg$ et de rayon r_C. Connaissant la valeur du coefficient d'adhérence $\mu_k = 0.1$ (identique pour le contact A-sol et pour le contact B-plan incliné), déterminez l'accélération *a* de l'ensemble des 2 solides. On négligera le frottement dans la poulie C. Le moment d'inertie de la poulie peut être approximé à $J_\Delta = \dfrac{1}{2} m_C\ r_C^2$.



<u>*Réponse*</u> : $$a = g \frac{-\mu_k\ m_1 + m_2\left(\sin\alpha - \mu_k\ \cos\alpha\right)}{m_1 + m_2 + \dfrac{m_p}{2}} = 1.78\ m/s^2$$

11S.03. Une bobine (cylindre plein) de masse *m* et de rayon *r* se déroule sur un câble verticale.



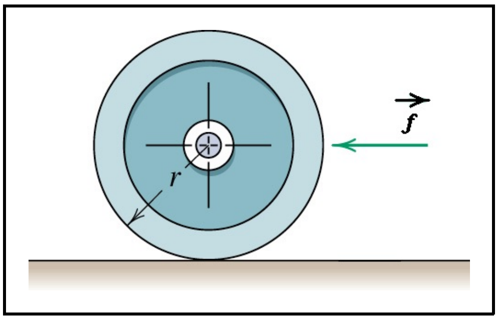
a) Utiliser l'approche faisant intervenir l'énergie et celle utilisant les équations de la dynamique pour démontrer que la vitesse du centre de gravité de la bobine a une grandeur égale à $\sqrt{\dfrac{4\,g\,h}{3}}$ après qu'elle soit tombée d'une distance *h* à partir du repos.
b) Trouver l'accélération linéaire du centre de gravité de la bobine.
c) Quelle est la tension dans le câble ?
d) Avec quelle force doit-on tirer sur la ficelle pour que la bobine tourne sur elle-même sans "descendre" ?

<u>*Réponses*</u> : b) $a_G = 2/3\ g$ c) $f_c = m\,g/3$ d) $f = 2\,m\,g/3$

11S.04. Un rouleau cylindrique uniforme de 20 *kg* est initialement au repos. Lorsqu'on applique une force de 90 *N* comme l'indique la figure, le rouleau roule sans glisser. Déterminer :

a) la vitesse du centre G du rouleau après que celui-ci à parcouru 1.5 *m*;

b) la force de frottement requise pour empêcher le rouleau de glisser.



Réponses : a) $v = 3\,m/s$ b) $f_f = 30\,N$

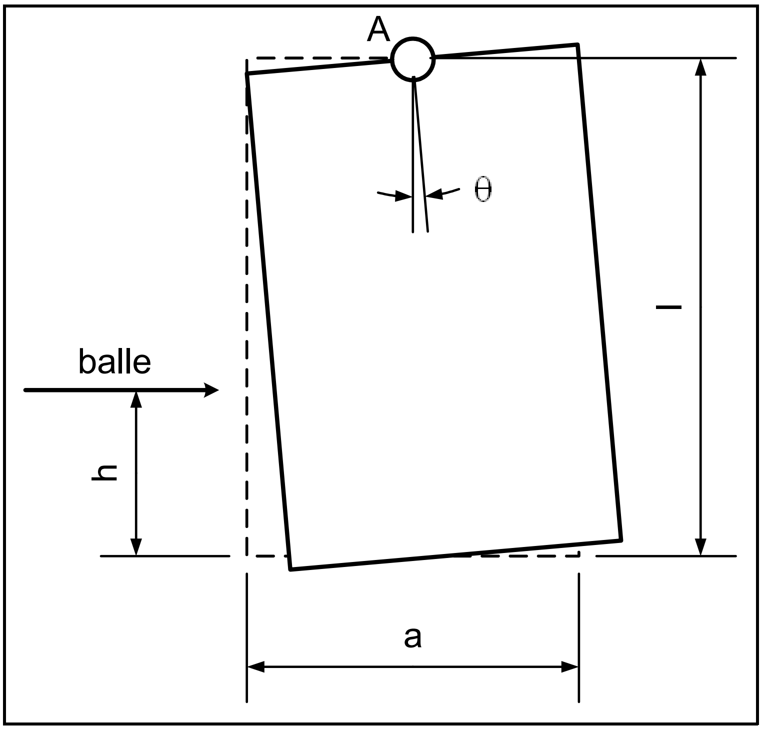
11S.05. Une balle de masse m_b vient frapper et s'y encastre, sur la tranche d'une plaque de masse m, de largeur a, de hauteur l et d'une épaisseur e petite par rapport aux deux autres dimensions. La plaque peut tourner librement autour d'une articulation A

a) A quelle hauteur h doit frapper la balle pour que l'articulation A n'ai pas à subir une quelconque force horizontale ?

b) Que devient cette hauteur si la plaque est replacée par une barre de longueur l (a devenant petit par rapport à la longueur l) ?

c) Quelle est la vitesse de la balle au moment de son encastrement dans la plaque, si l'angle d'oscillation maximum de celle-ci est de 5° ?

d) Quelle sera l'équation du mouvement de cette plaque ?



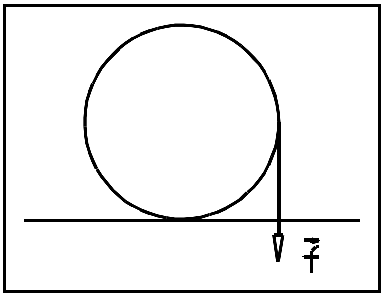
Réponses : a) $h = \dfrac{2\,l^2 - a^2}{6\,l}$ b) $h = \dfrac{1}{3}\,l$

c) $v_i = \dfrac{J_{A\,tot}\,\omega_i}{m_b\,(l-h)}$ avec : $J_{A\,tot} = \dfrac{m}{3}\left(l^2 + \dfrac{a^2}{4}\right) + m_b\,(l-h)^2$

et : $\omega_i = \sqrt{\dfrac{2\left(m+m_b\right) g \left(l/2\right)\left(1-\cos\theta_{\max}\right)}{J_{A\,tot}}}$

d) $\ddot{\theta} + \dfrac{\left(m+m_b\right) g\, l}{2\, J_{A\,tot}}\,\theta = 0$ (Avec : $\sin\theta \approx \theta$)

<u>11S.06.</u> Un cylindre plein homogène de rayon r_0 et de masse m repose sur deux rails horizontaux. Une force $\vec{f}$ est appliquée à l'extrémité pendante d'un fil enroulé autour du cylindre.



a) Déterminer la valeur maximale de la force $\vec{f}$ pour laquelle le cylindre roulera encore sans glisser; le coefficient de frottement μ_s du cylindre sur les rails étant connu.

b) Avec quelle accélération se déplacera alors son axe ?

On négligera le frottement de roulement.

<u>Réponses</u> : a) $f \leq \left(\dfrac{3\,\mu_s}{2-3\,\mu_s}\right) m\,g$ b) $a = \dfrac{2\,\mu_s\, g}{\left(2-3\,\mu_s\right)}$