CHAPITRE 2. FORCES ET MOMENTS DE FORCES

2.1. *Notions de "force"*

2.1.1. Généralités

Une utilisation importante de l'algèbre vectorielle est l'application qu'on en fait à la composition des forces.

La définition précise d'une force ne pourra être donnée que dans la partie "*dynamique*"du cours, quand on abordera la dynamique du point. Cependant, dès le chapitre consacré à la "*statique*", nous aurons à manipuler cette notion de force.

Nous admettrons pour l'instant une notion intuitive de force, déduite de notre expérience quotidienne (la notion de force est donnée par la sensation d'effort musculaire) il faut exercer un tel effort :

1) pour modifier l'état de repos ou de mouvement d'un corps (exemples : mettre en mouvement un objet en le faisant glisser sur une table, arrêter un chariot qui dévale une pente,...);
2) pour déformer un corps (plier une branche d'arbre, allonger un fil de caoutchouc,...).

Cette notion suggère que la force est une grandeur vectorielle possédant une *direction*, un *sens*, une *intensité* (ou module) et un *point d'application*.

2.1.2. Domaine d'application et unités de forces

A) *Point matériel et solide*

Un point est une "*particule*" de matière, sans dimension (ni volume, ni surface), mais de masse non nulle. Quant au solide, il s'agit d'un ensemble (fini ou non) de points matériels. Un corps sera dit "*solide parfait*", si il est indéformable, c'est-à-dire si la distance entre deux quelconques de ses points reste constamment inchangée. Dans la suite du cours, nous considérerons tous les corps comme des corps solides parfaits.

B) *Unités de forces*

Dans le système international (SI), l'unité de force est le : *newton* [*N*]. La masse d'un corps peut être considérée, en première approximation, comme étant la quantité de matière qui le compose; l'unité de masse est le kilogramme [*kg*].

Définition : *le newton [N] est la force qui communique à une masse de un kilogramme une accélération de 1 m/s*^{2}.

Pour mémoire : dans l'ancien système des mécaniciens (MKpS), l'unité de force était le *kilogramme-force [kgf] ou kilogramme-poids [kgp]*.

Définition : *le kilogramme-force [kgf] ou kilogramme-poids [kgp] est la force qui communique à une masse de un kilogramme une accélération de 9.81 m/s*^{2}.

La relation entre les deux systèmes est : $1\,kgf = 9.81\,N \approx 10\,N$

Remarque importante :
Il ne faut pas confondre la notion de "*masse*" avec celle de "*poids*". En effet, **la masse** est l'ensemble des molécules qui composent un corps tandis que **le poids** est la force

avec laquelle cette masse est attirée par la Terre. Lorsque votre médecin vous demande votre poids et que vous lui répondez : 90 *kg*, vous le lui donnez en fait dans les anciennes unités de force [*kgp*]. La terre attire les corps et exerce sur eux une force proportionnelle à leur masse, appelée "*poids du corps*". Le poids d'une masse de 1 *kg* est égal, dans les régions dont la latitude est voisine de celle de la Belgique, à 9.81 *N*.

Pôle nord : $g = 9.832\ m/s^2$

Equateur : $g = 9.78\ m/s^2$

La différence est dûe au fait que la terre n'est pas ronde ainsi qu'à la "*force*" centrifuge.

2.1.3. Différents types de forces

Les forces déployées par d'autres corps matériels sur les particules du corps donné sont dites "*extérieures*". Les forces avec lesquelles les particules du corps donné agissent les unes sur les autres sont dites "*intérieures*".

Nous pouvons ainsi classifier les différentes forces soit :

1) *D'après le sens* :

Force motrice : même sens que le mouvement (le vent dans les voiles d'un navire).
Force résistante : sens contraire à celui du mouvement (les forces de frottements).

2) *D'après l'action* :

Forces de contact : *action directe* : elles sont appliquées, soit en un point (forces "*concentrées*" ou "*ponctuelles*"), soit sur une partie ou sur l'entièreté de la surface du corps (forces réparties).

Forces à distance : *action à distance* : elles n'ont pas besoin de zone de contact pour être appliquées; ce sont les forces de pesanteur, forces magnétiques, forces électrostatiques ...

"*Forces*" d'inertie : ce sont des forces fictives résultant d'une variation de la vitesse d'un corps de masse non nulle; elles seront abordées dans la partie dynamique du cours.

2.2. *Moments de forces*

2.2.1. Introduction et définition

L'expérience quotidienne nous montre que la seule notion de *force* ne suffit pas : par exemple, pour soulever un poids $\vec{f}_P$ au moyen d'un levier coudé $\overline{ACB}$, on a tout intérêt à appliquer l'effort $\vec{f}$ le plus loin possible à l'extrémité B du levier, si on désire que le module de $\vec{f}$ soit le plus faible possible.

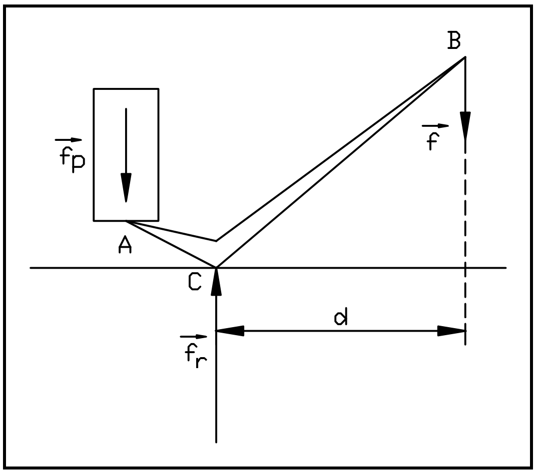

fig. 2.1. - *Notion de moment de force.*

Ainsi donc, le "*bras de levier*" de $\vec{f}$ joue un rôle dans la composition des forces en présence. Notre expérience indique que l'efficacité de $\vec{f}$ à produire une rotation croît avec la distance (appelée "*bras de levier*" *d*) entre la ligne d'action de $\vec{f}$ et le point de rotation C. Par exemple, quand nous ouvrons une porte, nous poussons ou nous tirons toujours le plus loin possible des gonds et nous essayons de maintenir perpendiculaire à la porte la direction suivant laquelle nous poussons ou tirons. Cette expérience nous suggère qu'il est commode de définir une grandeur physique $\vec{m}_P(f)$, qu'on appellera "*moment de la force* $\vec{f}$ *par rapport au point P*".

2.2.2. Moment d'une force par rapport à un point

A) *Expression vectorielle*

Le moment peut être défini comme une grandeur vectorielle (***fig. 2.2.***) Et donc *par définition* le "*moment de la force* $\vec{f}$ *par rapport au point P*", noté $\vec{m}_P(f)$, vaut :

$$\boxed{\vec{m}_P(f) = \vec{PA} \times \vec{f}}$$

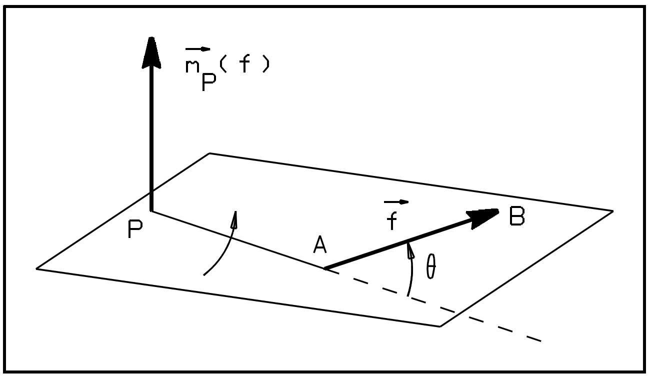

fig. 2.2. - *Moment de force par rapport à un point.*

Avec :
- P le point par rapport auquel on cherche le moment;
- A, en fait, *un point quelconque* de la ligne d'action de la force $\vec{f}$.

$\vec{m}_P(\vec{f})$ est donc un vecteur :

- lié au point P;
- perpendiculaire au plan formé par $\vec{f}$ et le point P;
- de sens tel que $\vec{PA}$, $\vec{f}$ et $\vec{m}_P(\vec{f})$ forment un trièdre *direct* (règle de la main droite);
- de module :

$$\boxed{\left\|\vec{m}_P(\vec{f})\right\| = \left\|\vec{PA}\right\|\left\|\vec{f}\right\|\sin\theta = \left\|\vec{f}\right\| d}$$

On exprime un moment en *Nm* (newton mètre).

Avec *d* la longueur du bras de levier de $\vec{f}$ (***fig. 2.3.***) :

$$\boxed{d = \left\|\vec{PA}\right\|\sin\theta = \frac{\left\|\vec{m}_P(\vec{f})\right\|}{\left\|\vec{f}\right\|}}$$

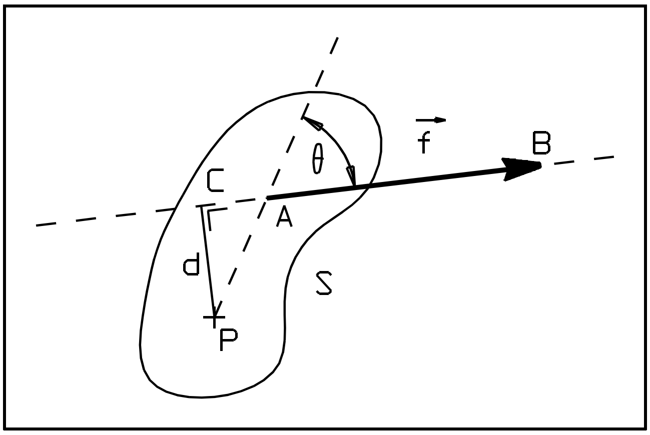

fig. 2.3. *- Moment de force.*

Remarques :

1) $\vec{m}_P(\vec{f})$ est indépendant de A : $\vec{f}$ peut être un vecteur *glissant*; donc on peut écrire, puisque le bras de levier reste constant :

$$\boxed{\vec{m}_P(\vec{f}) = \vec{PA}\times\vec{f} = \vec{PB}\times\vec{f} = \vec{PQ}\times\vec{f}}$$

Avec Q un *point quelconque* de la ligne d'action de $\vec{f}$.
En effet :

$$\vec{PQ}\times\vec{f} = \left(\vec{PA}+\vec{AQ}\right)\times\vec{f} = \vec{PA}\times\vec{f} + \underbrace{\vec{AQ}\times\vec{f}}_{=\vec{0}\ car\ \vec{AQ}\,//\,\vec{f}}$$

2) Comme $\vec{f} = \vec{AB} = \vec{AP} + \vec{PB}$ on peut écrire :

$$\vec{m}_P(\vec{f}) = \vec{PA}\times\vec{f} = \vec{PA}\times\left(\vec{AP}+\vec{PB}\right) = \vec{PA}\times\vec{PB}$$

3) le moment d'une force est toujours défini *par rapport à un point donné*; si on change ce point de référence, en général le moment de la force change;

4) $\vec{m}_P(\vec{f}) = \vec{0}$ si P est sur la ligne d'action de $\vec{f}$ ou si $\vec{f} = \vec{0}$

5) signification "*physique*" du moment :

$\vec{m}_P(f)$ est au mouvement de <u>rotation</u> ce que $\vec{f}$ est au mouvement de <u>translation</u> (***fig 2.4.***)

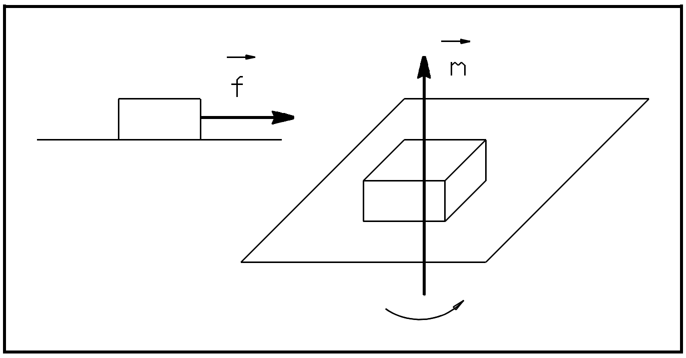

fig. 2.4. - Moment de force ⇒ rotation.

En effet, si une force $\vec{f}$ agit sur un solide S qui peut tourner autour d'un point P fixe (***fig. 2.3.***) et si la force ne passe pas par P, elle aura pour effet de faire tourner le corps autour de P. Ce mouvement de rotation sous l'action de $\vec{f}$ s'effectue autour d'un axe de rotation perpendiculaire au plan formé par la force $\vec{f}$ et le point P.

B) *<u>Expression analytique</u>*

Soit :

- une base orthonormée Oxyz;
- une force $\vec{f} = f_x\,\vec{1}_x + f_y\,\vec{1}_y + f_z\,\vec{1}_z$ appliquée en A (x_A; y_A; z_A) et d'extrémité B (x_B; y_B; z_B);
- un point P (x_P; y_P; z_P).

On obtient :

$$\vec{m}_P(f) = \underbrace{\begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ (x_A - x_P) & (y_A - y_P) & (z_A - z_P) \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}}_{=\,\overrightarrow{PA}\times\vec{f}} = \underbrace{\begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ (x_A - x_P) & (y_A - y_P) & (z_A - z_P) \\ (x_B - x_A) & (y_B - y_A) & (z_B - z_A) \end{vmatrix}}_{=\,\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{AB}}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ (x_A - x_P) & (y_A - y_P) & (z_A - z_P) \\ (x_B - x_P) & (y_B - y_P) & (z_B - z_P) \end{vmatrix}}_{=\,\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}}$$

et si P est situé en O :

$$\vec{m}_P(f) = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ x_A & y_A & z_A \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ x_A & y_A & z_A \\ (x_B - x_A) & (y_B - y_A) & (z_B - z_A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix}$$

C) *<u>Changement de centre de moment</u>*

Il s'agit de calculer $\vec{m}_{P'}(f)$ à partir de $\vec{m}_P(f)$ connu (***fig 2.5.***).

(Les distances d et d' sont perpendiculaires à la ligne d'action de $\vec{f}$)

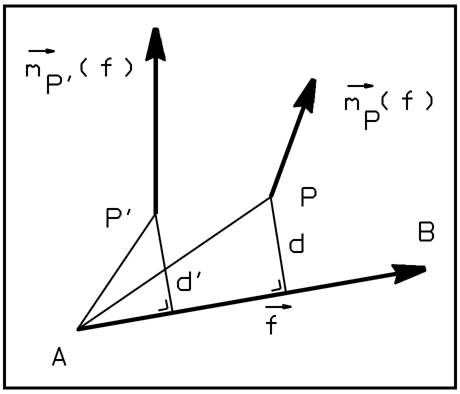

fig. 2.5. *- Changement de centre.*

On peut écrire : $\vec{m}_{P'}(f) = \overrightarrow{P'A} \times \vec{f} = \left(\overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PA}\right) \times \vec{f} = \overrightarrow{P'P} \times \vec{f} + \underbrace{\overrightarrow{PA} \times \vec{f}}_{=\vec{m}_P(f)}$

soit encore :

$$\begin{aligned}\vec{m}_{P'}(f) &= \vec{m}_P(f) + \overrightarrow{P'P} \times \vec{f} \\ &= \vec{m}_P(f) - \overrightarrow{PP'} \times \vec{f}\end{aligned}$$

En particulier, on peut écrire : $\vec{m}_P(f) = \vec{m}_O(f) - \overrightarrow{OP} \times \vec{f}$.

<u>Application 2.1.</u> Dans un plan orienté Oxy, une force $\vec{f}$ de 1000 N a pour ligne d'action la droite d'équation $2\,x - y - 1 = 0$ et est dirigée dans le sens des y positifs. $\vec{f}$ est appliquée en A (2; 3).
Déterminer $\vec{m}_P(f)$ de deux façons différentes, avec P (5; 2).

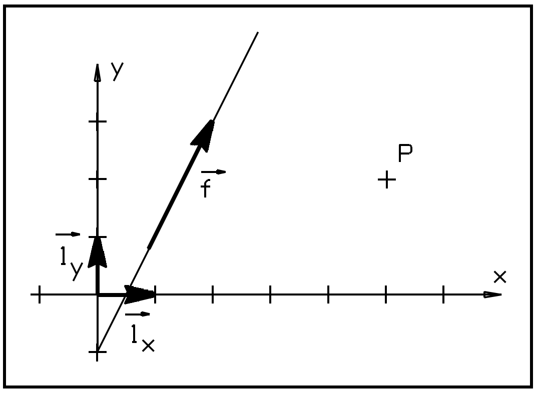

fig. 2.6. *- Application 2.1.*

Solution :

La ligne d'action de $\vec{f}$ *s'écrit* :

$$y = 2\,x - 1$$

et ainsi la pente de la droite est donnée par : $\alpha = \arctan 2 = 63.43\,°$.

L'expression analytique de $\vec{f}$ *s'écrit* :

$$\begin{aligned}\vec{f} &= 1000 \cos\alpha\ \vec{1}_x + 1000 \sin\alpha\ \vec{1}_y \\ &= 447.2\ \vec{1}_x + 894.4\ \vec{1}_y\end{aligned}$$

Le moment vaut, par définition :

$$\vec{m}_P(\vec{f}) = \overrightarrow{PA} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ (x_A - x_P) & (y_A - y_P) & (z_A - z_P) \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ (2-5) & (3-2) & 0 \\ 447.2 & 894.4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\,3130.4\,\vec{1}_z$$

En utilisant la formule de *changement de centre de moment*, on trouve :

$$\vec{m}_P(\vec{f}) = \vec{m}_O(\vec{f}) - \overrightarrow{OP} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 2 & 3 & 0 \\ 447.2 & 894.4 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 5 & 2 & 0 \\ 447.2 & 894.4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\,3130.4\,\vec{1}_z$$

2.2.3. Moment d'une force par rapport à un axe

Lorsqu'un solide est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe, il est intéressant de ne considérer que la partie utile du moment d'une force, celle qui effectivement sera utile à la rotation du solide.

Par exemple une barrière triangulaire peut tourner autour de ses gonds A et B (la droite verticale les joignant constitue l'axe de rotation de la porte, dans ce cas-ci l'axe z) sous l'action d'une force $\vec{f}$ quelconque appliquée au point M. (Voir fig 2.7.).

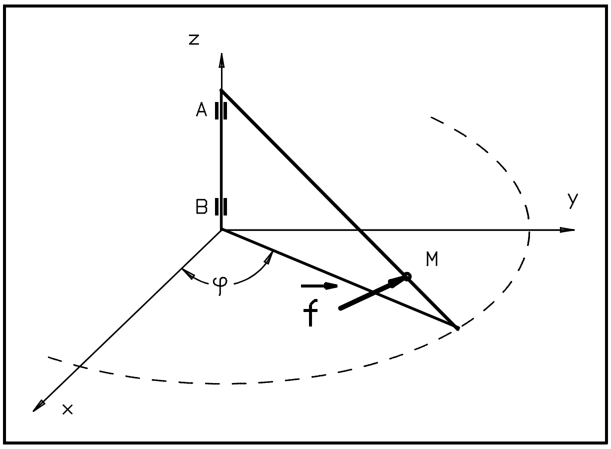

fig. 2.7. *- Moment par rapport à un axe de rotation.*

Dans ce cas, il est intéressant de connaître l'intensité du moment de cette force $\vec{f}$, d'en connaître "l'efficacité".

A) *Définitions*

1) *Le moment de* $\vec{f}$ par rapport à un axe *a* est la projection sur cet axe *a* du moment de la force par rapport à un point quelconque P de l'axe (***fig. 2.8.***).

2) Autre approche : *Le moment de* $\vec{f}$ par rapport à un axe *a* est le moment de la projection de $\vec{f}$ sur un plan π perpendiculaire à l'axe *a*, par rapport au point P de percée de cet axe dans le

plan π.

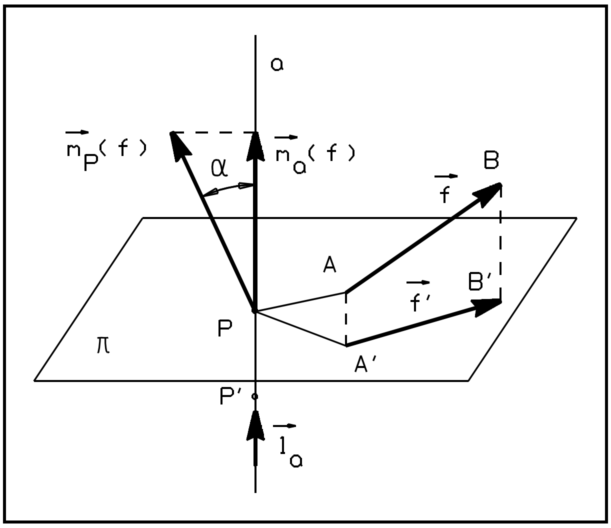

fig. 2.8. *- Moment de force par rapport à un axe.*

Ce moment $\vec{m}_a(f)$ est ainsi un vecteur *aligné* avec l'axe *a*.

B) Expression vectorielle

En appliquant la *première définition*, nous avons :

$$\boxed{\vec{m}_a(f) = \left(\vec{m}_P(f) \bullet \vec{1}_a\right)\vec{1}_a}$$

En effet, nous avons, pour sa projection (P étant un point de la ligne d'action de l'axe *a*) :

$$m_a(f) = \left\|\vec{m}_P(f)\right\|\cos\alpha = \left\|\vec{m}_P(f)\right\|\left\|\vec{1}_a\right\|\cos\alpha = \vec{m}_P(f) \bullet \vec{1}_a = \left(\vec{PA} \times \vec{f}\right) \bullet \vec{1}_a$$

et donc : $\boxed{\vec{m}_a(f) = projection \times direction = \left[\left(\vec{PA} \times \vec{f}\right) \bullet \vec{1}_a\right]\vec{1}_a}$

Concernant *l'autre approche* nous avons que le moment d'une force $\vec{f}$ par rapport à l'axe *a* est égal au moment de la projection $\vec{f}'$ de la force sur un plan π perpendiculaire à l'axe *a*, par rapport au point de percée P de l'axe *a* sur ce plan (voir ***fig. 2.8.***) :

$$\boxed{\vec{m}_a(f) = \vec{m}_P(f')}$$

En effet :

$$\left\|\vec{m}_a(f)\right\| = \left\|\vec{m}_P(f)\right\|\cos\alpha$$

or : $\left\|\vec{m}_P(f)\right\| = \left\|\vec{PA}\right\|\left\|\vec{f}\right\|\sin\theta$ avec θ l'angle entre les directions positives de $\vec{PA}$ et de $\vec{f}$.

Cela représente la surface d'un parallélogramme de base $\left\|\vec{PA}\right\|$ et de hauteur $\left\|\vec{f}\right\|\sin\theta$. D'où :

$$\left\| \vec{m}_P(f) \right\| = 2 \times aire\,\Delta\,\overline{PAB}$$

et comme les surfaces $\overline{PAB}$ et $\overline{PA'B'}$ ont entre elles le même angle α que leur normale respective, on a : $aire\,\Delta\,\overline{PA'B'} = aire\,\Delta\,\overline{PAB} \times \cos\alpha$ ce qui revient à démontrer l'égalité encadrée.

Remarques :

1) $\vec{m}_a(f)$ est un vecteur glissant sur l'axe a;

2) $\vec{m}_a(f) = \vec{0}$ si la ligne d'action de $\vec{f}$ rencontre l'axe a (autrement dit : $\overrightarrow{PA} \times \vec{f} \perp$ à l'axe a)

ou si la ligne d'action de $\vec{f}$ est parallèle à l'axe a (rencontre l'axe à l'∞)

3) Le moment d'une force par rapport à un axe est indépendant du point choisi sur la droite.

Démonstration (voir ***fig. 2.8.***) :

Soit P et P' deux points appartenant à l'axe a.

$$\vec{m}_a(f) = \left[\left(\overrightarrow{PA} \times \vec{f}\right) \bullet \vec{1}_a\right]\vec{1}_a \stackrel{?}{=} \left[\left(\overrightarrow{P'A} \times \vec{f}\right) \bullet \vec{1}_a\right]\vec{1}_a$$

$$= \left[\left(\left(\overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PA}\right) \times \vec{f}\right) \bullet \vec{1}_a\right]\vec{1}_a$$

$$= \left[\underbrace{\overbrace{\left(\overrightarrow{P'P} \times \vec{f}\right)}^{\perp\, à\, \vec{1}_a} \bullet \vec{1}_a}_{=0} + \left(\overrightarrow{PA} \times \vec{f}\right) \bullet \vec{1}_a\right]\vec{1}_a \quad cqfd$$

Application 2.2. Dans un mécanisme, une poulie de rayon $r = 0.2\ m$, montée sur un arbre $\overline{OP}$, est centrée en A (0; 0.12; 0) d'un espace orienté Oxyz. Elle est parallèle au plan Ozx. Une force $\vec{f}$ (courroie) de 1000 N lui est appliquée en un point B, tangentiellement, de telle sorte que l'angle $\angle\,\overline{BCA}$ vaut $\pi/6$ ($\overline{CA}$ dans ce situe dans le plan Oxy). Calculer le moment de $\vec{f}$ par rapport à l'axe de rotation y.

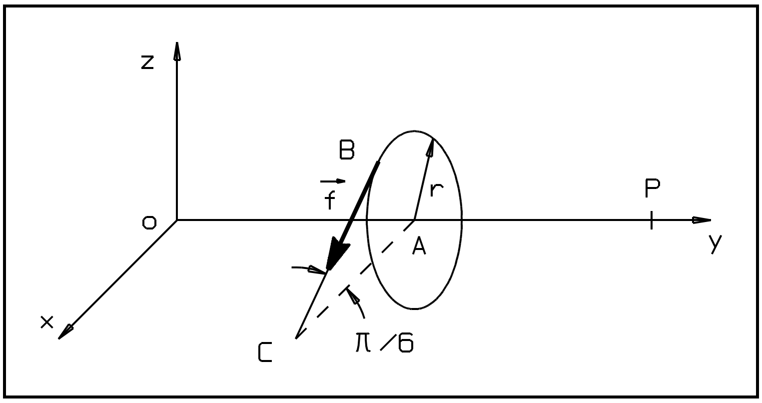

fig. 2.9. - Application 2.2.

Solution :

Expression vectorielle de $\vec{f}$

$$\vec{f} = 1000\cos 30\,\vec{1}_x + 0\,\vec{1}_y - 1000\sin 30\,\vec{1}_z$$

$$= 500\sqrt{3}\,\vec{1}_x + 0\,\vec{1}_y - 500\,\vec{1}_z$$

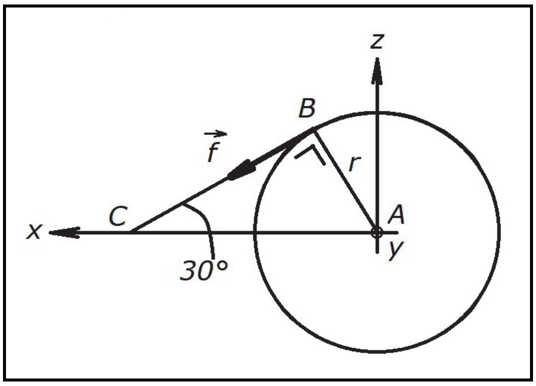

fig. 2.10. - Projection dans le plan Oxz.

Coordonnées d'un point de la ligne d'action de $\vec{f}$

Soit C : $(r/\sin 30°\,;0.12;0) \equiv (0.4;\,0.12;\,0)$

Appliquons la formule générale

Prenons A comme point de la ligne d'action de l'axe y, la formule générale devient :

$$\vec{m}_y(f) = \left(\vec{m}_A(f) \bullet \vec{1}_y\right)\vec{1}_y$$

$$= \left(\left(\vec{AC} \times \vec{f}\right) \bullet \vec{1}_y\right)\vec{1}_y = \begin{vmatrix} 0.4 & 0.12 & 0 \\ 500\sqrt{3} & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{1}_y = 200\,\vec{1}_y$$

Autre manière : Force x Bras de levier

Dans ce cas-ci, pour ceux qui visualise bien le problème, on aurait pu aussi faire :

$$\left\|\vec{m}_y(f)\right\| = \left\|\vec{f}\right\| d$$

Avec d distance entre la ligne d'action de $\vec{f}$ et l'axe y, soit ici $d = r$. Et donc :

$$\left\|\vec{m}_y(f)\right\| = 1000 \times 0.2 = 200\ N$$

Application 2.3. Dans un espace orienté Oxyz, déterminer le moment de la force $\vec{f}$ par rapport à l'axe a sachant que :

- la ligne d'action de $\vec{f}$ est parallèle à l'axe Oz, dans le sens des z croissants;
- le module de $\vec{f}$ est de 5000 N et $\vec{f}$ est appliquée en A (1; 2; 3);
- l'axe a est l'intersection de deux plans : $\pi_1 \equiv x = y$ et $\pi_2 \equiv y = z$.

Solution :

$\vec{f} = 5000\,\vec{1}_z$ appliquée en A (1; 2; 3); l'axe a est "*bis-secteur*" du trièdre, donc $\alpha = \beta = \gamma$.

Recherche du vecteur unitaire $\vec{1}_a$

<u>*1ère méthode*</u>

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

avec : $\alpha = \beta = \gamma$

$$\Rightarrow \quad 3\cos^2\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Le vecteur unitaire $\vec{1}_a$ est donc :

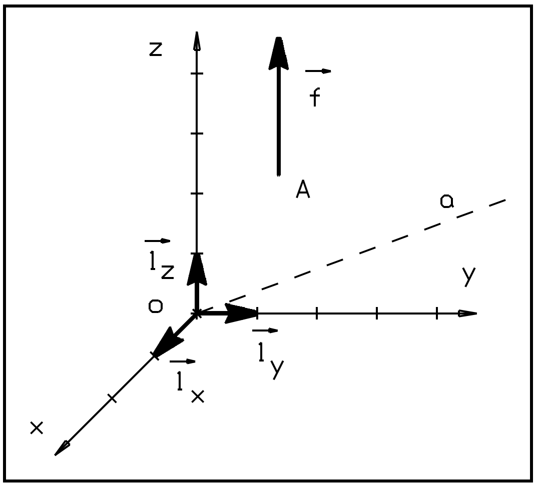

fig. 2.11. - Application 2.3.

$$\vec{1}_a = \cos\alpha\,\vec{1}_x + \cos\beta\,\vec{1}_y + \cos\gamma\,\vec{1}_z$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{1}_x + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{1}_y + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{1}_z$$

<u>*2ième méthode*</u>

$$\vec{1}_a = \frac{\overrightarrow{MN}}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|}$$ M et N étant deux points quelconques de la ligne d'action de l'axe *a*.

<u>*Remarque*</u> :

Comme $\vec{f}$ est dans le sens des z croissants, il faut choisir les points de telle manière que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ le soi aussi.

Soit M (0; 0; 0) et N (1; 1; 1) $\Rightarrow$ $\vec{1}_a = \dfrac{\vec{1}_x + \vec{1}_y + \vec{1}_z}{\sqrt{3}}$

Recherche du moment

$$m_a(f) = \vec{m}_O(f) \bullet \vec{1}_a = \left(\overrightarrow{OA} \times \vec{f}\right) \bullet \vec{1}_a = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5000 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{5000}{\sqrt{3}}$$ et donc :

$$\vec{m}_a(f) = m_a(f)\,\vec{1}_a = \frac{5000}{3}\vec{1}_x + \frac{5000}{3}\vec{1}_y + \frac{5000}{3}\vec{1}_z$$

C) <u>*Expression analytique*</u>

Pour la facilité, nous prendrons le point P de la définition comme origine d'une base orthonormée. Soit $P \equiv O$ (***fig. 2.12***.).

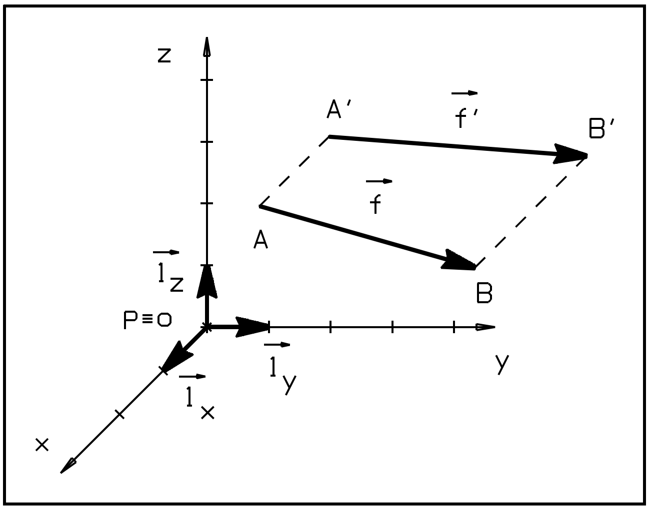

fig. 2.12. *- Moment par rapport au point O.*

Si on cherche le moment de $\vec{f}$ par rapport à l'axe Ox, on peut écrire : $\vec{m}_{Ox}(f) = \vec{m}_O(f')$ (2ième définition d'un moment par rapport à un axe) où $\vec{f}' = \overrightarrow{A'B'}$ représente la projection de $\vec{f}$ dans le plan

Oyz ($\vec{f}\,'$ appartient au plan Oyz) et ainsi :

$$\vec{m}_O\left(f'\right) = \overrightarrow{OA'} \times \vec{f}\,' = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 0 & y_A & z_A \\ 0 & f_y & f_z \end{vmatrix} = \left(y_A\ f_z - z_A\ f_y\right)\vec{1}_x = \vec{m}_{Ox}\left(f\right)$$

De même, on démontrerait : $\vec{m}_{Oy}\left(f\right) = \left(z_A\ f_x - x_A\ f_z\right)\vec{1}_y$ et $\vec{m}_{Oz}\left(f\right) = \left(x_A\ f_y - y_A\ f_x\right)\vec{1}_z$ ce qui donne la relation fondamentale : $\vec{m}_O\left(f\right) = \vec{m}_{Ox}\left(f\right) + \vec{m}_{Oy}\left(f\right) + \vec{m}_{Oz}\left(f\right)$

$$\boxed{\vec{m}_O\left(f\right) = m_{Ox}\left(f\right)\vec{1}_x + m_{Oy}\left(f\right)\vec{1}_y + m_{Oz}\left(f\right)\vec{1}_z}$$