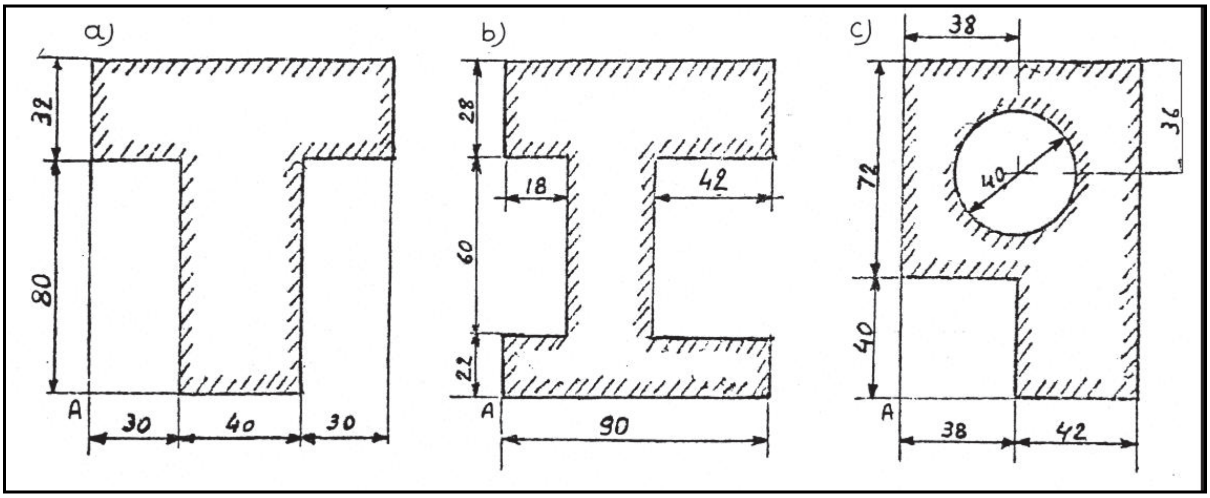
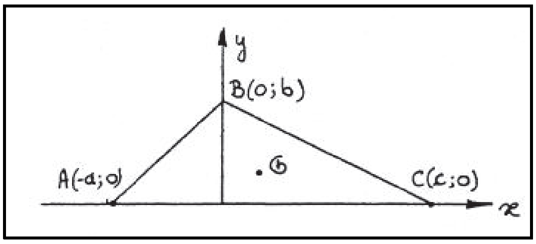
Centre de gravité

4.01. Déterminer la position du centre de masse des surfaces ci-dessous (dimensions en *mm*).



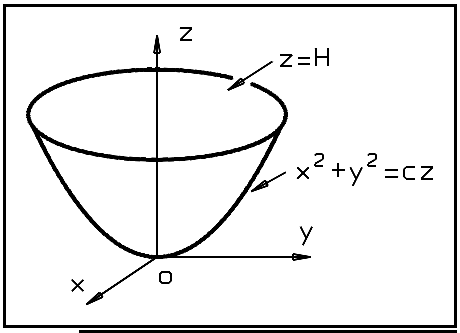
Réponses : en mesurant les coordonnées de G à partir du point A, on trouve :
a) G (50; 68); b) G (41.6; 56.7) ; c) G (46.6; 60.8)

4.02. Déterminer par intégration l'ordonnée y_G et par décomposition l'abscisse x_G du centre de masse du triangle quelconque ABC ci-contre.

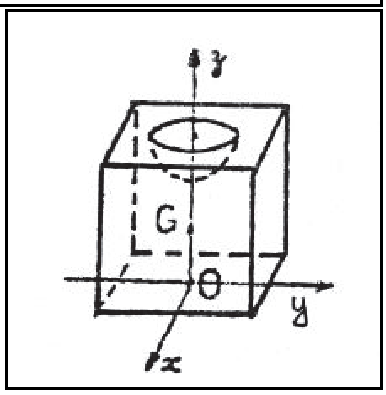


Réponses : $x_G = \dfrac{c-a}{3}$; $y_G = \dfrac{b}{3}$.

4.07. Déterminer la position de G du volume délimité par le paraboloïde de révolution $x^2 + y^2 = c\,z$ et le plan $z = H$.



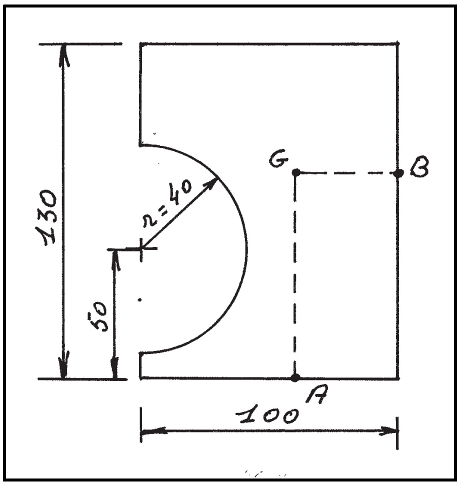
Réponses : $x_G = 0$; $y_G = 0$; $z_G = \dfrac{2}{3}H$.



4.08. Dans un cube de côté *a*, on enlève sur une des faces une demi-sphère de rayon $r = \dfrac{a}{n}$ avec $n \geq 2$ .Le centre de la demi-sphère est au centre de la face. Calculer la position de G.

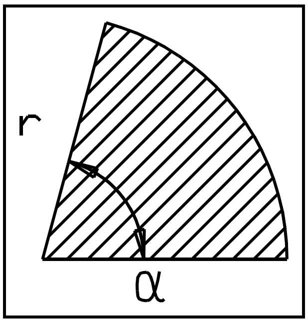
Réponse :
$$\overline{OG} = \frac{a}{4\,n}\,\frac{\left(6\,n^4 - 8\,\pi\,n + 3\,\pi\right)}{\left(3\,n^3 - 2\,\pi\right)}\,.$$

4.09. Calculer la position du centre de masse G de la surface ci-contre, cotée en *mm*.



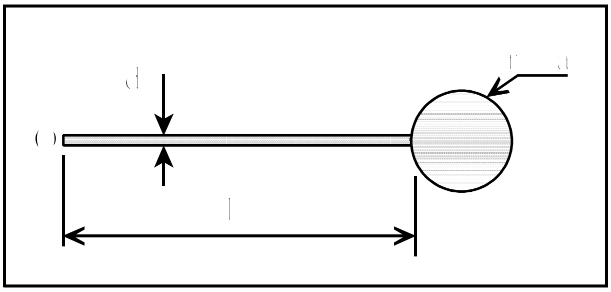
Réponses :
$$\overline{AG} = 68.5\,mm\,;$$
$$\overline{BG} = 42.1\,mm\,.$$

4.10. Calculer la position du centre de gravité d'un secteur circulaire (angle au centre α radians) de rayon *r*.



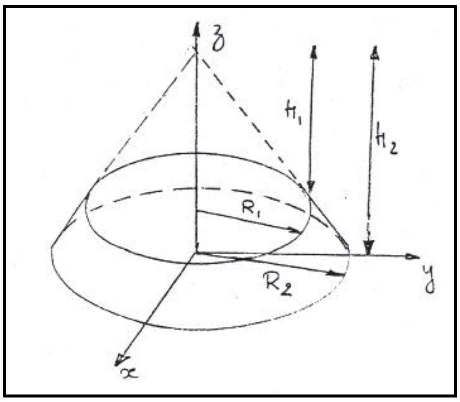
Réponse :
$$\overline{OG} = \frac{2\,r}{3}\,\frac{\sin(\alpha/2)}{(\alpha/2)}\,.$$

4.11. Déterminer la position du centre de masse d'une sphère de rayon $a = 7\,cm$, de masse volumique $\rho_1 = 7\,800\,kg/m^3$, attachée à un fil de fer de longueur $l = 1\,m$, de diamètre $d = 2\,mm$, et de masse volumique $\rho_1 = 7\,800\,kg/m^3$.



Réponse :
$$\overline{OG} = 1.0688\,m\,.$$

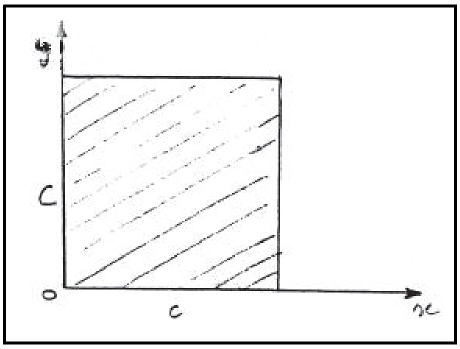
4.14. Déterminer la position du centre de masse d'un tronc de cône *plein* homogène.



Réponses :
$$x_G = 0\,;\; y_G = 0\,;$$
$$z_G = \frac{\dfrac{h_2^4}{4} - h_1^3\,h_2 + \dfrac{3\,h_1^4}{4}}{h_2^3 - h_1^3}\,.$$

Moment d'inertie

4.15. Calculer les moments d'inertie I_x, I_y et I_O d'un carré homogène de côté c.

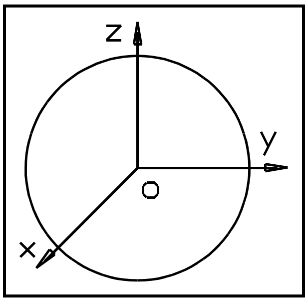


Réponses : $I_x = I_y = \dfrac{c^4}{3}$; $I_O = \dfrac{2\,c^4}{3}$.

4.16. Calculer les moments d'inertie J_x, J_y, J_z et J_O d'une sphère *pleine* homogène de rayon r_0 et de masse m.

Réponses : $J_x = J_y = J_z = \dfrac{2}{5}\,m\,r_0^2$; $J_O = \dfrac{3}{5}\,m\,r_0^2$.

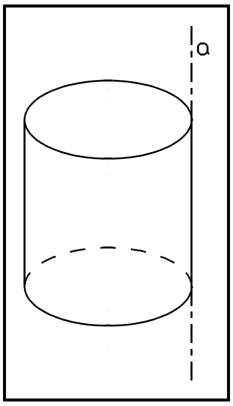
4.17. Calculer les moments d'inertie J_x, J_y et J_O d'une sphère *creuse* homogène de rayon r ("*coquille sphérique*") et de masse m.



Réponses : $J_x = J_y = J_z = \dfrac{2}{3}\,m\,r^2$;

$J_O = m\,r^2$.

4.18. Calculer le moment d'inertie d'un cylindre creux ("*tuyau*") de rayon r et de masse m par rapport à une génératrice a.

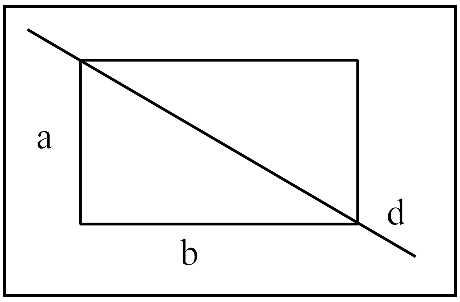


Réponse : $J_a = 2\,m\,r^2$.

4.19. Déterminer la position des A.C.P.I. d'un demi-disque de rayon r; calculer les moments d'inertie correspondants.

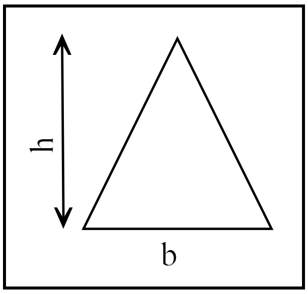
Réponses : $I_{ACPI\ \max} = \dfrac{\pi\,r^4}{8}$; $I_{ACPI\ \min} = \pi\,r^4\left(\dfrac{1}{8} - \dfrac{8}{9\,\pi^2}\right)$.

4.20. Calculer le moment d'inertie d'une plaque rectangulaire homogène par rapport à la diagonale *d*.



Réponse : $I_d = \dfrac{a\,b}{6}\,\dfrac{a^2\,b^2}{a^2+b^2}$.

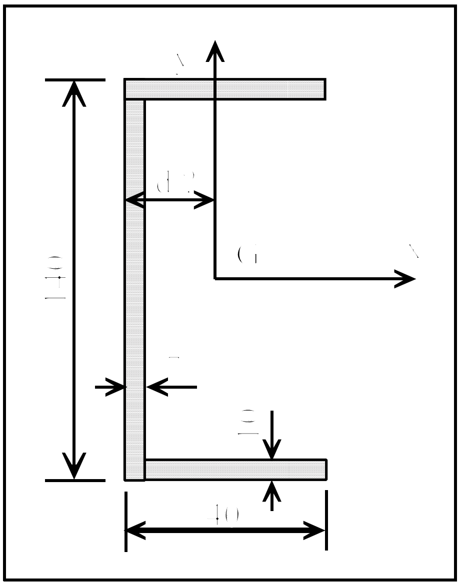
4.21. Déterminer la position des A.C.P.I. d'un triangle isocèle homogène de base *b* et de hauteur *h*; calculer les moments d'inertie correspondants.



Réponses : $I_{ACPI\,\max} = \dfrac{b\,h^3}{36}$

$I_{ACPI\,\min} = \dfrac{b^3\,h}{48}$

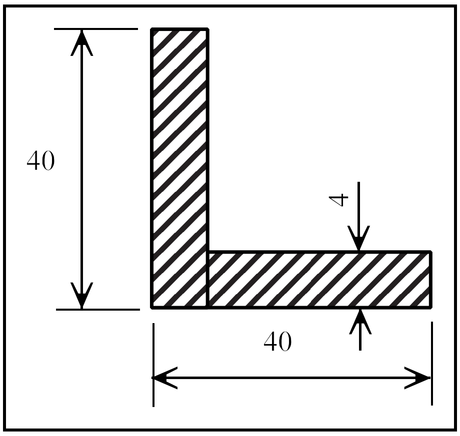
4.22. Calculer la position de G et les moments d'inertie I_x et I_y du profilé ci-contre.



Réponses : $d = 11.55\,mm$

$I_x = 439.5\,cm^4$; $I_y = 22.1\,cm^4$

4.23. Déterminer la position des A.C.P.I. et les moments d'inertie correspondants pour la cornière à branches égales de 40 x 40 x 4.



Réponses : $I_{ACPI\,\max} = 73\,365\,mm^4$

$I_{ACPI\,\min} = 18\,797\,mm^4$

A 45° par rapport à l'horizontale.