20.01. Les forces ci-contre $\vec{f}_1$ à $\vec{f}_8$ se trouvent dans le plan orienté Oxy. Pour chaque force $\vec{f}_i$, calculer $\vec{m}_O(f_i)$ et $\vec{m}_P(f_i)$, avec P (5; 2).

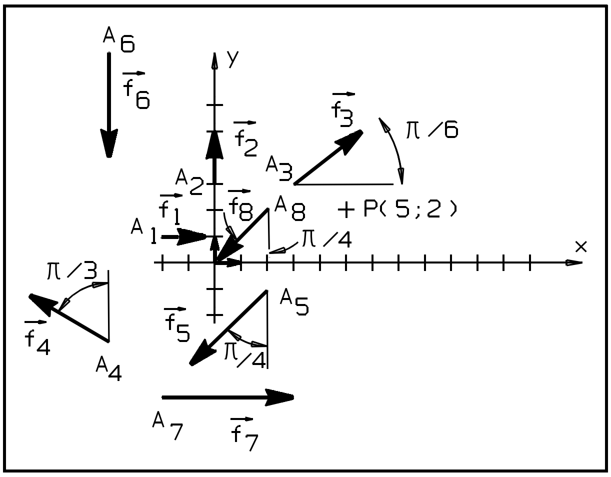

fig. 2ex. - 20.01.

i	$\lVert\vec{f}_i\rVert$ [*N*]	A_i (x_i; y_i) [*cm*]	$\vec{m}_O(f_i)$	$\vec{m}_P(f_i)$
1	10	(−2; 1)		
2	20	(0; 3)		
3	30	(3; 3)		
4	40	(−4; −3)		
5	50	(2; −1)		
6	40	(−4; 8)		
7	50	(−2; −5)		
8	30	(2; 2)		

Réponses : Tous les résultats sont en $\vec{1}_z$

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\vec{m}_O(f_i)$	-10	0	-32.94	-183.92	-106.07	160	250	0
$\vec{m}_P(f_i)$	10	-100	-55.98	-353.21	0	360	350	63.64

20.02. Les forces $\vec{f}_1$ à $\vec{f}_8$ sont dans le plan Oxy; $\alpha = \pi/4$; $\beta = \pi/6$; $\gamma = \pi/9$. Compléter le tableau ci-dessous (axes gradués en *cm*).

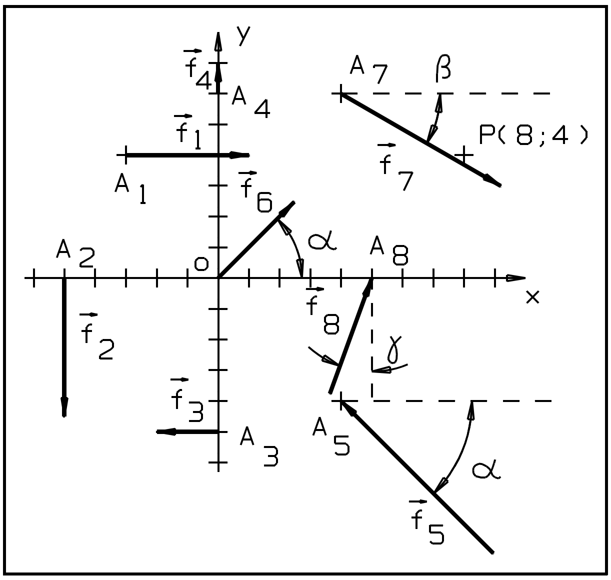

fig. 2ex. - 20.02.

i	$\lVert\vec{f}_i\rVert$ [*N*]	A_i (x_i; y_i) [*cm*]	$\vec{m}_O(f_i)$	$\vec{m}_P(f_i)$
1	40	(−3; 4)		
2	50	(−5; 0)		
3	20	(0; −5)		
4	40	(0; 6)		
5	75	(4; −4)		
6	35	(0; 0)		
7	60	(4; 6)		
8	40	(5; 0)		

<u>*Réponses*</u> : Tous les résultats sont en $\vec{1}_z$

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\vec{m}_O(f_i)$	-160	250	-100	0	0	0	-431	188
$\vec{m}_P(f_i)$	0	650	-180	-320	-636	-99	16.08	-58

20.03. Les forces $\vec{f}_1$ à $\vec{f}_8$ sont dans le plan Oxy; Pour chaque force $\vec{f}_i$, calculer $\vec{m}_O(f_i)$ et $\vec{m}_P(f_i)$, avec P (2; 3). ($\tan\alpha = 2/3$; $\tan\beta = 1$; $\tan\gamma = 4/3$).

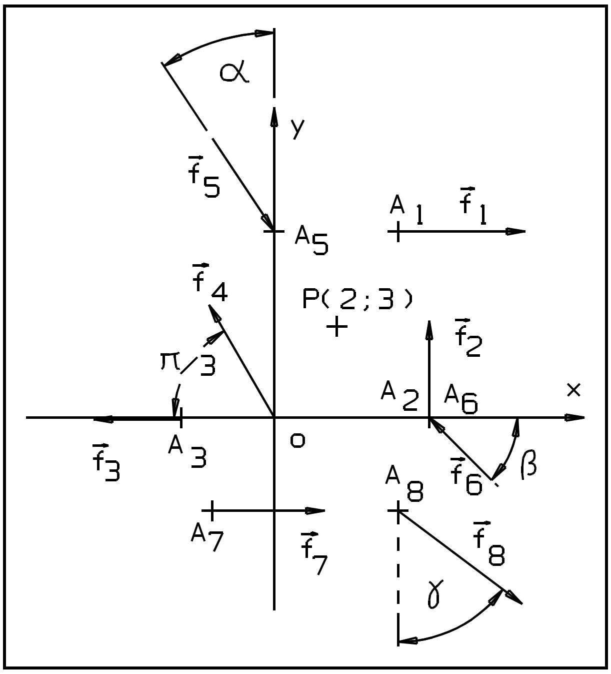

fig. 2ex. *- 20.03.*

i	$\Vert\vec{f}_i\Vert$ [N]	A_i (x_i; y_i) [cm]	$\vec{m}_O(f_i)$	$\vec{m}_P(f_i)$
1	40	(4; 6)		
2	30	(5; 0)		
3	20	(−3; 0)		
4	40	(0; 0)		
5	$\sqrt{1300}$	(0; 6)		
6	28.3	(5; 0)		
7	35	(−2; −3)		
8	50	(4; −3)		

<u>*Réponses*</u> : Tous les résultats sont en $\vec{1}_z$

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\vec{m}_O(f_i)$	-240	150	0	0	-120	100	105	0
$\vec{m}_P(f_i)$	-120	90	-60	-129	0	0	210	180

20.04. Les forces $\vec{f}_1$ à $\vec{f}_8$ sont dans le plan Oxy; $\alpha = 45°$; $\beta = 130°$; $\gamma = 21°$; P (2; 2). Compléter le tableau ci−dessous (axes gradués en *cm*).

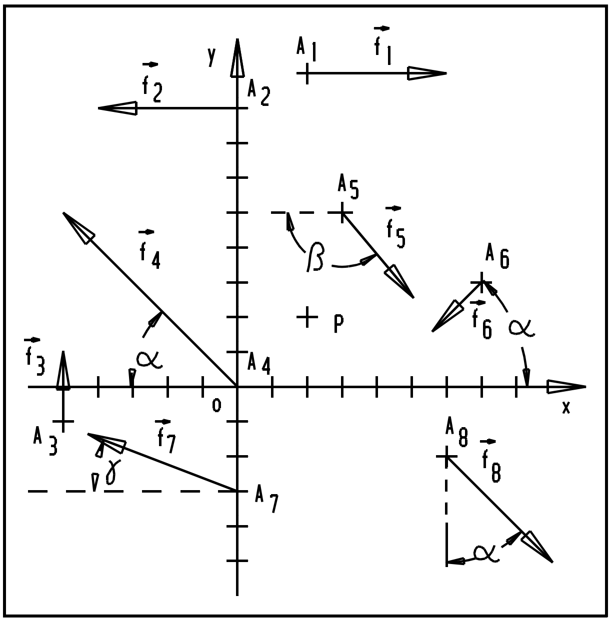

fig. 2ex. - *20.04.*

i	$\|\vec{f}_i\|$ [*N*]	A_i (x_i; y_i) [*cm*]	$\vec{m}_O(f_i)$	$\vec{m}_P(f_i)$
1	40	(2; 9)		
2	40	(0; 8)		
3	20	(−5; −1)		
4	$\sqrt{50}$	(0; 0)		
5	32	(3; 5)		
6	$\sqrt{18}$	(7; 3)		
7	52.3	(0; −3)		
8	1.72	(6; −2)		

Réponses : Tous les résultats sont en $\vec{1}_z$

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\vec{m}_O(f_i)$	-360	320	-100	0	-176	-12	-146	-4.86
$\vec{m}_P(f_i)$	-280	240	-140	-20	-86	-12	-282	0

20.05 Une force de 10 *N* est située dans un plan horizontal Oxy, sur une ligne d'action : $3\,x + 2\,y - 12 = 0$. Elle est dirigée vers les y positifs. Calculer son moment par rapport à O et par rapport à P (5; 5).

Réponses : $\vec{m}_O(f) = +\,33.3\,\vec{1}_z$ $\vec{m}_P(f) = -\,36.1\,\vec{1}_z$

20.06. Une force $\vec{f}$ est située dans un plan vertical orienté **Ozx**; elle a pour expression $\vec{f} = 5\,\vec{1}_x - 2\,\vec{1}_z$ et est appliquée en A (3; 1). Calculer son moment par rapport à O et par rapport à P (4; 3) dans le plan Ozx.

Réponses : $\vec{m}_O(f) = +\,17\,\vec{1}_y$ $\vec{m}_P(f) = -\,9\,\vec{1}_y$

20.07. Une force $\vec{f}$ de 100 *N*, située dans un plan orienté Oyz, fait un angle de + 120° avec Oy. Calculer son moment par rapport à P (−4; 0) et à P' (2; 2), sachant que $\vec{f}$ passe par le point O.

Réponses : $\vec{m}_P(f) = 346.4\,\vec{1}_x$ $\vec{m}_{P'}(f) = -\,273.2\,\vec{1}_x$

20.08. La ligne d'action d'une force $\vec{f}$ de 60 N dans un espace orienté Oxyz est définie par les deux plans $\pi_1 \equiv 2\,y + 3\,x - 12 = 0$ et $\pi_2 \equiv z = 5$.

Son sens est celui des x positifs ($\left\|\vec{1}_x\right\| = \left\|\vec{1}_y\right\| = \left\|\vec{1}_z\right\| = 1\,cm$ pour les longueurs).

a) Calculer son moment par rapport à O et par rapport aux trois axes.
b) Calculer son moment par rapport à un axe a, parallèle à Oz et passant par le point D (5; 5; 0)

Réponses :

a) $\vec{m}_{Ox}(f) = 250\,\vec{1}_x$; $\vec{m}_{Oy}(f) = 166.5\,\vec{1}_y$; $\vec{m}_{Oz}(f) = -\,200\,\vec{1}_z$

$\left\|\vec{m}_O(f)\right\| = 360\ Ncm$

b) $\vec{m}_a(f) = 216\,\vec{1}_z \quad \left(\left\|\vec{1}_z\right\| = 1\ Ncm\right)$

20.09. Dans un plan orienté Oxy, une force $\vec{f}$ de 18 N a pour ligne d'action la droite d'équation $3\,y - 4\,x - 12 = 0$ et est dirigée dans le sens des y positifs. Représenter cette force et déterminer son moment par rapport à l'origine O (0; 0) et par rapport au point P (4; −5) (2 méthodes différentes).

Réponses : $\vec{m}_O(f) = -\,43.2\,\vec{1}_z \qquad \vec{m}_P(f) = -\,154.8\,\vec{1}_z$

20.10. Dans un plan orienté Oxy, une force $\vec{f}$ de 1000 N a pour ligne d'action la droite d'équation $2\,x - y - 1 = 0$ et est dirigée dans le sens des y positifs.

Représenter cette force. Déterminer $\vec{m}_P(f)$ avec P (−2; −5). Vérifier ce résultat par la formule de changement de centre de moment.

Réponse : $\vec{m}_P(f) = \vec{0}$

20.11. Une force $\vec{f}$ de 100 N (dirigée vers les y positifs) est parallèle à l'axe Oy dans un espace orienté Oxyz. Sa ligne d'action passe par le point A (4; 0; 6). Calculer son moment par rapport aux 3 axes.

Réponses : $\vec{m}_{Ox}(f) = -\,600\,\vec{1}_x \qquad \vec{m}_{Oy}(f) = \vec{0} \qquad \vec{m}_{Oz}(f) = +\,400\,\vec{1}_z$

20.12. Une force $\vec{f}$ de 20 N est parallèle à Oz (sens des z décroissants); elle est appliquée en A (3; 3; 3). Déterminer $\vec{m}_{Ox}(f)$, $\vec{m}_{Oy}(f)$, $\vec{m}_{Oz}(f)$ et $\vec{m}_O(f)$; calculer $\vec{m}_P(f)$ pour P (5; 5; 5) par deux méthodes différentes.

Réponses : $\vec{m}_O(f) = -\,60\,\vec{1}_x + 60\,\vec{1}_y + 0\,\vec{1}_z$; $\vec{m}_P(f) = 40\,\vec{1}_x - 40\,\vec{1}_y$

20.13. Une force $\vec{f}$ de 212 N est représentée dans un espace orienté Oxyz par un vecteur dont l'origine est A (−2; 6; 3) et l'extrémité B (1; 2; −2) (Unité de longueur = 1 cm). A quelle échelle $\vec{f}$ est-elle représentée ? Calculer le moment de $\vec{f}$ par rapport à Ox, Oy, Oz, O et P (0; 8; 0).

Réponses : Echelle : 1 cm ÷ 30 N

$\vec{m}_{Ox}(f) = -\,540\,\vec{1}_x$; $\vec{m}_{Oy}(f) = -\,30\,\vec{1}_y$; $\vec{m}_{Oz}(f) = -\,300\,\vec{1}_z$

$$\left\|\vec{m}_O(f)\right\| = 618.5\ Ncm \qquad \left\|\vec{m}_P(f)\right\| = 782.9\ Ncm$$

20.14. Dans le système d'axes Oxy ci-contre, on donne $\left\|\vec{f}\right\| = 100\ N$ et $\alpha = 26.56°$.

a) Ecrire l'équation de la ligne d'action de $\vec{f}$.
b) Calculer ("géométriquement" ou "trigonométriquement") la distance de P à cette ligne d'action.
c) Calculer $\vec{m}_P(f)$ à partir de b).
d) Vérifier en calculant $\vec{m}_P(f)$ par déterminant.

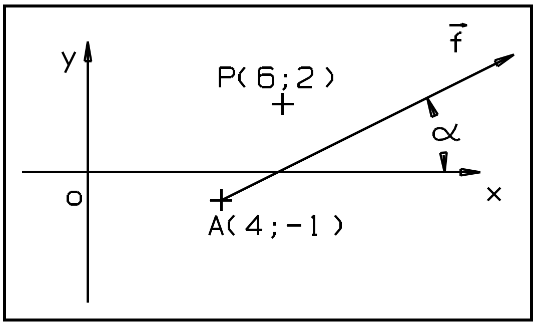

fig. 2ex. - 20.14.

Réponses : a) $y = 0.5\,x - 3$ b) $d = 1.79\ cm$ c) et d) $\vec{m}_P(f) = 179\ \vec{1}_z$

20.15. La poutre $\overline{AB}$ de 10 m de longueur repose sur deux appuis A et B. Elle est soumise à une force $\vec{f}$ de 1000 N. Calculer le moment de $\vec{f}$ par rapport aux points A et B.

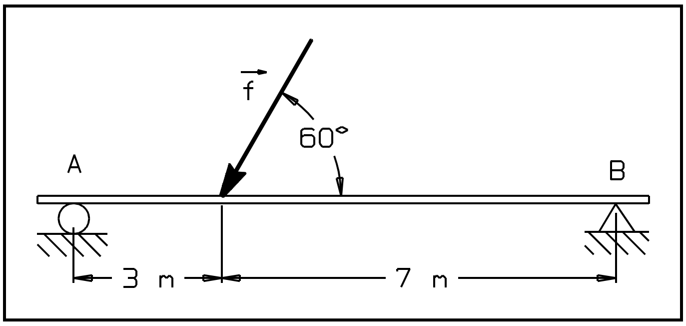

fig. 2ex. - 20.15.

Réponses : $\left\|\vec{m}_A(f)\right\| = 2\,598\ Nm \qquad \left\|\vec{m}_B(f)\right\| = 6\,062\ Nm$

20.16. Une force $\vec{f}$ de 10 N, parallèle à Oy (sens des y décroissants), est appliquée en A (4; 5; 5). Déterminer $\vec{m}_{Ox}(f)$, $\vec{m}_{Oy}(f)$, $\vec{m}_{Oz}(f)$ et $\vec{m}_O(f)$. Par changement de centre de moment, déterminer $\vec{m}_P(f)$ pour P (4; 5; 0).

Réponses : $\vec{m}_O(f) = \underbrace{50\,\vec{1}_x}_{\vec{m}_{Ox}(f)} + \underbrace{0\,\vec{1}_y}_{\vec{m}_{Oy}(f)} - \underbrace{40\,\vec{1}_z}_{\vec{m}_{Oz}(f)}$

20.17. Le levier $\overline{BAC}$ est soumis aux deux forces extérieures $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$. $\overline{AC} = 13.9\ cm$ et $\overline{AB} = 28.3\ cm$. La norme de la force $\vec{f}_1$ vaut 1000 N. Calculer la norme du moment de $\vec{f}_1$ par rapport à A. Que vaut $\left\|\vec{f}_2\right\|$ si son moment par rapport à A est opposé à $\vec{m}_A(f_1)$?

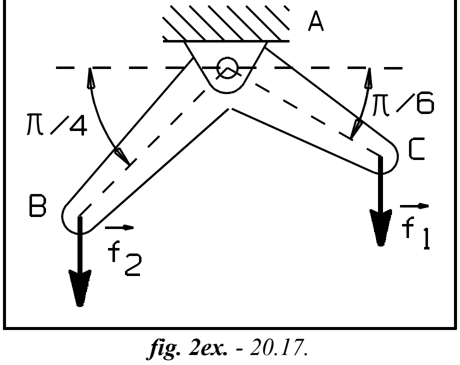

fig. 2ex. - 20.17.

<u>*Réponses*</u> : $\left\|\vec{m}_A(f_1)\right\| = 120.4\ Nm \qquad \left\|\vec{f}_2\right\| = 601.6\ N$

20.18. Dans un mécanisme, une poulie de rayon $r = 20\,cm$, montée sur un arbre $\overline{OP}$, est centrée en A (0; 120; 0) d'un espace orienté Oxyz. Elle est parallèle au plan Ozx.
Une force $\vec{f}$ (courroie) de 1000 N lui est appliquée en un point B, tangentiellement, de telle sorte que l'angle $\angle\,\overline{BCA}$ vaut $\pi/6$ ($\overline{CA}$ dans Oxy) ($\left\|\vec{1}_x\right\| = \left\|\vec{1}_y\right\| = \left\|\vec{1}_z\right\| = 1\,cm$).

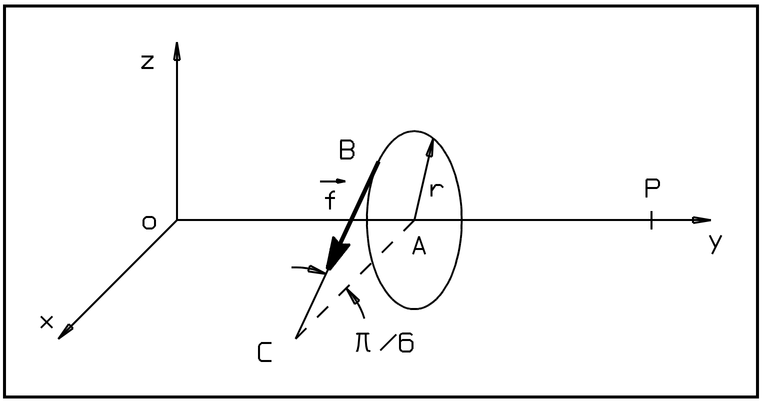

fig. 2ex. - 20.18.

Calculer le moment de $\vec{f}$ par rapport aux trois axes, par rapport à O et à P (0; 200; 0).

<u>*Réponses*</u> : $\vec{m}_{Ox}(f) = -\,600\,\vec{1}_x \qquad \vec{m}_{Oy}(f) = 200\,\vec{1}_y \qquad \vec{m}_{Oz}(f) = -\,1039\,\vec{1}_z$

$\left\|\vec{m}_O(f)\right\| = 1216.5\ Nm \qquad \left\|\vec{m}_P(f)\right\| = 824.6\ Nm$

20.19. Une force $\vec{f}$ de 20 N est parallèle à Ox (sens des x décroissants); elle est appliquée en A (3; 3; 3) (les distances sont mesurées en cm). Déterminer $\vec{m}_{Ox}(f)$, $\vec{m}_{Oy}(f)$, $\vec{m}_{Oz}(f)$ et $\vec{m}_O(f)$; calculer $\vec{m}_P(f)$ pour P (6; 6; 6), par deux méthodes différentes.

<u>*Réponses*</u> : $\vec{m}_O(f) = \underbrace{0\,\vec{1}_x}_{\vec{m}_{Ox}(f)} - \underbrace{60\,\vec{1}_y}_{\vec{m}_{Oy}(f)} + \underbrace{60\,\vec{1}_z}_{\vec{m}_{Oz}(f)}\ ;\ \vec{m}_P(f) = 60\,\vec{1}_y - 60\,\vec{1}_z$

20.20. Dans un système d'axes Oxyz, une force $\vec{f}$ est appliquée en A (0; 1; 0) (les axes étant gradués en cm). Ses composantes sont $f_x = 10\ N$, $f_y = 20\ N$, $f_z = 30\ N$.
Déterminer $\vec{m}_{Ox}(f)$, $\vec{m}_{Oy}(f)$, $\vec{m}_{Oz}(f)$ et $\vec{m}_O(f)$. Par changement de centre de moment, déterminer $\vec{m}_P(f)$, pour P (1; 1; 2). Vérifier le résultat par une autre méthode.

<u>*Réponses*</u> : $\vec{m}_O(f) = \underbrace{30\,\vec{1}_x}_{\vec{m}_{Ox}(f)} + \underbrace{0\,\vec{1}_y}_{\vec{m}_{Oy}(f)} - \underbrace{10\,\vec{1}_z}_{\vec{m}_{Oz}(f)}\ ;\ \vec{m}_P(f) = 40\,\vec{1}_x + 10\,\vec{1}_y - 20\,\vec{1}_z$

20.21. Dans un espace orienté Oxyz, le moment par rapport à l'origine d'une force $\vec{f}$ appliquée en A (0; 3; 3) vaut $\vec{m}_O(f) = -\,12\,000\,\vec{1}_x$. On sait que $\left\|\vec{f}\right\| = 5099\ N$. Quelle est cette force ? Que vaudra le moment de cette force par rapport à l'axe d d'équations $\pi_1 \equiv x = 2$ et $\pi_2 \equiv y = 0$?

<u>*Réponses*</u> : $\vec{f}_1 = 5000\,\vec{1}_y + 1000\,\vec{1}_z \quad ou \quad \vec{f}_2 = -\,1000\,\vec{1}_y - 5000\,\vec{1}_z$

$$\vec{m}_d(f_1) = -10000\,\vec{1}_z \quad ou \quad \vec{m}_d(f_2) = 2\,000\,\vec{1}_z$$

20.22. Soit un espace orienté Oxyz dans lequel se situent deux forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ et , définies par :

$\vec{f}_1$: A_1 (0; 2; 0) ; $f_{1x} = 4$, $f_{1y} = 2$, $f_{1z} = 0$;

$\vec{f}_2$: A_2 (2; 0; 0) ; B_2 (0; 2; 0).

Déterminer :

a) le moment de $\vec{f}_1$ par rapport à O;

b) le moment de $\vec{f}_1$ par rapport à S (4; 7; 0), par deux méthodes différentes;

c) la distance entre la ligne d'action de $\vec{f}_1$ et le point S;

d) un point T tel que $\vec{m}_S(f_1) = \vec{m}_T(f_2)$.

Réponses : a) $\vec{m}_O(f) = -8\,\vec{1}_z$ b) $\vec{m}_S(f) = 12\,\vec{1}_z$ c) $d = 2.68$ *unités*

d) $T(-1+2\,m; -3-2\,m; 0)$ ou $y_T = -4 - x_T$

20.23. Dans un espace orienté Oxyz, déterminer le moment de la force $\vec{f} = 5000\,\vec{1}_y + 1000\,\vec{1}_z$ par rapport aux axes Ox, Oy, Oz et *d*, sachant que la ligne d'action de $\vec{f}$ passe par A (0; 3; 3) et que l'axe *d* a pour équations $\pi_1 \equiv x = 2$ et $\pi_2 \equiv y = 0$.

Réponse : $\vec{m}_d(f) = -10000\,\vec{1}_z$

20.24. Soit la force $\vec{f} = 5\,\vec{1}_x - 3\,\vec{1}_y + 2\,\vec{1}_z$, appliquée en A (2; 1; 5). Trouver les coordonnées d'un point P tel que $\vec{m}_P(f) = -\vec{m}_O(f)$. Déterminer le moment de $\vec{f}$ par rapport à l'axe *a*, cet axe étant défini par l'intersection des deux plans $\pi_1 \equiv x = y$ et $\pi_2 \equiv x = 1$.

Réponse : $\vec{m}_a(f) = -3\,\vec{1}_z$

20.25. Une force $\vec{f}$ est caractérisée par les informations suivantes : elle appartient au plan π_1 d'équation $\pi_1 \equiv z = 5$; angle avec l'axe *x*, $\alpha = \pi/6$; $\|\vec{f}_x\| = 2\sqrt{3}\ N$; sens des *y* croissants; appliquée en A (1; 1; 5). Déterminer :

a) l'expression analytique de cette force;

b) les angles β et γ que forme $\vec{f}$ avec les axes *y* et *z*;

c) les coordonnées d'un point P tel que $\vec{m}_P(f) = -\vec{m}_O(f)$;

d) le moment de $\vec{f}$ par rapport à l'axe *a*, cet axe étant déterminé par l'intersection des deux plans $\pi_2 \equiv x = -1$ et $\pi_3 \equiv y = 1$.

Réponses : a) $\vec{f} = 2\sqrt{3}\,\vec{1}_x + 2\,\vec{1}_y + 0\,\vec{1}_z$ b) $\beta = \pi/3 \quad \gamma = \pi/2$

c) P (2; 2; 10) d) $\vec{m}_a(f) = 4\,\vec{1}_z$

20.26. La ligne d'action d'une force $\vec{f}$ de 500 *N* est définie par les équations :

$\pi_1 \equiv 0.8\,x + 0.625\,y + z = 5$ et $\pi_2 \equiv z = 3$

La force est orientée vers les y négatifs. Calculer :

a) ses moments par rapport aux trois axes Ox, Oy et Oz;
b) son moment par rapport à l'origine;
c) son moment par rapport au point P (4; 6; 8);
d) son moment par rapport à la droite d définie par les équations $\pi_3 \equiv x = y$ et $\pi_4 \equiv z = 0$.

<u>*Réponses*</u> : a) et b) $\vec{m}_O(f) = 1182\,\vec{1}_x + 923\,\vec{1}_y - 985\,\vec{1}_z$

c) $\vec{m}_P(f) = -1970\,\vec{1}_x - 1539\,\vec{1}_y + 2435\,\vec{1}_z$ d) $\vec{m}_d(f) = 1053\,\vec{1}_x + 1053\,\vec{1}_y$

<u>20.27.</u> Dans un espace orienté Oxyz, une force $\vec{f}$ est appliquée au point A (0; 3; 3); elle a pour module $\left\|\vec{f}\right\| = 5523\ N$.

a) Donner l'expression d'<u>une</u> ligne d'action possible de cette force telle que son moment par rapport au point O soit égal à $\vec{m}_O(f) = -15000\,\vec{1}_x$.
b) Que vaut alors le moment de $\vec{f}$ par rapport au point Q (1; 1; 1) (appliquer la formule du changement de centre de moment) ?
c) Et que vaudrait le moment de $\vec{f}$ par rapport à l'axe Ox ?

<u>*Réponses*</u> : a) $\begin{cases} \pi_1 \equiv 11\,z = y + 30 \\ \pi_2 \equiv x = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \pi_1 \equiv z = 11\,y - 30 \\ \pi_2 \equiv x = 0 \end{cases}$

b) $\vec{m}_Q(f) = -10000\,\vec{1}_x + 500\,\vec{1}_y - 5500\,\vec{1}_z$

c) $\vec{m}_{Ox}(f) = -15000\,\vec{1}_x$

<u>20.28.</u> Une force $\vec{f}$ est appliquée en A (1; 2; 2); on sait que $\vec{m}_O(f) = 3\,\vec{1}_y - 3\,\vec{1}_z$. Déterminer $\vec{f}$.

<u>*Réponse*</u> : $\vec{f} = \alpha\,\vec{1}_x + (2\,\alpha - 3)\,\vec{1}_y + (2\,\alpha - 3)\,\vec{1}_z$

<u>20.29.</u> L'expression suivante est-elle correcte : $\vec{m}_O(f) = \dfrac{\vec{m}_P(f) + \vec{m}_Q(f) + \left(\vec{OP} + \vec{OQ}\right) \times \vec{f}}{2}$?

(P et Q étant deux points quelconques de l'espace Oxyz).

<u>*Réponse*</u> : oui