

<i>CHAPITRE 3. SYSTÈMES DE FORCES</i>	- 3.1 -
<i>3.1. Vecteurs caractéristiques d'un système de forces</i>	- 3.1 -
3.1.1. <i>Définition</i>	- 3.1 -
3.1.2. <i>Vecteur "Résultante" des forces</i>	- 3.2 -
3.1.3. <i>Vecteur "Moment résultant"</i>	- 3.3 -
3.1.4. <i>Invariants d'un système de forces</i>	- 3.3 -
<i>3.2. Réduction d'un système de forces</i>	- 3.5 -
3.2.1. <i>Principe</i>	- 3.5 -
3.2.2. <i>Forces concourantes (Théorème de Varignon)</i>	- 3.5 -
3.2.3. <i>Axe Central d'un système de force.</i>	- 3.7 -
3.2.4. <i>Forces quelconques dans l'espace.</i>	- 3.7 -
3.2.5. <i>Forces coplanaires quelconques</i>	- 3.13 -
3.2.6. <i>Forces parallèles</i>	- 3.16 -
A) <i>Coplanaires</i>	- 3.16 -
B) <i>Forces parallèles dans l'espace.</i>	- 3.19 -
C) <i>Cas particulier : le couple de forces</i>	- 3.20 -
<i>3.3. Modifications à l'intérieur d'un système de forces</i>	- 3.22 -
3.3.1. <i>Changement du point d'application d'une force</i>	- 3.22 -
3.3.2. <i>Décomposition d'une force</i>	- 3.23 -
3.3.3. <i>Remplacement du vecteur moment.</i>	- 3.24 -

CHAPITRE 3. SYSTÈMES DE FORCES

3.1. Vecteurs caractéristiques d'un système de forces

3.1.1. Définition

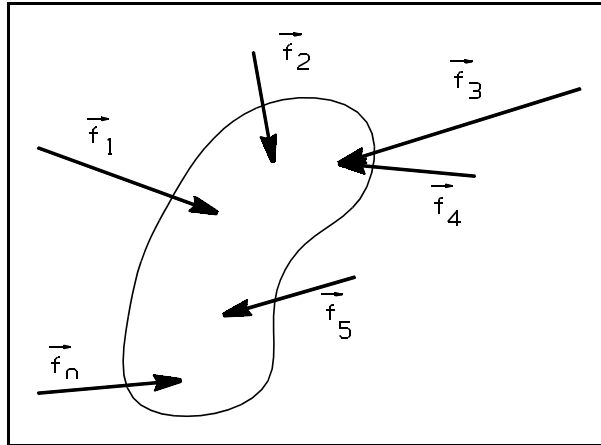


fig. 3.1. - Systèmes de forces.

On appelle “système de forces” l’ensemble des forces \vec{f}_i ($1 \leq i \leq n$) qui agissent simultanément sur un point matériel ou sur un solide. Ce système est représenté par un ensemble de vecteurs, en général glissants, parfois liés (**fig. 3.1.**).

Lorsqu’un solide est soumis à un tel système de forces, appliquées en différents points, il effectue généralement un certain mouvement que l’on désire connaître.

Les effets possibles de translation et de rotation du solide, associés à chacune de ces forces et à chacun des moments de ces forces, s’additionnent *vectériellement*. Si un autre système de forces appliqué à ce solide produit le même mouvement, il est dit “équivalent” au premier. Le système de forces pourrait dès lors être remplacé par un vecteur “force” unique et un vecteur “moment de force” unique, donnant les mêmes effets de translation et de rotation du solide. Ces deux vecteurs “équivalents” au système de forces de départ sont appelés *vecteurs caractéristiques* du système de forces, il s’agit :

- ▶ du vecteur “résultante des forces \vec{F} ”
- ▶ et du vecteur “moment résultant \vec{M}_P ”.

3.1.2. Vecteur “Résultante” des forces

Définition : C’est la somme vectorielle des forces qui composent le système (fig. 3.2.).

$$\vec{F} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 + \dots = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i$$

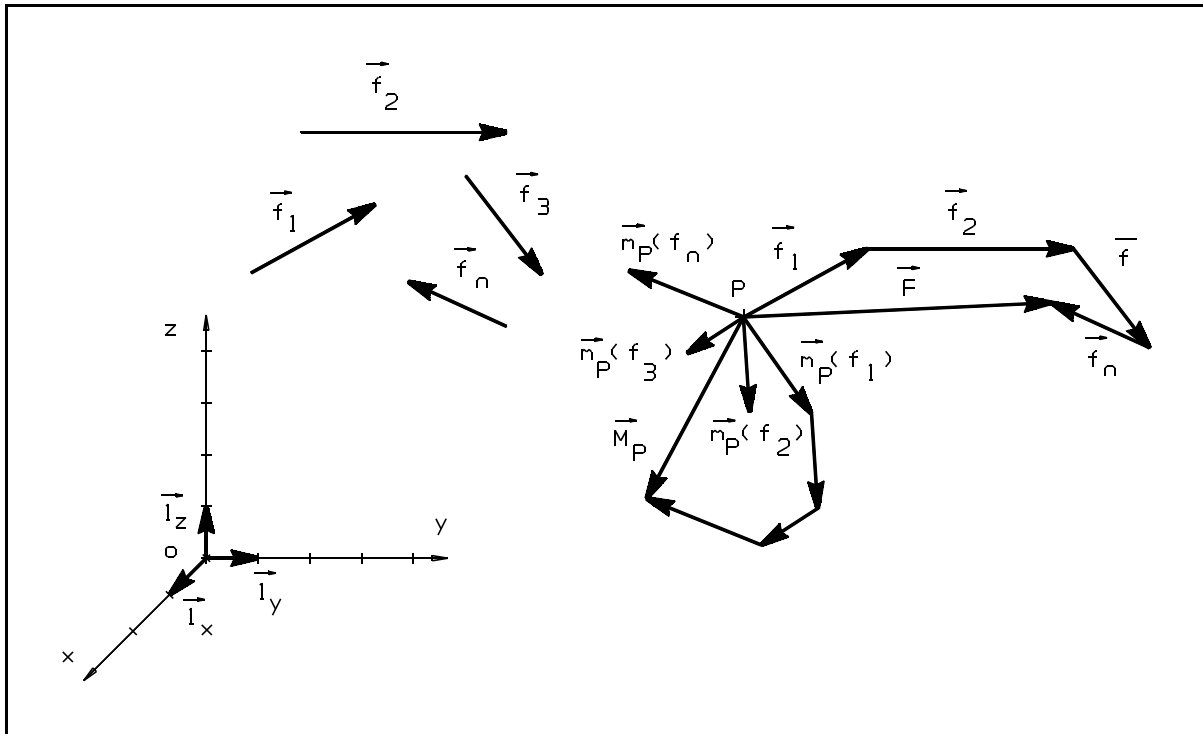


fig. 3.2. - Résultante d'un système de forces.

On a les relations suivantes, dans une base orthonormée Oxyz :

$$F_x = \sum_{i=1}^n f_{ix}; \quad F_y = \sum_{i=1}^n f_{iy}; \quad F_z = \sum_{i=1}^n f_{iz}$$

Remarquons que \vec{F} , vecteur libre construit à partir de \vec{f}_i , n’a pas encore de point d’application déterminé sur le corps solide considéré.

3.1.3. Vecteur "Moment résultant"

Définition : C'est la somme vectorielle des moments de chacune des forces par rapport au point P (**fig.3.2.**).

$$\vec{M}_P = \vec{m}_P(f_1) + \vec{m}_P(f_2) + \vec{m}_P(f_3) + \dots = \sum_{i=1}^n \vec{m}_P(f_i)$$

Si on calcule le moment résultant par rapport au point O, \vec{M}_O , on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(f_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (m_{Ox}(f_i) \vec{1}_x + m_{Oy}(f_i) \vec{1}_y + m_{Oz}(f_i) \vec{1}_z) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n m_{Ox}(f_i) \vec{1}_x \right) + \left(\sum_{i=1}^n m_{Oy}(f_i) \vec{1}_y \right) + \left(\sum_{i=1}^n m_{Oz}(f_i) \vec{1}_z \right) \\ &= M_{Ox} \vec{1}_x + M_{Oy} \vec{1}_y + M_{Oz} \vec{1}_z \end{aligned}$$

$\vec{M}_{Ox(y,z)}$: étant le moment résultant par rapport à l'axe x (y, z)

On démontre aisément la formule de changement de centre des moments résultants :

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O - \vec{OP} \times \vec{F}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{M}_P &= \sum_{i=1}^n \vec{m}_P(f_i) = \sum_{i=1}^n \left(\vec{m}_O(f_i) - \vec{OP} \times \vec{f}_i \right) \\ &= \vec{M}_O - \sum_{i=1}^n \left(\vec{OP} \times \vec{f}_i \right) = \vec{M}_O - \vec{OP} \times \sum_{i=1}^n \left(\vec{f}_i \right) \\ &= \vec{M}_O - \vec{OP} \times \vec{F} \end{aligned}$$

3.1.4. Invariants d'un système de forces

(Voir **fig. 3.3.**)

A) \vec{F} est un invariant vectoriel

En effet, \vec{F} (vecteur libre) est indépendant du choix du point de départ pour sa construction; il est aussi indépendant du système d'axes utilisé.

B) \vec{M}_P n'est pas un invariant vectoriel

Il faut bien préciser le point P par rapport auquel on calcule le moment résultant du système de forces, car chacun des moments $\vec{m}_P(f_i)$ change de valeur et de direction suivant la position de P.

C) $\vec{M}_P \cdot \vec{F}$ est un invariant scalaire

En effet, on peut écrire :

$$\vec{M}_P \cdot \vec{F} = \left(\vec{M}_O - \vec{OP} \times \vec{F} \right) \cdot \vec{F} = \vec{M}_O \cdot \vec{F} - \underbrace{\left(\vec{OP} \times \vec{F} \right) \cdot \vec{F}}_{=0} = \vec{M}_O \cdot \vec{F}$$

Cet invariant scalaire prouve que, quel que soit le point P considéré, la projection de \vec{M}_P sur la direction de \vec{F} est constante ($\overline{PQ} = \overline{P'Q'} = \overline{P''Q''} = \overline{OR}$).

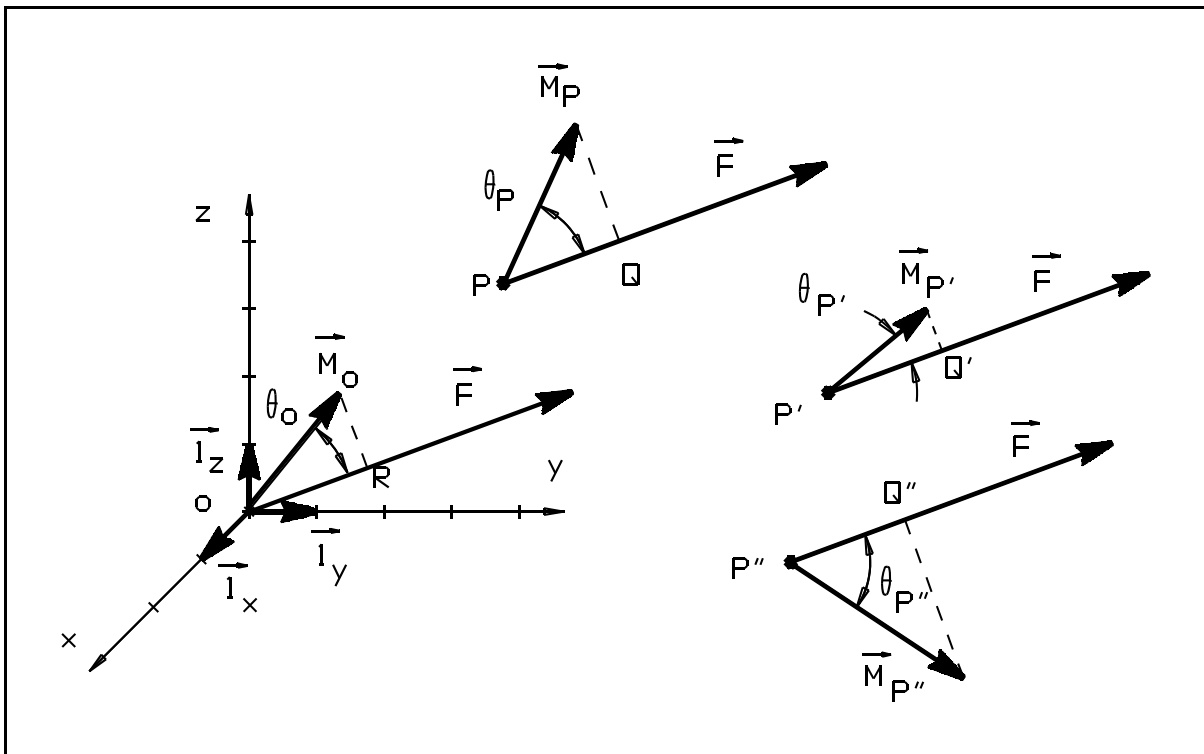


fig. 3.3. - Invariant.

Remarques :

- 1) Pour un système de forces coplanaires dans Oxy, on a : $\vec{M}_P \cdot \vec{F} = 0$ (P appartenant au plan des forces) car \vec{M}_P est perpendiculaire au plan des forces et donc suivant \vec{i}_z uniquement.
- 2) Si $\vec{F} = \vec{0}$ alors \vec{M}_P devient un invariant vectoriel :

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O - \vec{OP} \times \vec{F} \Rightarrow \vec{M}_P = \vec{M}_O \text{ c'est le même vecteur pour tout point de l'espace.}$$

3.2. Réduction d'un système de forces

3.2.1. Principe

Réduire un système de forces \vec{f}_i en un point O, c'est le remplacer par ses deux vecteurs caractéristiques \vec{F} et \vec{M}_O , \vec{F} étant un invariant vectoriel et \vec{M}_O dépendant de la position de O.

Discutons brièvement quelques *cas particuliers*.

1) $\vec{F} = \vec{0}$ et $\vec{M}_O = \vec{0}$

Dès lors : $\vec{M}_P = \vec{M}_O - \vec{OP} \times \vec{F} = \vec{M}_O = \vec{0}$.

Le système de forces est équivalent à $\vec{0}$ au point O et donc en tous points de l'espace. Ce système n'est susceptible de produire ni translation, ni rotation autour d'un point quelconque de l'espace.

Le point ou le solide soumis à un tel système de forces est dit "en équilibre".

2) $\vec{F} = \vec{0}$ et $\vec{M}_O \neq \vec{0}$

Dès lors : $\vec{M}_P = \vec{M}_O - \vec{OP} \times \vec{F} = \vec{M}_O \neq \vec{0}$.

Le système de forces est équivalent au seul vecteur \vec{M}_O , et ce en tout point de l'espace. Une telle réduction est obtenue dans le cas des couples de forces (voir § 3.2.3. Remarque).

Le seul mouvement possible associé sera un *mouvement de rotation*.

3) $\vec{F} \neq \vec{0}$ et $\vec{M}_O = \vec{0}$

Le seul mouvement possible associé sera un *mouvement de translation*.

4) $\vec{F} \neq \vec{0}$ et $\vec{M}_O \neq \vec{0}$

En un point P de l'espace, on réduit le système de forces \vec{f}_i en \vec{F} et \vec{M}_P formant entre eux un angle θ . On démontrera l'existence de "lieux de points" particuliers (pour lesquels \vec{M}_P est nul, ou minimum ...).

3.2.2. Forces concourantes (Théorème de Varignon)

Considérons le cas de plusieurs forces $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$ dont les lignes d'action sont toutes *concourantes* en un point A (**fig. 3.4**). Déterminons vectoriellement la résultante \vec{F} , et plaçons-la sur une ligne d'action passant par A.

Calculons le moment résultant \vec{M}_O :

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(f_i) = \sum_{i=1}^n \left(\vec{OA} \times \vec{f}_i \right) = \vec{OA} \times \sum_{i=1}^n \left(\vec{f}_i \right)$$

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{F} = \vec{m}_O(F)$$

puisque \vec{F} passe par A, suivant la construction utilisée.

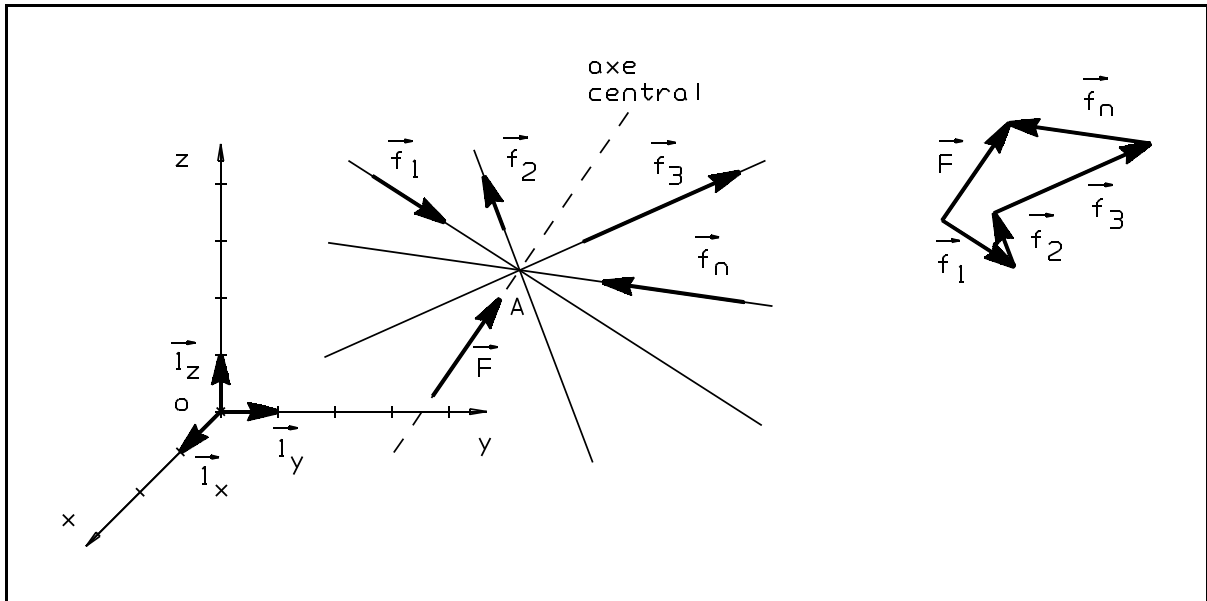


fig. 3.4. - Théorème de Varignon.

Donc, le théorème de Varignon s'énonce de la manière suivante :

“Dans un système de forces concourantes en A, le moment résultant (par rapport à un point quelconque) est égal au moment de la résultante (par rapport au même point), localisée sur une ligne d'action passant par le point de concours des forces qui composent le système”.

Cette position particulière de la ligne d'action de \vec{F} prend le nom d'**axe central** du système de forces.

Dans le cas des forces concourantes, pour tout point P de l'axe central, on a :

$$\vec{M}_P = \vec{m}_P(F) = \vec{0}$$

ce qui signifie que la réduction du système de forces, faite en un point quelconque de l'axe central, se résume en l'application de la seule résultante \vec{F} , équivalente au système de forces, à la fois pour la translation et pour la rotation.

3.2.3. Axe Central d'un système de force

Définition : L'axe central (AC) d'un système de force est le lieu géométrique des points par rapport auxquels le moment résultant est minimum.

Conséquence :

Les vecteurs résultant \vec{F} et moment résultant \vec{M}_P (avec $P \in AC$) sont colinéaires.

Autrement dit : lorsqu'on réduit un système de forces en un point P de cet axe central, le moment résultant sera minimum et sera colinéaire avec la résultante des forces.

3.2.4. Forces quelconques dans l'espace

Dans un système de forces quelconques dans l'espace, la réduction en un point Q quelconque donnera une résultante \vec{F} et un moment résultant \vec{M}_Q qui ne seront pas nécessairement alignés.

La figure **fig. 3.5.** schématise cette situation ainsi que la réduction du système en différents points Q' et Q'' de l'espace.

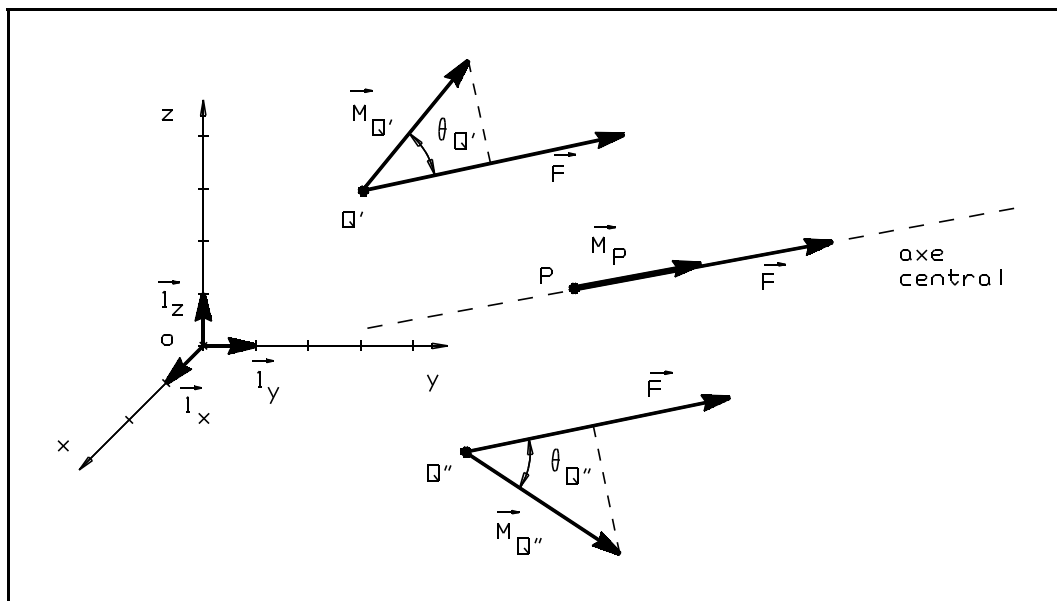


fig. 3.5. - Forces quelconques dans l'espace.

\vec{F} et $\vec{M}_{Q'}$ font entre eux un angle $\theta_{Q'}$; \vec{F} et $\vec{M}_{Q''}$ forment un angle $\theta_{Q''}$; on a cependant :

$$\vec{F} \cdot \vec{M}_{Q'} = \vec{F} \cdot \vec{M}_{Q''} \quad (\text{Invariant scalaire})$$

On définira dès lors l'*axe central* du système de force comme étant le lieu des points P pour lesquels \vec{F} et \vec{M}_P sont *sur la même ligne d'action*, ce qui entraîne que $\|\vec{M}_P\|$ prend *une valeur minimum* (pouvant être nulle).

Pour trouver l'expression vectorielle de ce lieu de points de l'axe central, exprimons que \vec{F} et \vec{M}_P sont parallèles (produit vectoriel nul).

$$\begin{aligned} \vec{F} \times \vec{M}_P = \vec{0} &\Leftrightarrow \vec{F} \times \left(\vec{M}_O - \vec{OP} \times \vec{F} \right) = \vec{0} \\ \left(\vec{F} \times \vec{M}_O \right) - \left(\vec{F} \times \left(\vec{OP} \times \vec{F} \right) \right) &= \vec{0} \\ \left(\vec{F} \times \vec{M}_O \right) &= \vec{OP} \left(\vec{F} \cdot \vec{F} \right) - \vec{F} \left(\vec{OP} \cdot \vec{F} \right) \end{aligned}$$

Choisissons, parmi ces points P, le point de pénétration de l'axe central dans le plan π perpendiculaire à \vec{F} et passant par O; soit P' ce point (**fig. 3.6**). Dans ce cas \vec{OP}' est \perp à \vec{F} et donc : $\vec{OP}' \cdot \vec{F} = 0$ et l'expression précédente peut se mettre sous la forme :

$$\left(\vec{F} \times \vec{M}_O \right) = \underbrace{\vec{OP}' \left(\vec{F} \cdot \vec{F} \right)}_{=0} - \vec{F} \left(\underbrace{\vec{OP}' \cdot \vec{F}}_{=0} \right) \Rightarrow \vec{OP}' = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{\|\vec{F}\|^2} \quad (\text{éq. 3.81.})$$

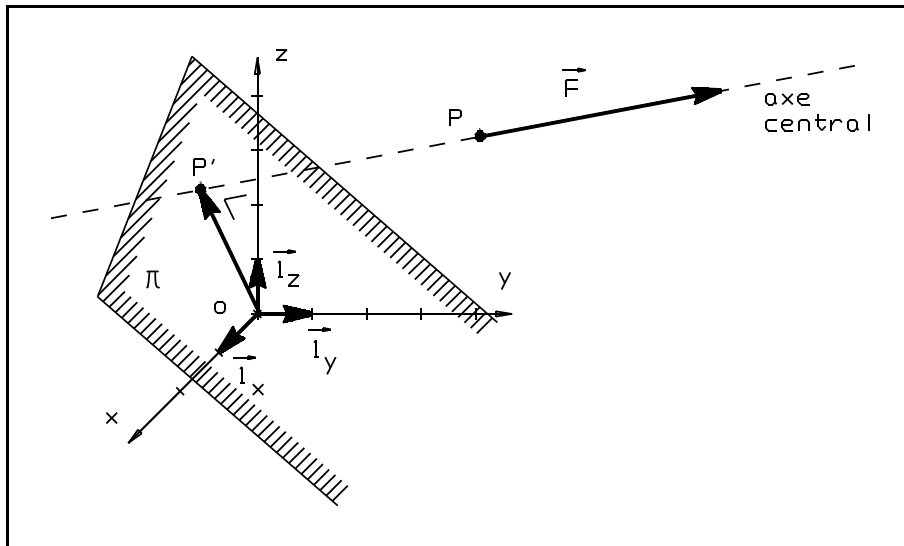


fig. 3.6. - Forces quelconques : axe central.

L'ensemble des points P constituant l'axe central peut se définir vectoriellement par :

$$\vec{OP} = \vec{OP}' + \vec{P}'P \Rightarrow \boxed{\vec{OP} = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{\|\vec{F}\|^2} + m \vec{F} \quad (m \in \mathbb{R})}$$

En effet, on peut vérifier que $\vec{M}_P = \vec{M}_{P'} + \underbrace{\vec{PP}' \times \vec{F}}_{= \vec{0} \text{ (car } \perp \text{)}} = \vec{M}_{P'}$ donc toujours aligné avec \vec{F} et

de module minimum.

Remarque :

On peut calculer cette valeur minimale du moment résultant ($\vec{M}_{P \min}$). Utilisons la propriété de l'invariance scalaire du produit $\vec{F} \cdot \vec{M}_P$. Soit :

$$\vec{F} \cdot \vec{M}_{P \min} = \vec{F} \cdot \vec{M}_O \Rightarrow \|\vec{F}\| \|\vec{M}_{P \min}\| \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{M}_O$$

Les deux vecteurs \vec{F} et $\vec{M}_{P \min}$ sont alignés, cela implique que $\cos \alpha = \pm 1$:

+1 : si \vec{F} et $\vec{M}_{P \min}$ sont de même sens;

-1 : si \vec{F} et $\vec{M}_{P \min}$ sont de sens contraires.

$$\Rightarrow \|\vec{M}_{P \min}\| = \frac{|\vec{F} \cdot \vec{M}_O|}{\|\vec{F}\|} \Rightarrow = \frac{\|\vec{F}\| \|\vec{M}_O\| \cos \theta_O}{\|\vec{F}\|} = \|\vec{M}_O\| \cos \theta_O$$

Déterminons les différents plans définissant cet axe central. Soit :

► $\frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{\|\vec{F}\|^2} = X \vec{1}_x + Y \vec{1}_y + Z \vec{1}_z$

et ► P (x; y; z)

les équations paramétriques de l'axe central sont dès lors :

$$\begin{cases} x = X + m F_x \\ y = Y + m F_y \\ z = Z + m F_z \end{cases}$$

qui, si F_x , F_y et F_z sont différents de 0, donnent les équations cartésiennes :

$$\left\{ m = \frac{x - X}{F_x} = \frac{y - Y}{F_y} = \frac{z - Z}{F_z} \right. \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 \equiv \frac{x - X}{F_x} = \frac{y - Y}{F_y} \\ \pi_2 \equiv \frac{y - Y}{F_y} = \frac{z - Z}{F_z} \\ \pi_3 \equiv \frac{x - X}{F_x} = \frac{z - Z}{F_z} \end{cases}$$

Ces trois plans se coupent selon l'axe central (**fig. 3.7**). (Axe central = intersection de 2 plans particuliers).

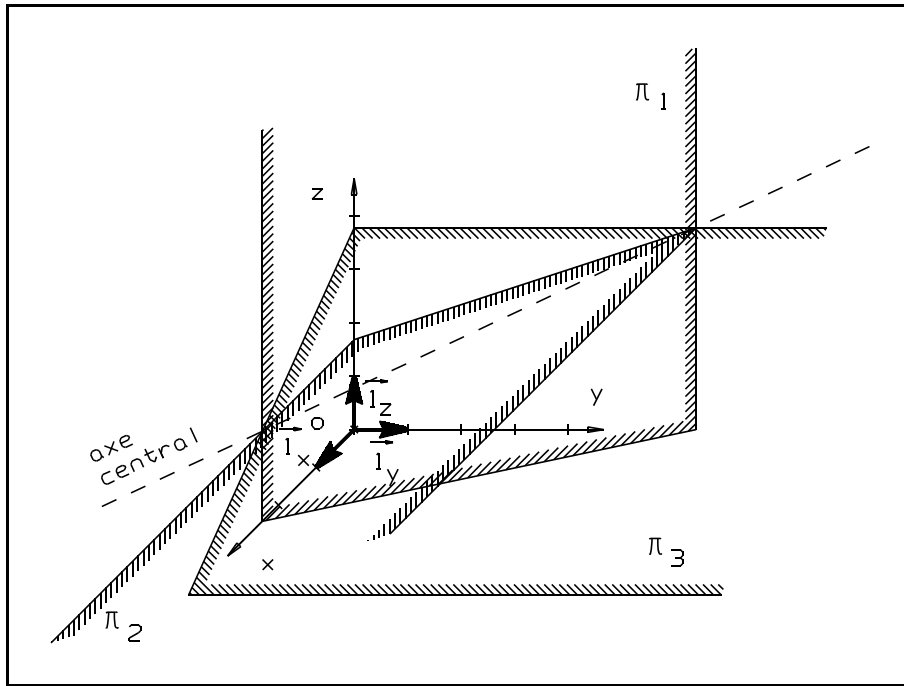


fig. 3.7. - Détermination de l'axe central pour des forces quelconques.

Remarque :

La connaissance des deux vecteurs caractéristiques \vec{F} et \vec{M}_O en un point Q n'appartenant pas à l'axe central permet aussi de déterminer l'équation vectorielle de l'axe central (fig. 3.8.).

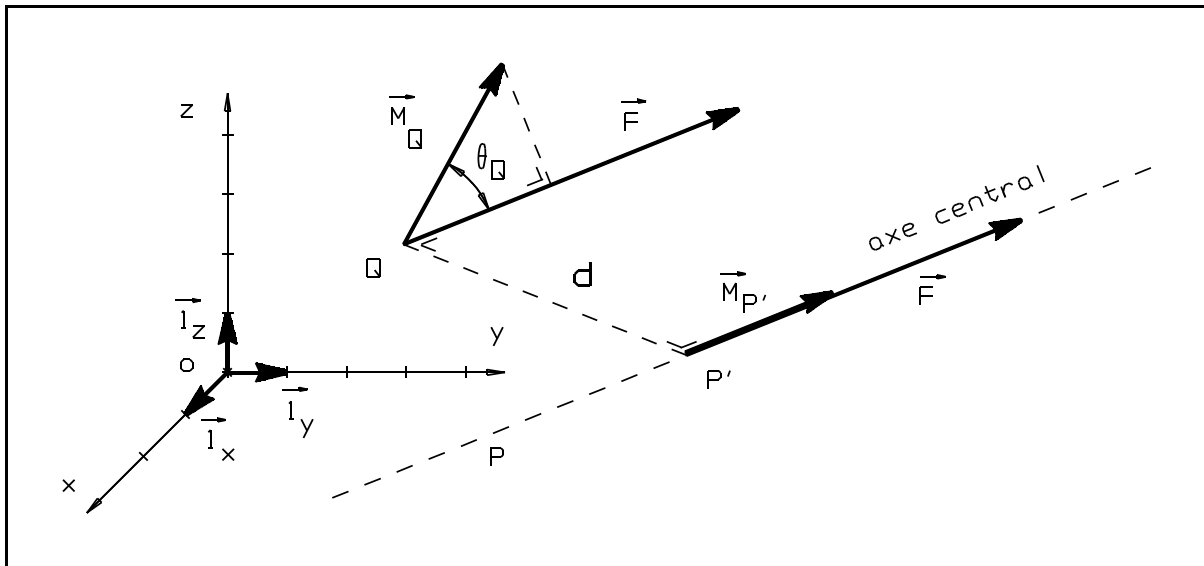


fig. 3.8. - Axe central : autre manière.

$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP} = \vec{OQ} + \left(\vec{QP}' + m \vec{F} \right) \quad (m \in \mathbb{R})$$

Avec P un point de l'axe central.

Or \vec{QP}' peut s'exprimer sous la forme (voir *éq. 3.81.*) :

$$\vec{QP}' = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{\|\vec{F}\|^2}$$

et ainsi \vec{OP} donne la droite de l'axe central.

$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \left(\frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{\|\vec{F}\|^2} + m \vec{F} \right)$$

Géométriquement, il faut donc, pour trouver le point P' de l'axe central, se déplacer sur la perpendiculaire en Q au plan formé par \vec{F} et \vec{M}_O , d'une distance d :

$$d = \|\vec{QP}'\| = \frac{\|\vec{F} \times \vec{M}_O\|}{\|\vec{F}\|^2} = \frac{\|\vec{F}\| \|\vec{M}_O\| \sin \theta_Q}{\|\vec{F}\|^2} = \frac{\|\vec{M}_O\| \sin \theta_Q}{\|\vec{F}\|}$$

(le sens de déplacement de d est défini par la règle de la main droite ($\vec{F} - \vec{M}_O - d$)).

On définit le **moment de transport** comme étant :

$$\|\vec{F}\| d = \|\vec{M}_O\| \sin \theta_Q$$

Application 3.1. Un pylône de 40 m de hauteur est soumis aux forces suivantes :

- ▶ $\|\vec{f}_P\| = 8000 \text{ N}$: poids appliqué en G (0; 0; 16); sens des z décroissants;
- ▶ $\|\vec{f}_1\| = 2500 \text{ N}$: action du vent, située dans les plans $\pi_1 \equiv z = 18 \text{ m}$ et $\pi_2 \equiv x - y = 0$; sens des x décroissants;
- ▶ $\|\vec{f}_2\| = \|\vec{f}_3\| = \|\vec{f}_4\| = 1200 \text{ N}$: résultantes des poids des câbles, appliquées en A_2 (0; -6; 38), A_3 (0; -6; 32) et A_4 (0; +6; 35); sens des z décroissants.

En vue du calcul des fondations, réduire ce système de forces en O. Déterminer la position de l'axe central et le moment minimum sur cet axe central.

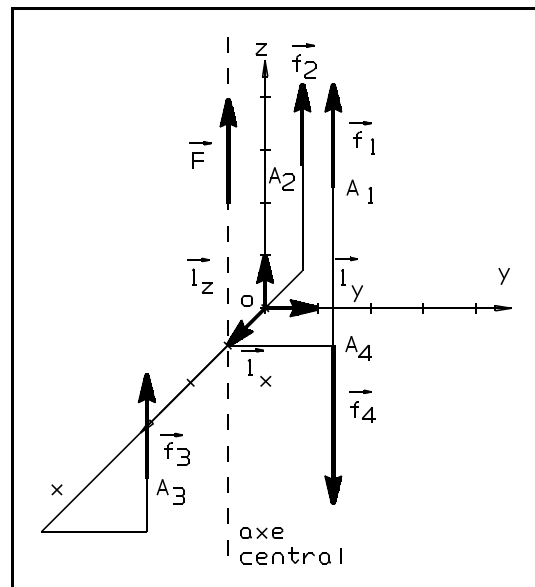


fig. 3.9. - Application 3.1.

Solution :

Expression analytique des forces

- ▶ $\vec{f}_P = -8000 \vec{i}_z$

- $$\vec{f}_1 = \|\vec{f}_1\| \vec{1}_d = \|\vec{f}_1\| \frac{\vec{BA}}{\|\vec{BA}\|} \quad \text{avec, par exemple : } B(1; 1; 18) \text{ et } A(0; 0; 18)$$

$$\vec{f}_1 = 2500 \left(\frac{-\vec{1}_x - \vec{1}_y - 0 \vec{1}_z}{\sqrt{2}} \right) = -1768 \vec{1}_x - 1768 \vec{1}_y$$
- $$\vec{f}_2 = -1200 \vec{1}_z = \vec{f}_3 = \vec{f}_4$$

Expression de la résultante

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^5 \vec{f}_i = -1768 \vec{1}_x - 1768 \vec{1}_y - 11600 \vec{1}_z$$

$$\|\vec{F}\|^2 = 1768^2 + 1768^2 + 11600^2 = 140.8 \cdot 10^6$$

Expression du moment résultant (réduction du système en O)

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^5 \vec{m}_O(\vec{f}_i) = \vec{0} + (31820 \vec{1}_x - 31820 \vec{1}_y) + 7200 \vec{1}_x + 7200 \vec{1}_y - 7200 \vec{1}_z$$

$$= 39020 \vec{1}_x - 31820 \vec{1}_y$$

Equation de l'axe central

$$\vec{OP} = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{\|\vec{F}\|^2} + m \vec{F} = -2.621 \vec{1}_x - 3.214 \vec{1}_y + 0.89 \vec{1}_z + m \vec{F}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - X}{F_x} = \frac{y - Y}{F_y} = \frac{z - Z}{F_z} = \frac{x + 2.621}{-1768} = \frac{y + 3.214}{-1768} = \frac{z - 0.89}{-11600}$$

Le premier et le second terme donne :

$$\pi_1 \equiv x - y = 0.593$$

Le premier et le troisième terme donne :

$$\pi_2 \equiv 6.562 x - z = -18.08$$

L'équation de l'axe central étant l'intersection de ces 2 plans.

Recherche du moment minimum

$$\|\vec{M}_{P \min}\| = \frac{|\vec{F} \cdot \vec{M}_O|}{\|\vec{F}\|} = 1073 \text{ Nm}$$

$\vec{F} \cdot \vec{M}_O$ est négatif ce qui indique que \vec{F} et $\vec{M}_{P \min}$ sont de sens contraire.

3.2.5. Forces coplanaires quelconques

Considérons un système de forces \vec{f}_i coplanaires (**fig. 3.10.**). En O, le système se réduit à \vec{F} et \vec{M}_O .

\vec{M}_O étant perpendiculaire au plan de la feuille, on le représentera *conventionnellement* par un petit arc de cercle fléché tel que représenté sur la figure **fig. 3.10.**

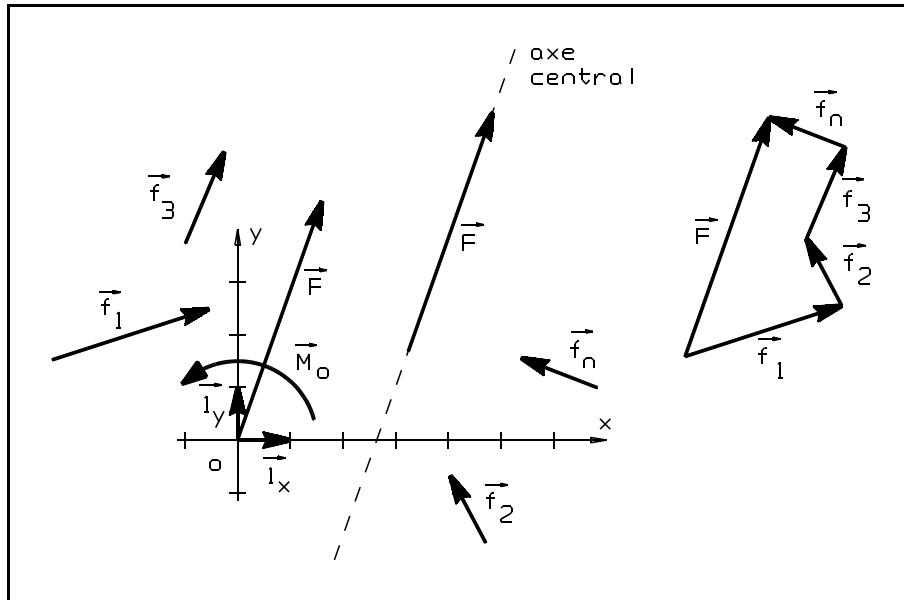


fig. 3.10. - Forces coplanaires quelconques.

Etablissons, dans ce cas, l'équation de l'axe central de ce système de forces coplanaires.

Partons de la formule générale. Soit :

$$\vec{OP} = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{\|\vec{F}\|^2} + m \vec{F} \quad (m \in \mathbb{R})$$

Soit en 2 dimensions :

- ▶ P (x; y)
- ▶ $\vec{F} = F_x \vec{i}_x + F_y \vec{i}_y$
- ▶ $\vec{M}_O = M_{Oz} \vec{i}_z$

L'équation générale devient :

$$\vec{OP} = x \vec{i}_x + y \vec{i}_y = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ F_x & F_y & 0 \\ 0 & 0 & M_{Oz} \end{vmatrix}}{\|\vec{F}\|^2} + m (F_x \vec{i}_x + F_y \vec{i}_y)$$

D'où :

$$\begin{cases} x = \frac{F_y M_{Oz}}{\|\vec{F}\|^2} + m F_x \\ y = -\frac{F_x M_{Oz}}{\|\vec{F}\|^2} + m F_y \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{F_x} \left(x - \frac{F_y M_{Oz}}{\|\vec{F}\|^2} \right) \\ y = -\frac{F_x M_{Oz}}{\|\vec{F}\|^2} \left(\frac{F_x}{F_x} \right) + x \left(\frac{F_y}{F_x} \right) - \frac{F_y^2 M_{Oz}}{F_x \|\vec{F}\|^2} \end{cases}$$

D'où :

$$y F_x = x F_y - \frac{M_{Oz}}{\|\vec{F}\|^2} (F_x^2 + F_y^2)$$

Et donc nous trouvons :

$$\boxed{x F_y - y F_x = M_{Oz}}$$

C'est l'équation de l'axe central pour des forces coplanaires (c'est une droite).

On remarquera aisément que dans le cas des forces coplanaires, pour tous points P appartenant à l'AC, nous avons : $\vec{M}_P = \vec{0}$, qui est bien le moment résultant minimum.

Application 3.2. Cas de forces coplanaires concourantes. Pour le montage proposé ci-contre, déterminer la résultante de ce système de force ainsi que l'équation de l'axe central.

Solution :

Expression analytique des forces

$$\vec{f}_1 = 40 \vec{1}_y$$

$$\vec{f}_2 = 40 \vec{1}_x$$

$$\vec{f}_3 = 60 \cos 45^\circ \vec{1}_x$$

$$- 60 \sin 45^\circ \vec{1}_y$$

$$= 30 \sqrt{2} \vec{1}_x - 30 \sqrt{2} \vec{1}_y$$

$$\vec{f}_4 = -50 \cos(180^\circ - 105^\circ) \vec{1}_x$$

$$- 50 \sin(180^\circ - 105^\circ) \vec{1}_y$$

$$= -12.94 \vec{1}_x - 48.30 \vec{1}_y$$

Résultante des forces

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^4 \vec{f}_i = (0 + 40 + 30\sqrt{2} - 12.94) \vec{1}_x + (40 + 0 - 30\sqrt{2} - 48.30) \vec{1}_y$$

$$= 69.49 \vec{1}_x - 50.73 \vec{1}_y$$

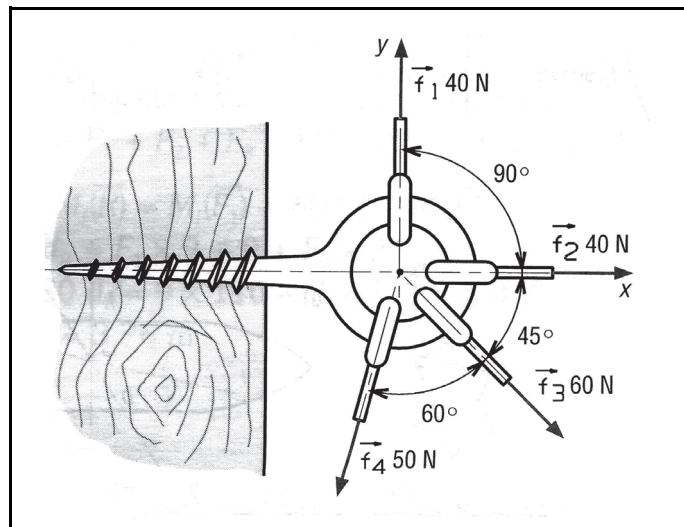


fig. 3.11. - Application 3.2.

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{69.49^2 + 50.73^2} = 86.04 \text{ N}$$

Moment résultant

$$\vec{M}_{Oz} = \vec{0} \quad (\text{évident !})$$

Equation de l'AC

$$\begin{aligned} x F_y - y F_x &= M_{Oz} \\ x(-50.73) - y(69.49) &= 0 \\ \Rightarrow AC \equiv y &= \frac{-50.73}{69.49} x \\ y &= -0.730 x \end{aligned}$$

Dans ce cas-ci on aurait pu aussi procéder de manière géométrique. Soit :
Pente :

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{F_x}{F_y} = \frac{-50.73}{69.49} = -0.730 \\ \Rightarrow \alpha &= 36.1^\circ \end{aligned}$$

Equation :

$$AC \equiv y = -0.730 x$$

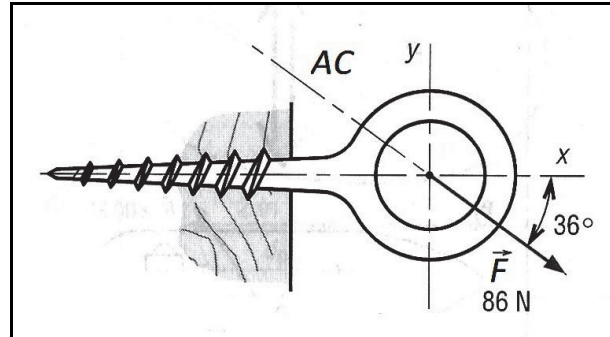


fig. 3.12. - Position de l'AC.

Application 3.3. Cas de forces quelconques. Dans un plan orienté Oxy, on donne les quatre forces suivantes :

$$\vec{f}_1 = 400 \vec{1}_x, \quad \text{appliquée en } A_1(0; 1);$$

$$\vec{f}_2 = 120 \vec{1}_y, \quad \text{appliquée en } A_2(-3; 4);$$

$$\vec{f}_3 = -100 \vec{1}_x, \quad \text{appliquée en } A_3(2; 4);$$

$$\vec{f}_4 = 180 \vec{1}_y, \quad \text{appliquée en } A_4(2; 5).$$

Déterminer l'équation de l'axe central de ce système de force.

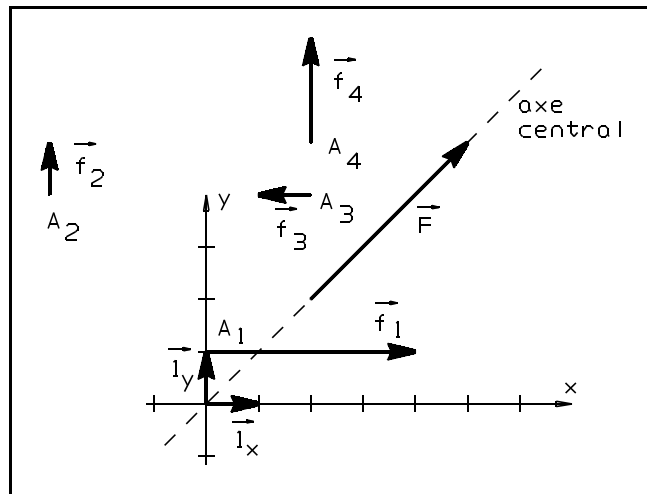


fig. 3.13. - Application 3.3.

Solution :

Recherche de la résultante

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i = 300 \vec{1}_x + 300 \vec{1}_y = F_x \vec{1}_x + F_y \vec{1}_y$$

Recherche du moment résultant

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \sum_{i=1}^n \vec{m}_P(f_i) = \vec{m}_O(f_1) + \vec{m}_O(f_2) + \vec{m}_O(f_3) + \vec{m}_O(f_4) \\ &= -400 \vec{1}_z - 360 \vec{1}_z + 400 \vec{1}_z + 360 \vec{1}_z = \vec{0} \end{aligned}$$

Equation de l'axe central

$$x F_y - y F_x = M_{Oz} \Rightarrow 300x - 300y = 0 \Rightarrow x = y$$

On vérifiera aisément que le moment résultant \vec{M}_P est nul pour tout point P de l'axe central.

Vérification du résultat par la formule générale

$$\vec{OP} = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{\|\vec{F}\|^2} + m \vec{F} = \vec{0} + m(300 \vec{1}_x + 300 \vec{1}_y)$$

avec : $\vec{OP} = x \vec{1}_x + y \vec{1}_y + z \vec{1}_z$

$$\Rightarrow x \vec{1}_x + y \vec{1}_y + z \vec{1}_z = 300 m \vec{1}_x + 300 m \vec{1}_y$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 300 m \\ y = 300 m \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = y$$

3.2.6. Forces parallèles

A) Coplanaires

Considérons un système de forces $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$ parallèles et coplanaires. Pour simplifier, supposons que leur ligne d'action est parallèle à l'axe Oy, en des points d'abscisses $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, à partir de l'origine O (fig. 3.14).

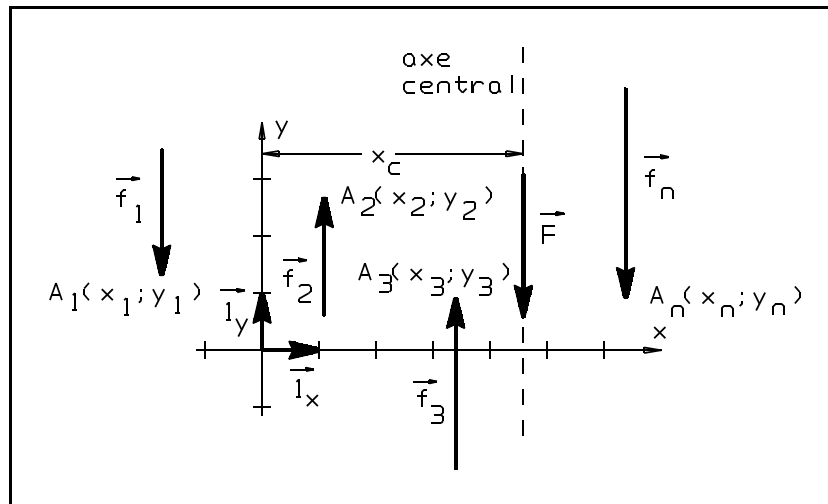


fig. 3.14. - Forces coplanaires parallèles (à l'axe Oy).

Appliquons, à nouveau l'équation générale. Soit :

$$\vec{OP} = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{\|\vec{F}\|^2} + m \vec{F} \quad (m \in R)$$

Avec, cette fois-ci :

- ▶ $P(x; y)$
- ▶ $\vec{F} = F_y \vec{1}_y$
- ▶ $\vec{M}_O = M_{Oz} \vec{1}_z$

L'équation générale devient :

$$\vec{OP} = x \vec{1}_x + y \vec{1}_y = \frac{\begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 0 & F_y & 0 \\ 0 & 0 & M_{Oz} \end{vmatrix}}{\|\vec{F}_y\|^2} + m(F_y \vec{1}_y)$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} x = \frac{F_y M_{Oz}}{\|\vec{F}_y\|^2} \\ y = m F_y \end{cases}$$

L'équation devient donc :

$$x_{AC} = \frac{F_y M_{Oz}}{\|\vec{F}_y\|^2}$$

Et dans le cas de forces *parallèles à l'axe Ox*, on obtiendrait :

$$y_{AC} = -\frac{F_x M_{Oz}}{\|\vec{F}_x\|^2}$$

La résultante \vec{F} ainsi placée sur cet AC est équivalente au système de forces, à la fois pour la translation et pour la rotation. Le moment résultant \vec{M}_P est nul pour tout point P de l'axe central; pour tout point R n'appartenant pas à l'axe central, \vec{M}_R est non nul et perpendiculaire à \vec{F} (rappel : $\vec{M}_R \cdot \vec{F}$ est un invariant scalaire, nul dans ce cas-ci).

La réduction du système des forces \vec{f}_i , en un point de l'axe central, consiste ainsi en la seule force \vec{F} .

Une autre manière d'aborder le cas des forces parallèles est d'utiliser le *théorème de Varignon étendu aux systèmes de forces parallèles* (point d'intersection rejeté à l'infini); dès lors :

$$\vec{M}_{Oz} = \vec{m}_{Oz}(F) \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i f_{iy} = x_{AC} F_y$$

où x_{AC} représente l'abscisse de l'axe central du système de forces, parallèle aussi à l'axe Oy :

$$x_{AC} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i f_{iy})}{F_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i f_{iy})}{\sum_{i=1}^n (f_{iy})}$$

Application 3.4. On considère une grue roulante. Les charges qui la sollicitent sont, de la gauche vers la droite :

- ▶ le poids \vec{f}_{P1} (20 kN) (charge à soulever);
- ▶ le poids \vec{f}_{P2} (15 kN) de la partie mobile;
- ▶ le poids \vec{f}_{P3} (25 kN) du chariot;
- ▶ le contre-poids \vec{f}_{P4} (36 kN).

Déterminer la résultante \vec{F} de ces charges, et vérifier si la grue est stable dans la position indiquée.

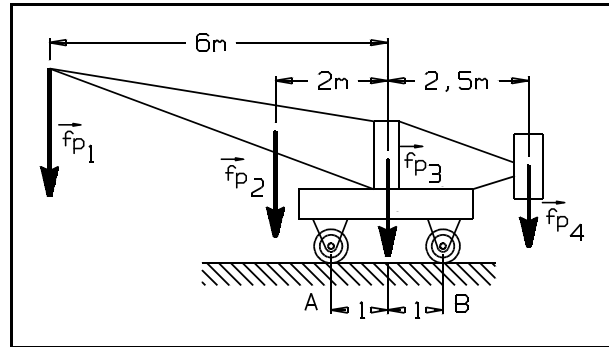


fig. 3.15. - Application 3.4.

Solution :

1^{er} manière

Détermination de la résultante

Axe Oy vertical et positif vers le haut.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^4 \vec{f}_i = (-20 - 15 - 25 - 36) \vec{1}_y = -96 \vec{1}_y$$

Détermination du moment résultant

Par rapport au point A :

$$\begin{aligned} \vec{M}_A = \vec{M}_{Oz} &= (+f_{P1} \times 5 + f_{P2} \times 15 - f_{P3} \times 1 - f_{P4} \times 3.5) \vec{1}_z \\ &= -36 \vec{1}_z \end{aligned}$$

Formule générale

$$x_{AC(\%A)} = \frac{F_y M_{Oz}}{\|\vec{F}_y\|^2} = \frac{-96 \times (-36)}{96^2} = +0.375 m$$

2^{ième} manière

Position de l'axe central

$$\begin{aligned} (\% A) \Rightarrow x_{AC} &= \frac{\sum f_{iy} x_i}{\sum f_{iy}} \\ &= \frac{(-20) \times (-5) + (-15) \times (-1) + (-25) \times 1 + (-36) \times 3.5}{-96} \\ &= 0.375 m \end{aligned}$$

Conclusion

L'AC se trouve entre les 2 roues (appuis), donc la grue est stable.

B) Forces parallèles dans l'espace

Soit :

- ▶ on utilise la *formule générale* :

$$\vec{OP} = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{\|\vec{F}\|^2} + m \vec{F} \quad (m \in \mathbb{R})$$

- ▶ on utilise le *théorème de Varignon étendu aux systèmes de forces parallèles* et dans le cas général où les forces parallèles se trouvent dans une base orthonormée Oxyz, orientée de telle façon que Oz soit parallèle aux forces, les équations de l'axe central seront :

$$x_{AC} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i f_{iz})}{F_z} \quad \text{et} \quad y_{AC} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i f_{iz})}{F_z}$$

Cette position de l'axe central est indépendante du choix du système d'axes.

Application 3.5. Dans un espace orienté Oxyz, on donne les forces suivantes :

$$\vec{f}_1 = 100 \vec{I}_z, \quad \text{appliquée en } A_1 (1; 2; 3);$$

$$\vec{f}_2 = 50 \vec{I}_z, \quad \text{appliquée en } A_2 (-1; 0; 2);$$

$$\vec{f}_3 = 20 \vec{I}_z, \quad \text{appliquée en } A_3 (6; 2; 1);$$

$$\vec{f}_4 = -120 \vec{I}_z, \quad \text{appliquée en } A_4 (1; 2; 0).$$

Déterminer la position de l'axe central de ce système de force.

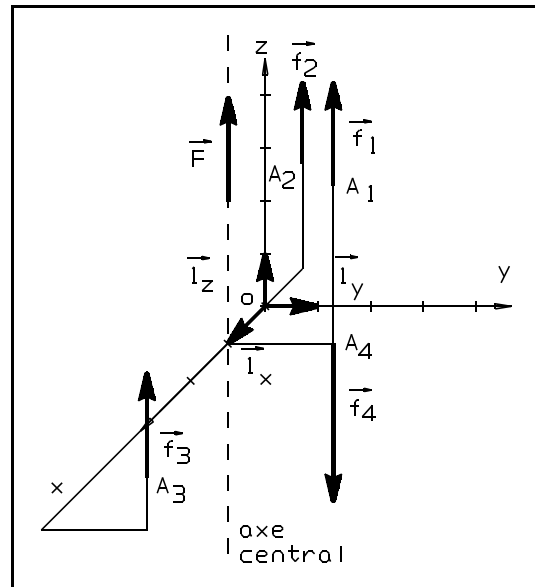


fig. 3.16. - Application 3.5.

Solution :

1^{er} manière

Recherche de la résultante

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \sum_{i=1}^n \vec{f}_{iz} = (100 + 50 + 20 - 120) \vec{I}_z \\ &= 50 \vec{I}_z \end{aligned}$$

Recherche du moment résultant

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \begin{vmatrix} \vec{I}_x & \vec{I}_y & \vec{I}_z \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 100 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{I}_x & \vec{I}_y & \vec{I}_z \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 50 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{I}_x & \vec{I}_y & \vec{I}_z \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{I}_x & \vec{I}_y & \vec{I}_z \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -120 \end{vmatrix} \\ &= 0 \vec{I}_x - 50 \vec{I}_y + 0 \vec{I}_z \end{aligned}$$

Appliquons la formule générale

$$\vec{OP} = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{\|\vec{F}\|^2} + m \vec{F} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{I}_x & \vec{I}_y & \vec{I}_z \\ 0 & 0 & 50 \\ 0 & -50 & 0 \end{vmatrix}}{50^2} + m 50 \vec{I}_z = \vec{I}_x + m 50 \vec{I}_z$$

D'où, l'AC a pour équation :

$$AC \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv x = 1 \\ \pi_2 \equiv y = 0 \\ z = 50 \text{ m} \Rightarrow // Oz \end{cases}$$

2^{ème} manière

Recherche de la position de l'axe central

$$x_{AC} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i f_{iz})}{\sum_{i=1}^n f_{iz}}$$

$$= \frac{1 \times 100 - 1 \times 50 + 6 \times 20 + 1 \times (-120)}{50} = 1$$

$$y_{AC} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i f_{iz})}{F_z} = \frac{2 \times 100 + 0 \times 50 + 2 \times 20 + 2 \times (-120)}{50} = 0$$

L'axe central a ainsi pour équation :

$$AC \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv x = 1 \\ \pi_2 \equiv y = 0 \end{cases}$$

tel que représenté sur la figure.

On vérifiera aisément que pour tout point P (1; 0; z_p) de l'axe central, $\vec{M}_P = \vec{0}$.

On retrouve effectivement la même position pour l'AC.

C) Cas particulier : le couple de forces

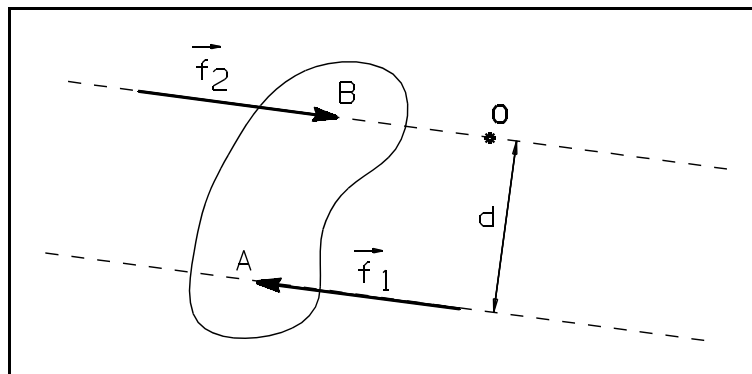


fig. 3.17. - Couples de forces.

Un système de deux forces opposées (forces parallèles de même module mais de sens contraires ($\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$)) agissant sur un corps, est appelé "couple de forces" (fig. 3.17.).

Un système de forces qui forment un couple n'est évidemment pas en équilibre, bien que la résultante $\vec{F} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{f}_1 - \vec{f}_1 = \vec{0}$ soit nulle.

L'action d'un couple de force sur un solide se réduit à un effet de rotation, caractérisé par le moment du couple, qui est indépendant du point par rapport auquel on le calcule (**fig. 3.18.**).

$$\vec{M}_O = \vec{m}_O(f_1) + \vec{m}_O(f_2) = \vec{OA} \times \vec{f}_1 + \vec{0}$$

et

$$\|\vec{M}_O\| = \|\vec{f}_1\| \underbrace{\|\vec{OA}\| \sin \alpha}_d = \|\vec{f}_1\| d = \|\vec{f}_2\| d$$

avec : d la distance ("bras de levier") entre les deux forces.

$$\text{De plus : } \vec{M}_P = \vec{M}_O - \vec{OP} \times \vec{F} = \vec{M}_O \text{ et ce pour tout point P.} \\ = \vec{0}$$

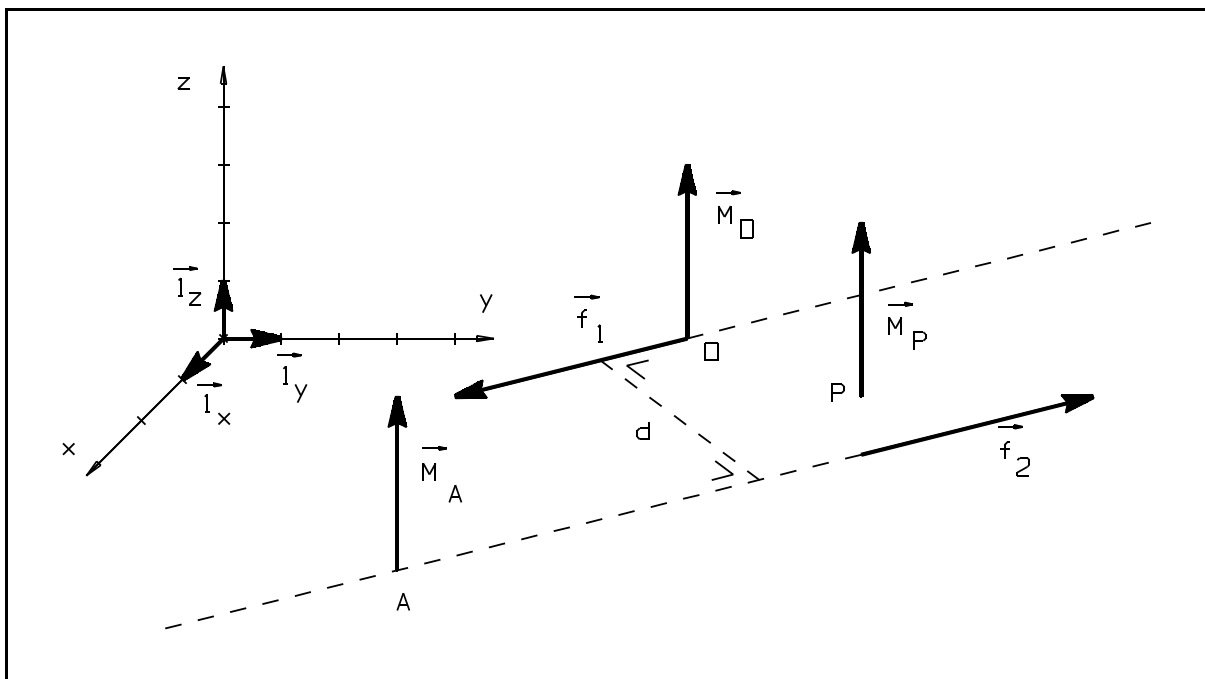


fig. 3.18. - Couple de forces et changement de centre.

La direction de \vec{M}_O est perpendiculaire au plan des deux forces, son sens est donné par la "règle de la main droite".

Deux couples de forces seront dits *équivalents* si ils donnent lieu au même moment, ce qui signifie que ces couples doivent être situés dans des plans parallèles, et que le produit $\|\vec{f}_i\| d_i$ doit rester constant (la longueur du bras de levier d_i pouvant changer, à condition que $\|\vec{f}_i\|$ s'adapte).

3.3. Modifications à l'intérieur d'un système de forces

3.3.1. Changement du point d'application d'une force

Etant donné une force \vec{f} appliquée en un point A et dont la ligne d'action est l'axe a (**fig. 3.19.**), il est souvent intéressant pour la réduction ou pour l'étude du mouvement d'un solide, de pouvoir "transporter" cette force en un point B non situé sur l'axe a .

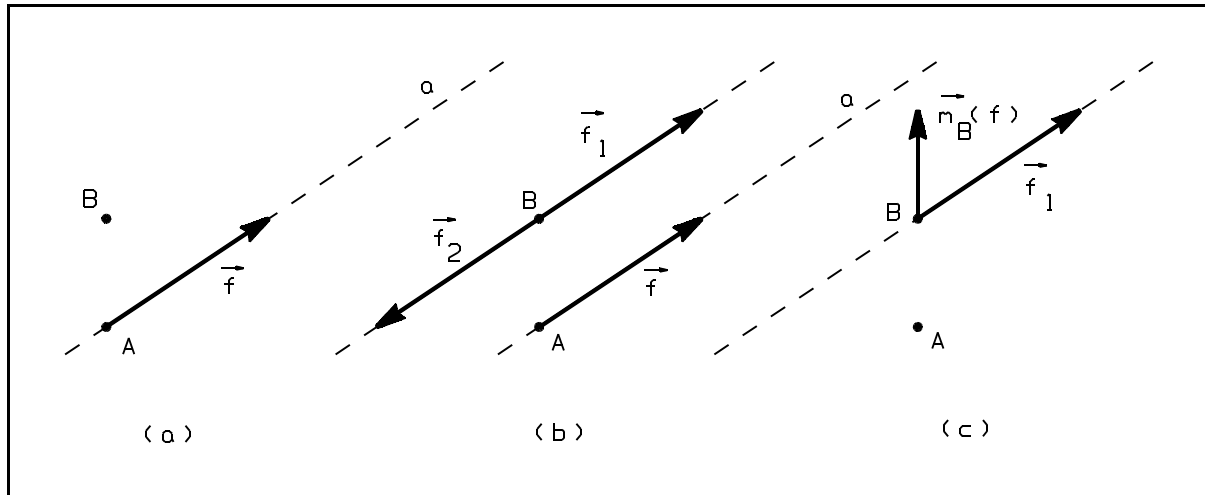


fig. 3.19. - Changement de centre.

Ajoutons en B une force \vec{f}_1 équipollente à \vec{f} et \vec{f}_2 réciproque à \vec{f}_1 (**fig. 3.19 b.**). Le système comprenant \vec{f} , \vec{f}_1 et \vec{f}_2 est équivalent à \vec{f} , puisque \vec{f}_1 et \vec{f}_2 ont une résultante et un moment résultant nuls.

Mais on peut le considérer sous la forme du système de la figure 3.19 c.. toujours équivalent à \vec{f} et comprenant la force \vec{f}_1 (égal à \vec{f} transportée en B) et le couple des deux forces \vec{f} et \vec{f}_2 dont le moment par rapport à B se réduit à $\vec{m}_B(f)$.

On peut donc transporter une force \vec{f} d'un point A en un point B, à condition d'ajouter un couple de forces dont le moment vaut $\vec{m}_B(f)$, moment par rapport à B de la force \vec{f} appliquée à l'ancien point A.

Ce moment $\vec{m}_B(f)$, qui doit apparaître, est appelé "couple de transport".

Autre approche : on peut réduire le "système" de force en B.

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{F} = \vec{f} \\ \vec{M}_B = \vec{m}_B(f) \end{cases} \text{ et } \vec{F} \text{ et } \vec{M}_B \text{ sont équivalents à } \vec{f}.$$

L'exemple suivant peut illustrer cette notion. Pour maintenir une barre homogène \overline{AB} en équilibre, il faut, de toute évidence, appliquer en son milieu une force dirigée vers le haut reprenant le poids de la barre.

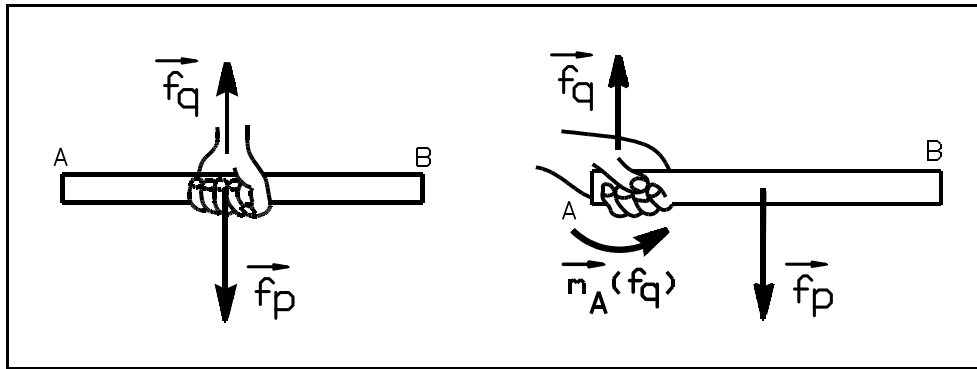


fig. 3.20. - Couple de transport.

Pour maintenir la barre par son extrémité A, il faut appliquer, outre la force \vec{f}_q , un moment de module égal à $\|\vec{m}_A(\vec{f}_q)\| = \|\vec{f}_p\| \frac{\overline{AB}}{2}$ (fig. 3.20.). Ces considérations sont directement “ressenties” par la main de la personne qui maintient la barre en équilibre.

3.3.2. Décomposition d'une force

Sans rien changer aux caractéristiques d'un système de forces, il est toujours possible :

- A) de remplacer une force \vec{f} dont la ligne d'action passe par un point A, par deux ou plusieurs forces dont les lignes d'action passent également par A pourvu que $\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \dots$

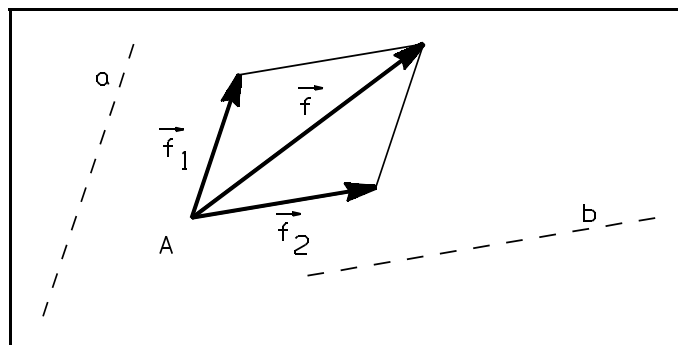


fig. 3.21. - Décomposition d'une force en 2 directions non parallèles.

- B) de remplacer une force \vec{f} par deux ou plusieurs forces $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots$ dont les lignes d'action sont parallèles à celle de \vec{f} pourvu que :

$$\begin{cases} \vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \dots \\ \vec{M}_P = \vec{0} \end{cases}$$

pour P point quelconque de la ligne d'action de \vec{f} .

En particulier, pour décomposer \vec{f} en 2 forces parallèles, on a comme conditions :

$$\text{et } \begin{cases} \vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 \quad (\text{somme algébrique}) \\ \|\vec{f}_1\| d_1 = \|\vec{f}_2\| d_2 \end{cases}$$

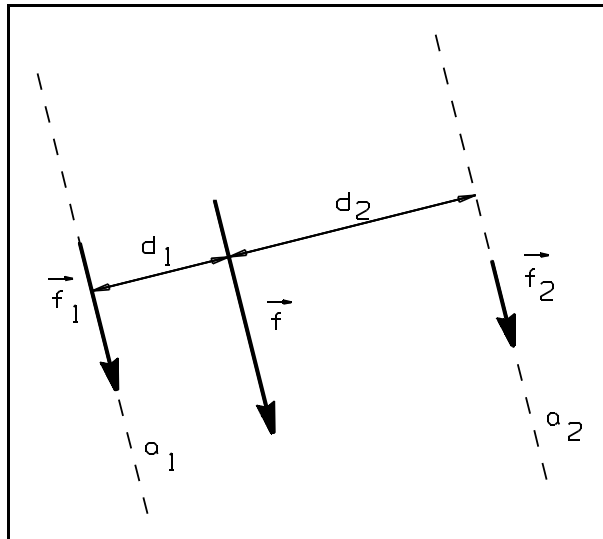


fig. 3.22. - Décomposition d'une force en 2 directions parallèles.

3.3.3. Remplacement du vecteur moment

Soit un moment $\vec{m}_O(f)$ appliqué en O. On peut remplacer ce moment par un couple de forces \vec{f} et $-\vec{f}$, dans un plan π perpendiculaire à $\vec{m}_O(f)$, espacées d'une distance d telle que $\|\vec{f}\|d = \|\vec{m}_O(f)\|$ (fig. 3.23.). Il existe donc une infinité de directions de \vec{f} et une infinité de modules de \vec{f} qui soient possibles.

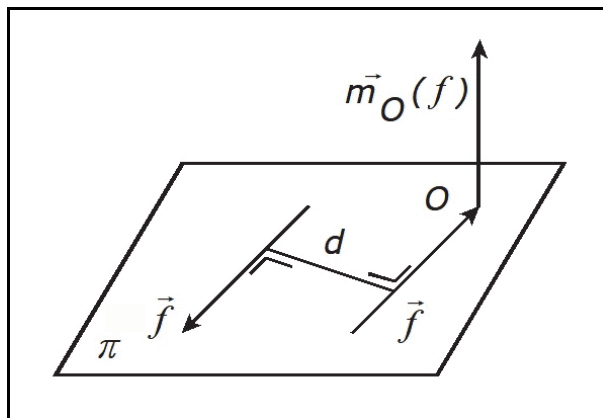


fig. 3.23. - Remplacement d'un vecteur force par un couple de forces.