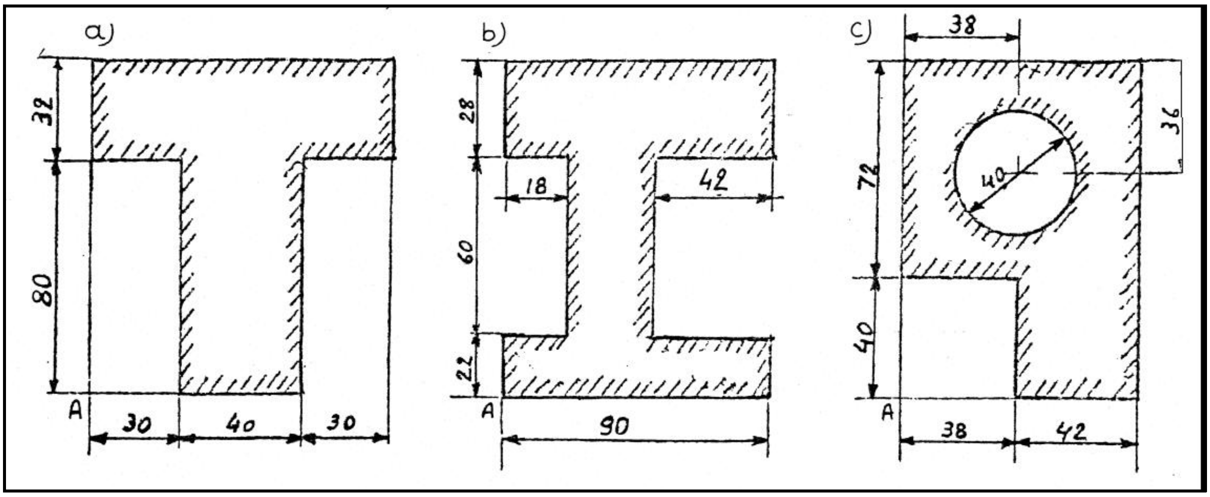
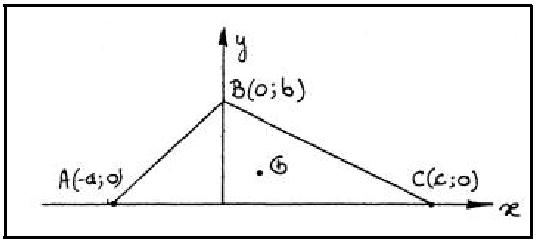
Centre de gravité

4.01. Déterminer la position du centre de masse des surfaces ci-dessous (dimensions en *mm*).



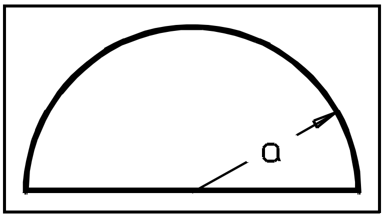
Réponses : en mesurant les coordonnées de G à partir du point A, on trouve :
a) G (50; 68); b) G (41.6; 56.7) ; c) G (46.6; 60.8)

4.02. Déterminer par intégration l'ordonnée y_G et par décomposition l'abscisse x_G du centre de masse du triangle quelconque ABC ci-contre.



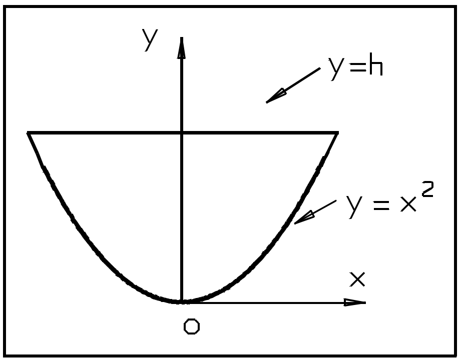
Réponses : $x_G = \frac{c-a}{3}$; $y_G = \frac{b}{3}$.

4.03. Calculer la position du centre de masse d'un demi-disque de rayon a.



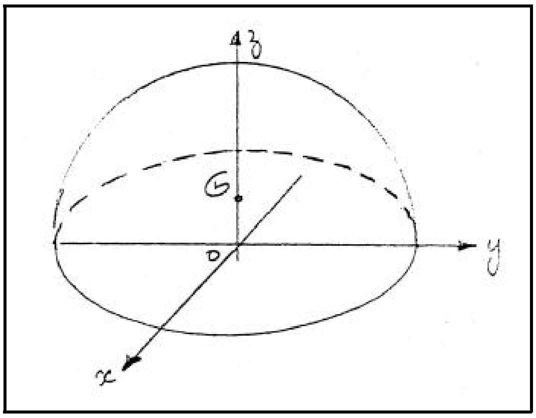
Réponse : $\overline{OG} = \frac{4a}{3\pi}$.

4.04. Déterminer la position du centre de masse G d'une surface délimitée par la courbe $y = x^2$ et de la droite $y = h$.



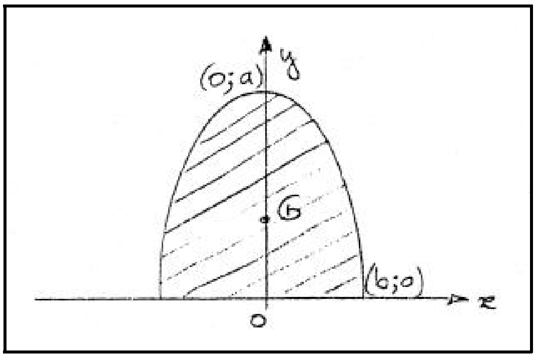
Réponses : $x_G = 0$; $y_G = \frac{3}{5}h$.

4.05. Déterminer la position du centre de masse d'une demi-sphère homogène de rayon *r*.



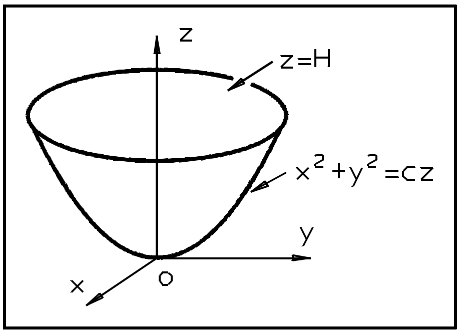
Réponse : $\overline{OG} = \frac{3}{8} r$.

4.06. Déterminer la position du centre de masse d'une demi-ellipse d'équation $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.



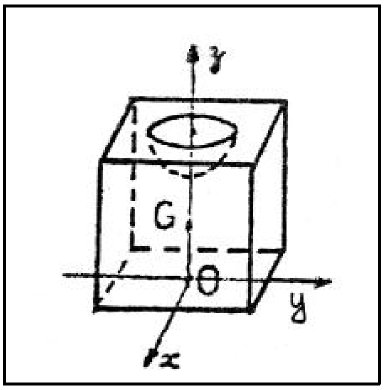
Réponses : $x_G = 0$; $y_G = \frac{4a}{3\pi}$.

4.07. Déterminer la position de G du volume délimité par le paraboloïde de révolution $x^2 + y^2 = cz$ et le plan $z = H$.



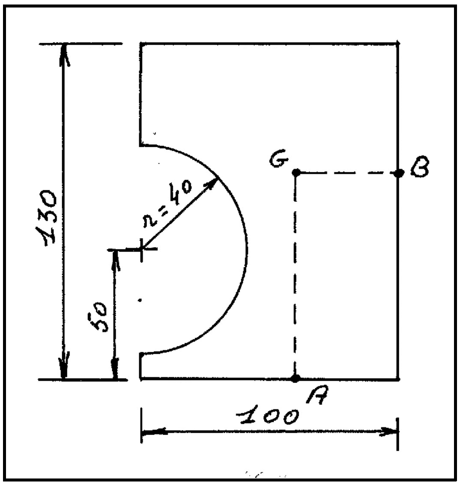
Réponses : $x_G = 0$; $y_G = 0$; $z_G = \frac{2}{3} H$.

4.08. Dans un cube de côté *a*, on enlève sur une des faces une demi-sphère de rayon $r = \frac{a}{n}$ avec $n \geq 2$ .Le centre de la demi-sphère est au centre de la face. Calculer la position de G.



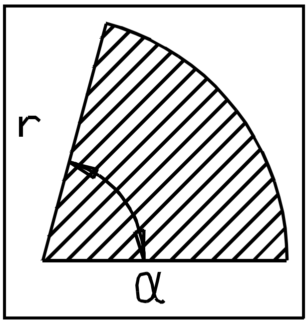
Réponse : $\overline{OG} = \frac{a}{4n} \frac{\left(6n^4 - 8\pi n + 3\pi\right)}{\left(3n^3 - 2\pi\right)}$.

_4.09._ Calculer la position du centre de masse G de la surface ci-contre, cotée en *mm*.



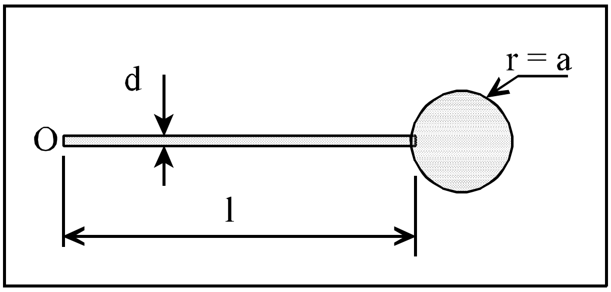
Réponses : $\overline{AG} = 68.5\,mm$;
$\overline{BG} = 42.1\,mm$.

_4.10._ Calculer la position du centre de gravité d'un secteur circulaire (angle au centre α radians) de rayon *r*.



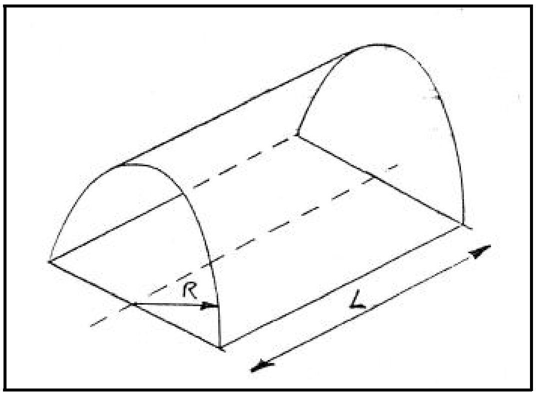
Réponse : $\overline{OG} = \frac{2\,r}{3}\,\frac{\sin(\alpha/2)}{(\alpha/2)}$.

_4.11._ Déterminer la position du centre de masse d'une sphère de rayon $a = 7\,cm$, de masse volumique $\rho_1 = 7\,800\,kg/m^3$, attachée à un fil de fer de longueur $l = 1\,m$, de diamètre $d = 2\,mm$, et de masse volumique $\rho_1 = 7\,800\,kg/m^3$.



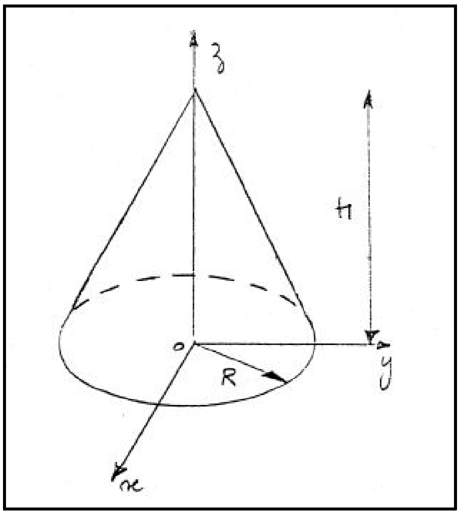
Réponse : $\overline{OG} = 1.0688\,m$.

_4.12._ Déterminer la position du centre de masse d'un demi-cylindre creux, homogène ("*toit de hangar*").



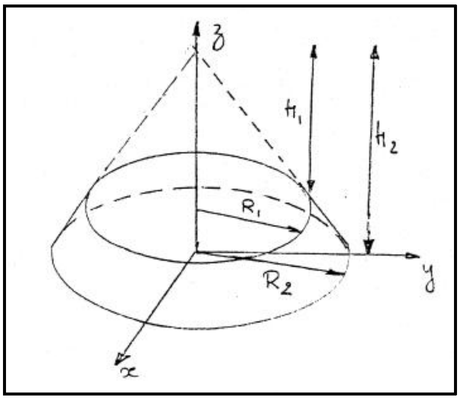
Réponse : G se trouve à l'intersection des deux plans verticaux de symétrie, à une hauteur $\frac{2\,r}{\pi}$.

4.13. Déterminer la position du centre de masse d'un cône *creux* homogène très mince ("*chapeau pointu*").



Réponses : $x_G = 0\,;\ y_G = 0\,;\ z_G = \dfrac{h}{3}$.

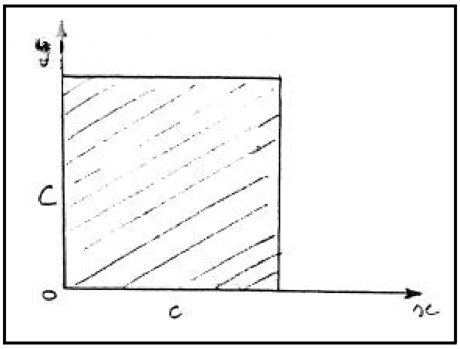
4.14. Déterminer la position du centre de masse d'un tronc de cône *plein* homogène.



Réponses : $x_G = 0\,;\ y_G = 0\,;$

$$z_G = \frac{\dfrac{h_2^4}{4} - h_1^3\,h_2 + \dfrac{3\,h_1^4}{4}}{h_2^3 - h_1^3}.$$

Moment d'inertie

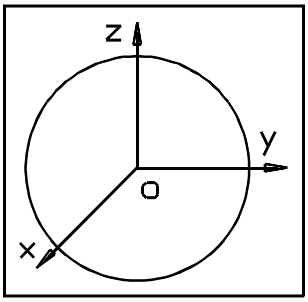


4.15. Calculer les moments d'inertie I_x, I_y et I_O d'un carré homogène de côté c.

Réponses : $I_x = I_y = \dfrac{c^4}{3}$; $I_O = \dfrac{2\,c^4}{3}$.

4.16. Calculer les moments d'inertie J_x, J_y, J_z et J_O d'une sphère *pleine* homogène de rayon r_0 et de masse m.

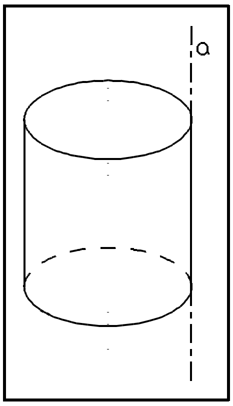
Réponses : $J_x = J_y = J_z = \dfrac{2}{5}\,m\,r_0^2$; $J_O = \dfrac{3}{5}\,m\,r_0^2$.



4.17. Calculer les moments d'inertie J_x, J_y et J_O d'une sphère *creuse* homogène de rayon r ("*coquille sphérique*") et de masse m.

Réponses : $J_x = J_y = J_z = \dfrac{2}{3}\,m\,r^2$;

$J_O = m\,r^2$.



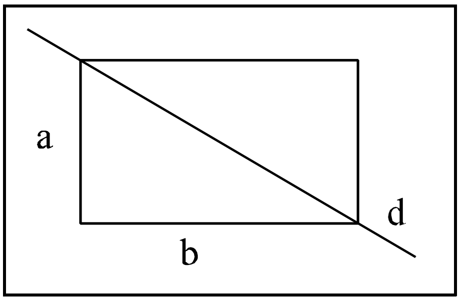
4.18. Calculer le moment d'inertie d'un cylindre creux ("*tuyau*") de rayon r et de masse m par rapport à une génératrice a.

Réponse : $J_a = 2\,m\,r^2$.

4.19. Déterminer la position des A.C.P.I. d'un demi-disque de rayon r; calculer les moments d'inertie correspondants.

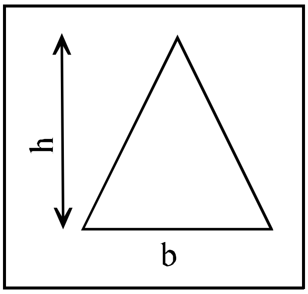
Réponses : $I_{ACPI\,\max} = \dfrac{\pi\,r^4}{8}$; $I_{ACPI\,\min} = \pi\,r^4\left(\dfrac{1}{8} - \dfrac{8}{9\,\pi^2}\right)$.

4.20. Calculer le moment d'inertie d'une plaque rectangulaire homogène par rapport à la diagonale *d*.



Réponse : $I_d = \dfrac{a\,b}{6} \dfrac{a^2\,b^2}{a^2 + b^2}$.

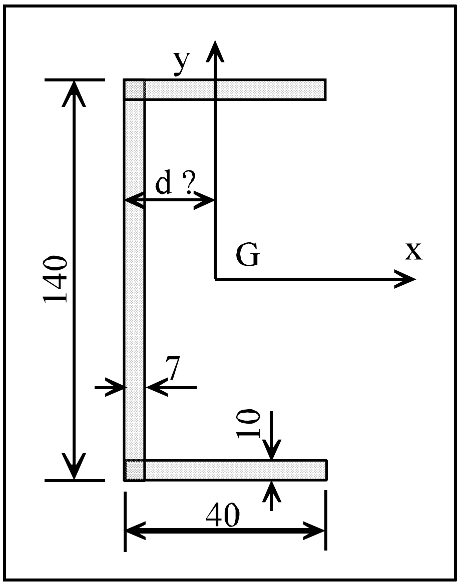
4.21. Déterminer la position des A.C.P.I. d'un triangle isocèle homogène de base *b* et de hauteur *h*; calculer les moments d'inertie correspondants.



Réponses : $I_{ACPI\ \max} = \dfrac{b\,h^3}{36}$;

$I_{ACPI\ \min} = \dfrac{b\,h^3}{48}$.

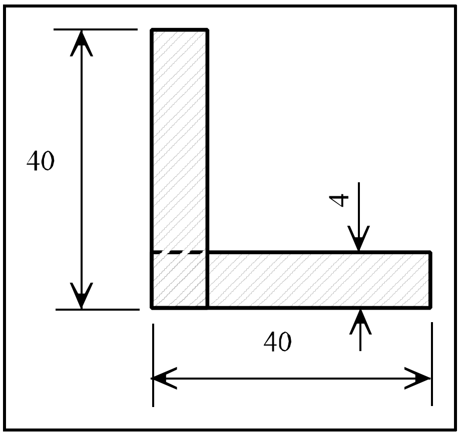
4.22. Calculer la position de G et les moments d'inertie I_x et I_y du profilé ci-contre.



Réponses : $d = 11.55\,mm$;

$I_x = 609\,cm^4$; $I_y = 71\,cm^4$.

4.23. Déterminer la position des A.C.P.I. et les moments d'inertie correspondants pour la cornière à branches égales de 40 x 40 x 4.



Réponses : $I_{ACPI\ \max} = 73\,354\,mm^4$;

$I_{ACPI\ \min} = 18\,786\,mm^4$.