Problèmes sur le chapitre 5 . . . . . ***- ex5.1 -***
Exercices concernant principalement le "*théorème des 3 forces*" (*§ 5.1.5.*) . . . . . ***- ex5.1 -***
Exercices concernant les problèmes de "*statique en 2D*" sans frottement . . . . . ***- ex5.4 -***
Exercices concernant les problèmes de "*frottement*" (*§ 5.3.*) . . . . . ***- ex5.10 -***
Exercices concernant les problèmes d' "*ensemble de solides en 2D*" (*§ 5.2.3.*) (sans frottement) . . . . . ***- ex5.14 -***
Exercices concernant les problèmes d' "*ensemble de solides en 2D*" (*§ 5.2.3.*) (avec frottement) . . . . . ***- ex5.17 -***
Exercices concernant principalement les "*travaux virtuels*" (*§ 5.5.*) . . . . . ***- ex5.20 -***
Exercices concernant principalement la "*statique en 3D"* . . . . . ***- ex5.24 -***
Exercices concernant principalement les "*systèmes triangulés - Crémona*" (*§ 5.6.*) . . . . . ***- ex5.30 -***
Exercices "*intégrés*" . . . . . ***- ex5.34 -***

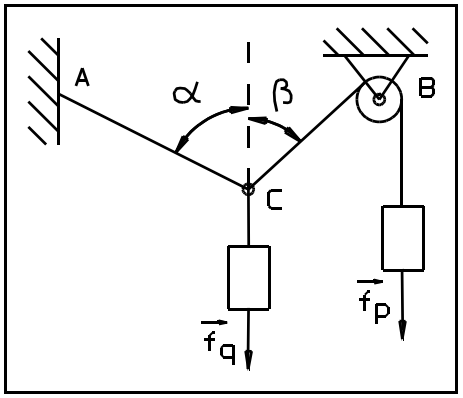
Problèmes sur le chapitre 5

Remarque :
Même si les exercices sont proposés pour une méthode, rien n'empêche de résoudre ceux-ci d'une façon différente.

Exercices concernant principalement le "*théorème des 3 forces*" (*§ 5.1.5.*)

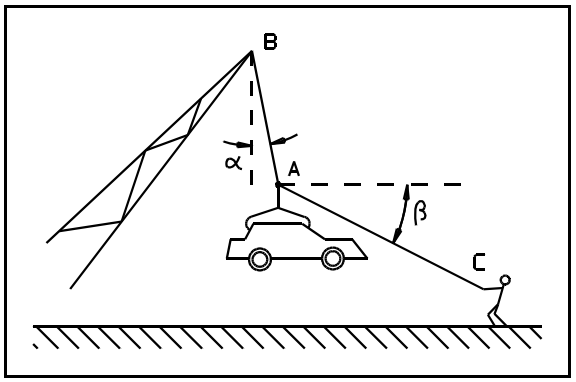
51.01. Un poids $\vec{f}_q$ est suspendu à un petit anneau C par deux cordes $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$. La corde $\overline{AC}$ est attachée en A, tandis que la corde $\overline{BC}$ passe en B sur une poulie sans frottement et porte un poids $\vec{f}_p$.

Si $\left\|\vec{f}_p\right\| = \left\|\vec{f}_q\right\| = 100\ N$ et $\alpha = 70°$, déterminer la valeur de l'angle β à l'équilibre, ainsi que la réaction d'appui en A.



Réponses : $\beta = 40°$; $\left\|\vec{f}_A\right\| = 68.4\ N$

51.02. Lors du déchargement d'un cargo, on soulève une automobile de 15570 N à l'aide d'un câble $\overline{AB}$. Une corde $\overline{AC}$ attachée au point A est tirée de façon à centrer la voiture sur un point précis. L'angle entre le câble et la verticale est $\alpha = 2°$, tandis que celui formé par la corde et l'horizontale est $\beta = 30°$. Déterminer l'effort de traction dans la corde et dans le câble.

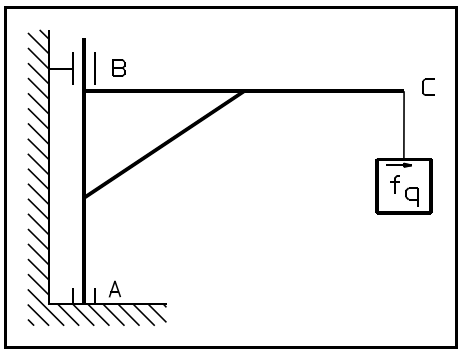


Réponses : $\left\|\vec{f}_{\overline{AC}}\right\| = 641\ N$

$\left\|\vec{f}_{\overline{AB}}\right\| = 15900\ N$

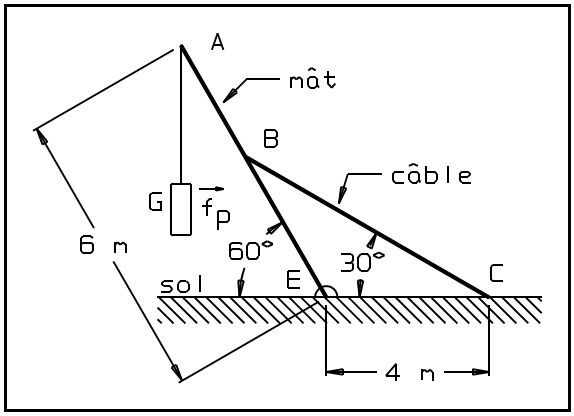
51.03. La grue ci-contre peut tourner autour de son axe $\overline{AB}$. Elle porte une charge $\vec{f}_q$ à son extrémité C.

Si $\overline{AB} = 3\ m$ et $\overline{BC} = 4\ m$, on demande de déterminer les réactions d'appui en A et B (en grandeur et en direction).



Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 5/3\left\|\vec{f}_q\right\|$; $\left\|\vec{f}_B\right\| = 4/3\left\|\vec{f}_q\right\|$

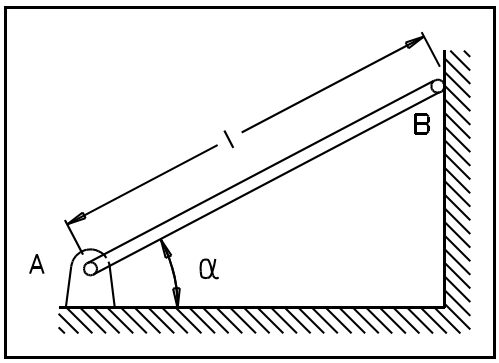
51.04. Un mât de charge $\overline{AE}$ doit soulever une charge maximale de 800 *N*. Il est maintenu en B par un câble $\overline{BC}$ et est articulé en E. Calculer l'effort maximal dans le câble ainsi que la réaction d'appui en E.



Réponses : $\left\|\vec{f}_C\right\| = 1200\ N$

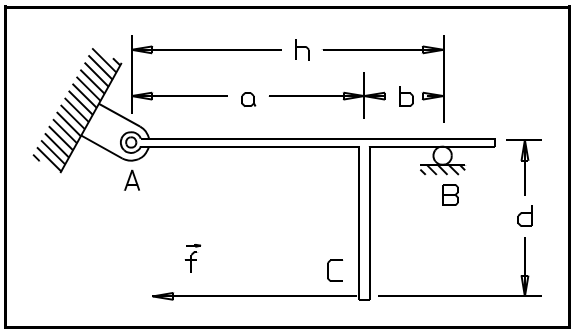
$\left\|\vec{f}_E\right\| = 1743\ N$

51.05. La poutre $\overline{AB}$ de longueur *l* est articulée en A et pose, sans frottement, en B contre un mur vertical. Son poids $\vec{f}_p$ est appliqué au milieu de $\overline{AB}$. La poutre fait un angle α avec l'horizontale. Calculer $\left\|\vec{f}_A\right\|$ et $\left\|\vec{f}_B\right\|$ en fonction de $\left\|\vec{f}_p\right\|$, *l* et α au moyen des équations de la statique. Vérifier le résultat en appliquant le théorème des 3 forces. Calculer les valeurs de $\left\|\vec{f}_A\right\|$ et $\left\|\vec{f}_B\right\|$ pour $\left\|\vec{f}_p\right\| = 500\ N$ et $\alpha = 30°$.



Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 662\ N$; $\left\|\vec{f}_B\right\| = 433\ N$

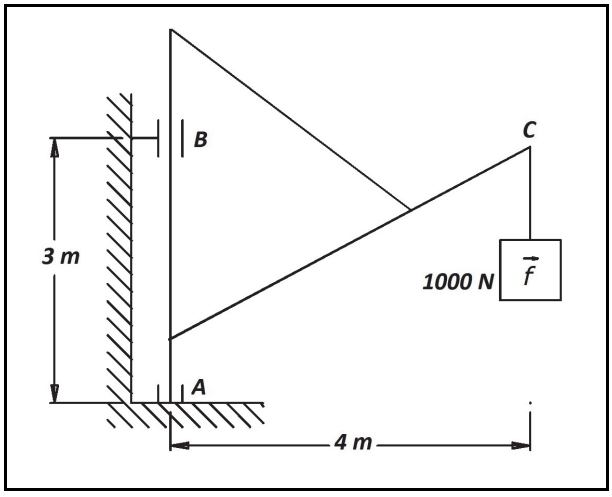
51.06. Un support en TE, articulé en A et s'appuyant en B sur un appui mobile, maintient au point d'attache C un câble qui est tiré par une force $\vec{f}$ horizontale dont le module vaut 500 *N*. Le poids propre de l'ensemble est négligé.
Déterminer les réactions aux appuis A et B.
$a = 450\ mm$; $b = 150\ mm$; $h = 600\ mm$; $d = 300\ mm$.



Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 559\ N$

$\left\|\vec{f}_B\right\| = 250\ N$

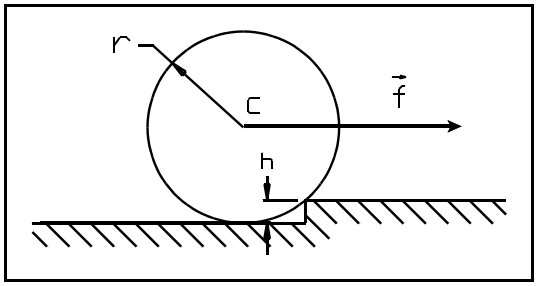
51.07. Le dispositif de levage ci-contre peut tourner autour de l'axe $\overline{AB}$. Lorsque la charge est de 1000 *N*, que valent les réactions aux appuis A et B ?



Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 1667\ N$

$\left\|\vec{f}_B\right\| = 1333\ N$

51.08. Déterminer la force horizontale qu'il faut appliquer au centre C d'une sphère pesant $200\ N$ et de rayon $r = 20\ cm$ pour surmonter un obstacle de hauteur $h = 4\ cm$.

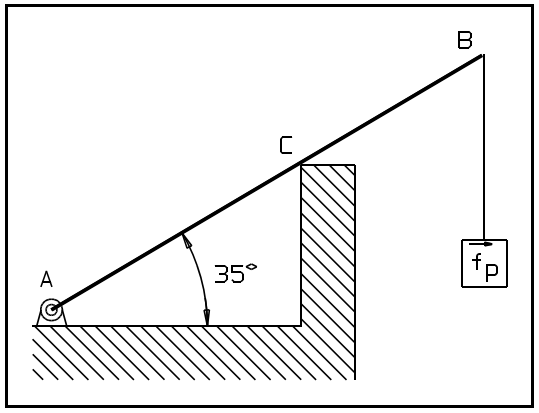


Réponse : $\left\|\vec{f}\right\| = 150\ N$

51.09. La poutre $\overline{AB}$, de 8 *m* de longueur, est articulée en A et fait un angle de 35° avec l'horizontale. En B est suspendue une charge $\vec{f}_p$ de 1600 *N*.

La poutre $\overline{AB}$ repose sur un appui simple en C; $\overline{AC} = 4.71\ m$.

Déterminer les réactions en A et C.



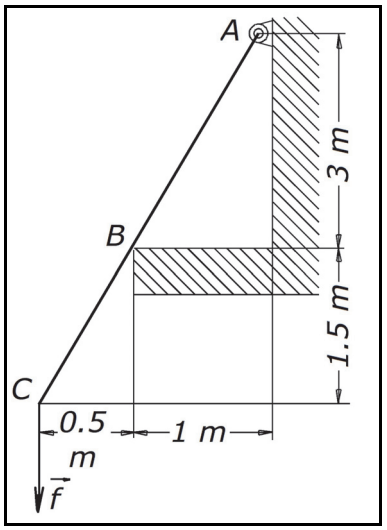
Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 1296.3\ N$

$\left\|\vec{f}_C\right\| = 2\,226.2\ N$

51.10. La poutre $\overline{AC}$ est suspendue en A; on considère que B est un appui mobile. La poutre supporte en C une charge $\left\|\vec{f}\right\|$ de 18000 *N*. Calculer les réactions d'appui $\left\|\vec{f}_A\right\|$ et $\left\|\vec{f}_B\right\|$:

- par les équations de la statique;
- par application du théorème des trois forces.

Que deviennent les réactions si on tient compte du poids de la poutre ($\left\|\vec{f}_p\right\| = 4\,000\ N$, appliqué en son milieu) ?

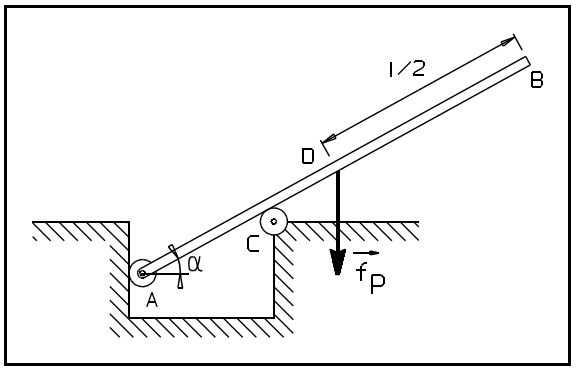


Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 17.31\ kN$; $\left\|\vec{f}_B\right\| = 8.54\ kN$

Avec le poids de la poutre :

$\left\|\vec{f}_A\right\| = 21.02\ kN$; $\left\|\vec{f}_B\right\| = 9.49\ kN$

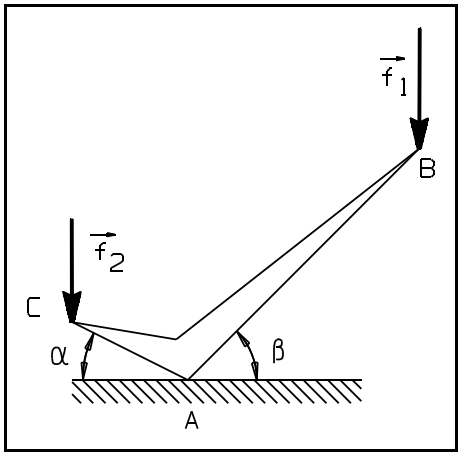
51.11. Une barre $\overline{AB}$ de poids $\left\|\vec{f}_p\right\|$ et de longueur *l* est appuyée, via deux appuis mobiles A et C, dans une tranchée de largeur *d*. Trouver la position d'équilibre de la barre, déterminée par α, fonction de *d* et de *l*, de deux manières différentes.



Réponse : $\alpha = \arccos\left(\sqrt[3]{\dfrac{2\,d}{l}}\right)$

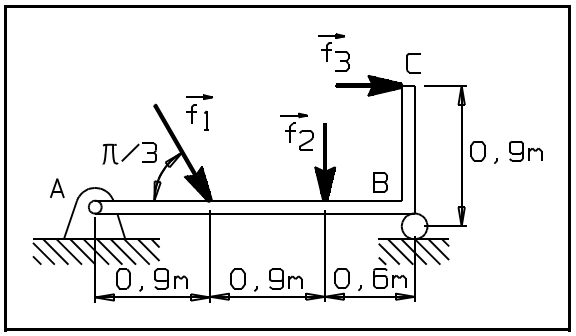
Exercices concernant les problèmes de "*statique en 2D*" sans frottement

52.01. Un levier $\overline{BAC}$ (dont nous négligeons le poids) est en équilibre sous l'action d'une charge $\vec{f}_2$, d'une force appliquée $\vec{f}_1$ et de la réaction à l'appui A.
Que vaut $\left\|\vec{f}_1\right\|$ en fonction des dimensions du levier et des angles α et β ?



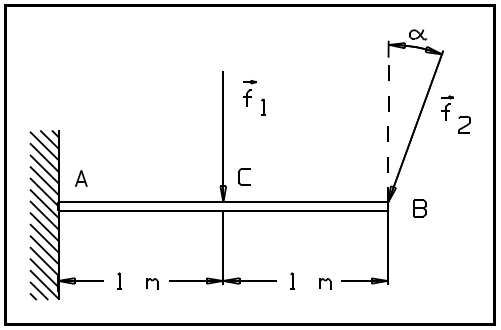
Réponse : $\left\|\vec{f}_1\right\| = \left\|\vec{f}_2\right\| \dfrac{\overline{AC}\cos\alpha}{\overline{AB}\cos\beta}$

52.02. La poutre en "*L*" $\overline{ABC}$ ci-contre est articulée en A et posée sur un appui mobile en B. Elle est soumise à 3 forces :
$\left\|\vec{f}_1\right\| = 750\ N$; $\left\|\vec{f}_2\right\| = 500\ N$ et
$\left\|\vec{f}_3\right\| = 400\ N$.
Calculer les réactions aux appuis $\left\|\vec{f}_A\right\|$ et $\left\|\vec{f}_B\right\|$.



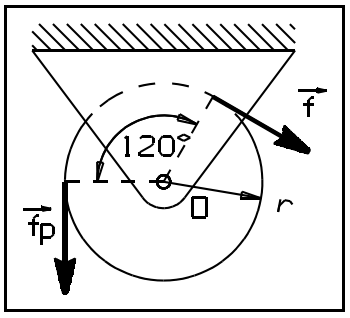
Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 863.5\ N$; $\left\|\vec{f}_B\right\| = 768.6\ N$

52.03. Soit une poutre encastrée en A et soumise à l'action de deux forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ telles que :
$\left\|\vec{f}_1\right\| = 200\ N$ et $\left\|\vec{f}_2\right\| = 100\ N$ inclinée de $\alpha = 20°$ par rapport à la verticale. Calculer la réaction $\vec{f}_A$ et le moment réactif $\vec{m}_A$ en A.



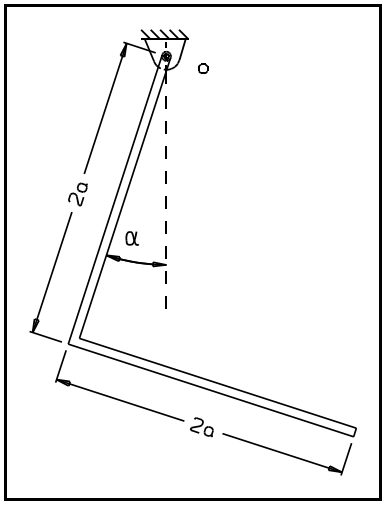
Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 296\ N$; $\vec{m}_A = 387.9\ \vec{1}_z$

52.04. Une poulie de rayon $r = 15\,cm$ est fixée en O. Un câble est enroulé sur cette poulie : l'arc embrassé α vaut 120°. Un brin du câble est vertical et supporte une charge $\left\|\vec{f}_p\right\| = 1000\ N$. Quelle force faut-il appliquer à l'autre brin pour obtenir l'équilibre ? Quelle est la réaction en O, si la poulie pèse 150 *N* (vecteur appliqué en O). On néglige le poids du câble et le frottement entre câble et poulie.



Réponses : $\left\|\vec{f}\right\| = 1000\ N$; $\left\|\vec{f}_O\right\| = 1863.5\ N$
(inclinée de 27.7° sur la verticale)

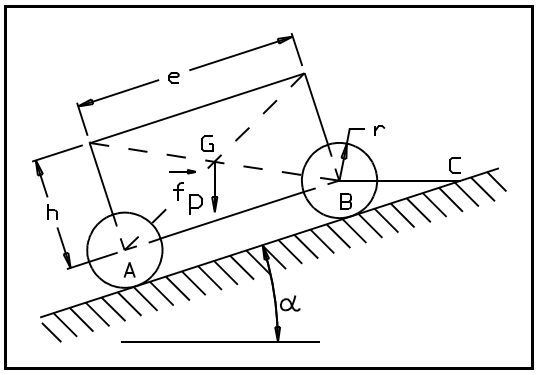
52.05. Une équerre à 90° est constituée de 2 bras métalliques de poids $\vec{f}_p$ et de longueur $2a$ (la force $\vec{f}_p$ est appliqué au milieu de chaque bras). On la suspend par l'extrémité d'un bras. Quel angle α ce bras fait-il avec la verticale ? Quelle est la réaction au point d'attache O ?



Réponses : $\left\|\vec{f}_O\right\| = 2\left\|\vec{f}_p\right\|$; $\alpha = 18.435°$

52.06. Le croquis ci-contre (qui n'est pas tracé à l'échelle), représente une "*caisse à savons*" maintenue à l'arrêt au sommet d'une rue inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale. Les dimensions de l'engin sont :

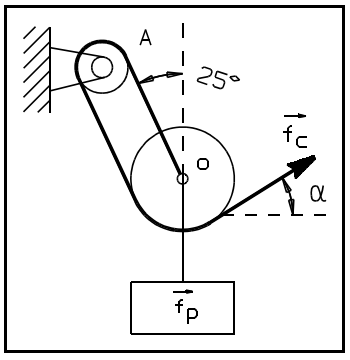
- longueur de la caisse (entr'axe des roues) : $e = 1.8\ m$;
- hauteur de la caisse : $h = 0.9\ m$;
- rayon des roues : $r = 0.3\ m$.



Le poids total vaut $\left\|\vec{f}_p\right\| = 1000\ N$ et est appliqué en G (intersection des diagonales du rectangle). Un câble, horizontal, est accroché au niveau de l'axe de roue, et relié au sol en C. Déterminer les réactions d'appui des roues au sol, en A et en B, et la tension dans le câble en C.

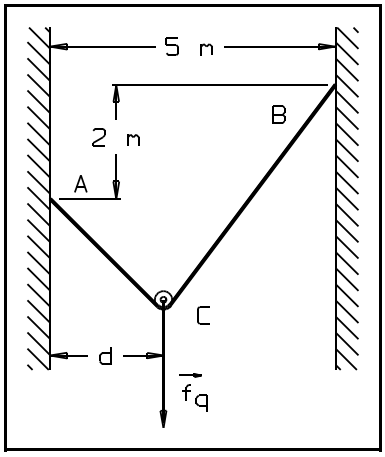
Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 558\ N$; $\left\|\vec{f}_B\right\| = 596.7\ N$; $\left\|\vec{f}_C\right\| = 577.3\ N$

52.07. Pour soulever une caisse de 1000 *N*, on utilise un palan à corde réalisé selon le dessin ci-contre : la corde est attachée au centre O de la poulie inférieure; elle passe ensuite sur la poulie A avant de revenir sur l'extérieur de la poulie O. Calculer la grandeur et la direction de la force $\vec{f}_C$ appliquée à l'extrémité de la corde.



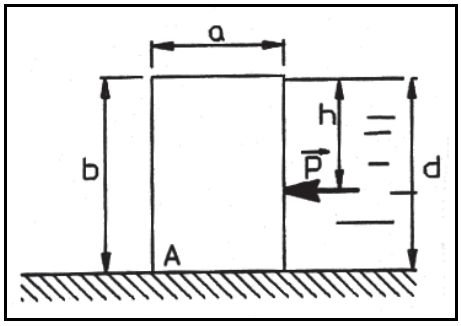
Réponses : $\alpha = 32.30°$; $\left\|\vec{f}_C\right\| = 426.1\ N$

52.08. Le câble $\overline{ACB}$ est attaché en A et en B à deux parois verticales. Il supporte, par l'intermédiaire de la poulie C, une charge $\vec{f}_q$ de 2000 *N*. La longueur du câble est de 7 *m*. Déterminer à quelle distance *d* de la paroi de gauche, la poulie se stabilisera en équilibre et quelle sera, à ce moment, la tension dans le câble.



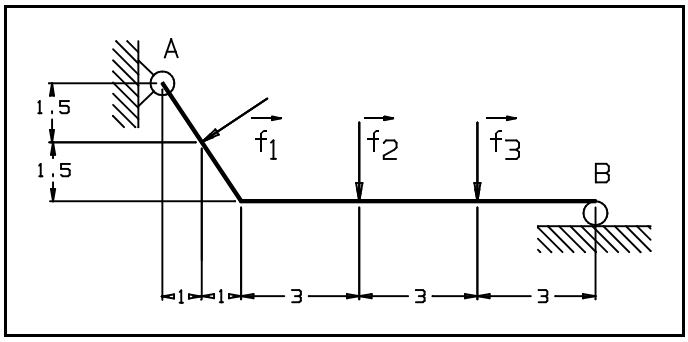
Réponses : $d = 1.48\ m$; $\left\|\vec{f}_{câble}\right\| = 1429\ N$

52.09. Calculer l'épaisseur *a* du barrage en béton de forme rectangulaire pour qu'il ne puisse pas pivoter autour du point A sous l'effet des pressions hydrostatiques lors d'un trop plein ($d = b = 4\ m$). *Notes* :
Poids volumique du béton : 24 kN/m^3
Pression hydrostatique $\left\|\vec{p}\right\| = 9\,810 \times h\ N/m^2$;
h étant la profondeur où règne $\vec{p}$.



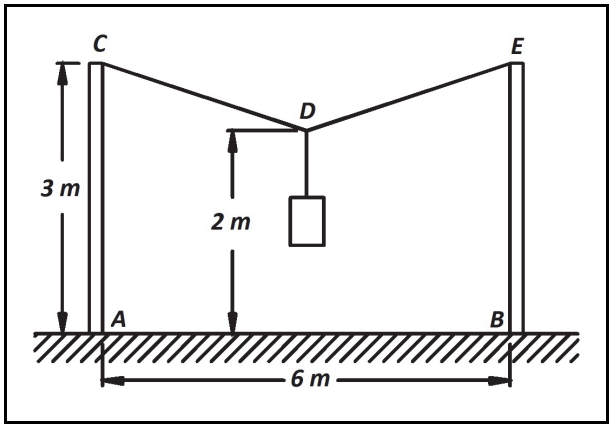
Réponse : $a = 1.48\ m$

52.10. Une poutre cintrée repose sur un appui à rotule en A et sur un appui mobile en B. Elle supporte 3 charges $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ et $\vec{f}_3$, de directions perpendiculaires à la poutre. Déterminer les réactions d'appui en A et B.
$\left\|\vec{p}_1\right\| = \left\|\vec{p}_3\right\| = 30\ kN$;
$\left\|\vec{p}_2\right\| = 20\ kN$. Les dimensions sont données en *m*.



Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 39.66\ kN$; $\left\|\vec{f}_B\right\| = 35.83\ kN$

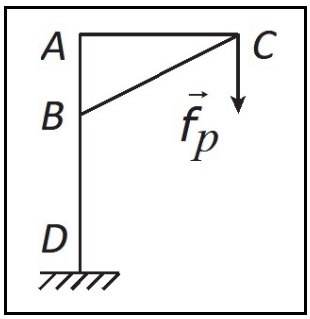
52.11. Une masse de 200 *N* est suspendue à 2 *m* de hauteur par l'intermédiaire d'un câble $\overline{CDE}$. Les articulations C et E constituent respectivement les extrémités de deux mâts encastrés $\overline{AC}$ et $\overline{BE}$ d'une hauteur de 3 *m* et distants de 6 *m*. On demande de calculer les réactions d'appui et les moments réactifs en A et B.



Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = \left\|\vec{f}_B\right\| = 316\ N$

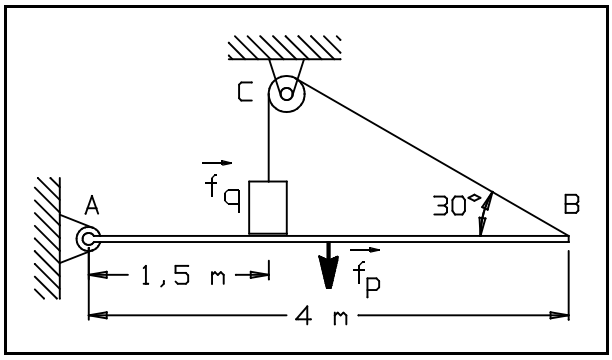
$$\left\|\vec{m}_{enc\ A}\right\| = \left\|\vec{m}_{enc\ B}\right\| = 899.4\ Nm$$

52.12. Un poteau encastré en D supporte en son extrémité C une charge $\left\|\vec{f}_p\right\| = 300\ N$; connaissant les dimensions $\overline{AC} = 1.2\ m$ et $\overline{BC} = 1.5\ m$, on demande de calculer la (les) réaction(s) en D.



Réponses : $\left\|\vec{f}_D\right\| = 300\ N$; $\left\|\vec{m}_{enc\ D}\right\| = 360\ Nm$

52.13. La poutre $\overline{AB}$, de 4 *m* de long, a un poids $\vec{f}_p$ de 500 *N*; elle est articulée en A, et est soutenue en B grâce à un câble. Ce câble passe sur une poulie C; à son autre extrémité, un poids $\vec{f}_q$ de 1500 *N* est accroché, tout en reposant sur la poutre. La longueur de ce câble est telle que la poutre est horizontale.

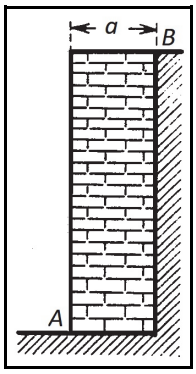


a) Déterminer $\left\|\vec{f}_A\right\|$, la réaction d'appui en A.

b) Déterminer $\left\|\vec{f}_t\right\|$, la tension dans la corde.

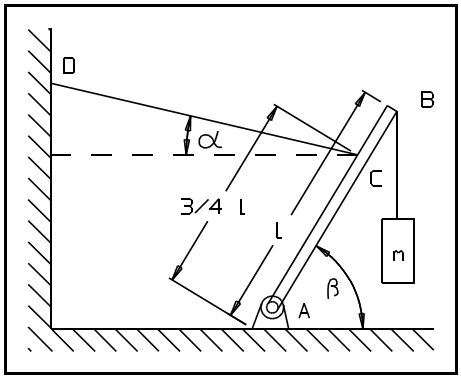
Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 1007\ N$; $\left\|\vec{f}_t\right\| = 929\ N$

52.14. Un remblai est soutenu par un mur vertical $\overline{AB}$. Trouver la largeur *a* nécessaire du mur si la pression de la terre sur le mur, dirigée horizontalement, est appliquée au tiers de sa hauteur et vaut 60 *kN/m* (autrement dit : pour un mètre de longueur de mur); la masse volumique du maçonnage est de 2000 kg/m^3. On négligera les frottements entre le mur et la terre.



Réponse : $a = 1.43\ m$

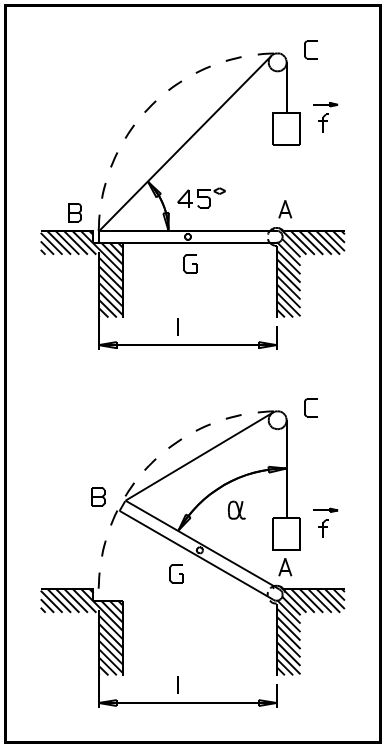
52.15. Une poutre uniforme $\overline{AB}$ de masse égale à 300 *kg* est soutenue par un câble $\overline{CD}$, comme représenté à la figure ci-contre. La base de la poutre est fixée à une articulation et son extrémité supérieure supporte une masse *m* de 500 *kg*. Déterminer la tension dans le câble de support ainsi que la réaction en A.
$\alpha = 25°$; $\beta = 65°$.



Réponses : $\left\|\vec{f}_{câble}\right\| = 3593\ N$; $\left\|\vec{f}_A\right\| = 7109\ N$

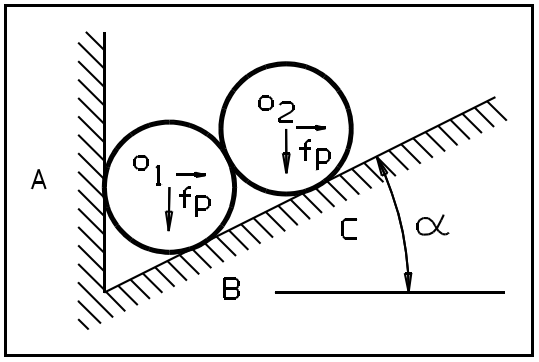
52.16. a) Une passerelle fonctionnant à la manière d'un pont-levis est articulée en A et peut prendre appui sur le sol en B. Un câble accroché en B s'enroule sur une poulie C et soutient un contrepoids $\vec{f}$ de 2200 *N*. Le poids de la passerelle est de 4000 *N* (point d'application en G). Vérifiez que la passerelle dans sa position basse exerce un effort sur le sol en B, malgré l'effet du contrepoids; déterminez la norme de cet effort $\vec{f}_B$.

b) On soulève la passerelle et on constate que dans une certaine position elle reste en équilibre sous le seul effet du contrepoids. Déterminez alors la valeur de l'angle α qu'elle fait avec la direction verticale.



Réponses : a) $\left\|\vec{f}_B\right\| = 444\ N$ b) $\alpha = 67°$

52.17. Deux sphères identiques (diamètre $d = 1200\,mm$, poids $\left\|\vec{f}_p\right\| = 1500\ N$) sont supportées par un mur vertical et un plan incliné ($\alpha = 40°$). Déterminer les trois réactions d'appui en A, B et C, si on néglige les frottements.

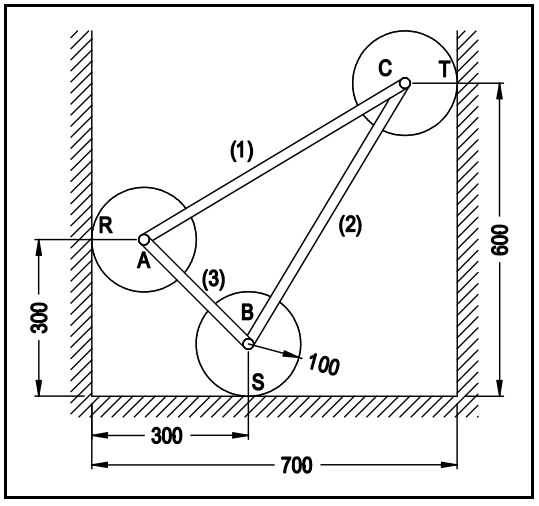


Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 2\,517\ N$

$\left\|\vec{f}_B\right\| = 2\,767\ N$

$\left\|\vec{f}_C\right\| = 1149\ N$

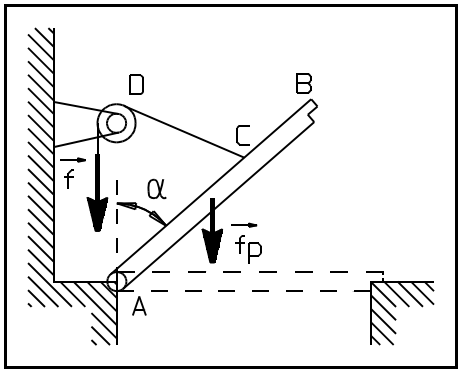
52.18. Trois disques de rayon 100 *mm* pèsent chacun 15 *N*. Ils sont situés aux extrémités A, B, C d'un système de trois barres (1), (2) et (3) ; chaque disque peut librement tourner autour de l'articulation qui est son centre. Le tout est déposé dans une tranchée à parois verticales, suivant le schéma et les dimensions ci-contre. Déterminer les normes des réactions d'appui $\vec{f}_R$, $\vec{f}_S$ et $\vec{f}_T$, en R, S et T.



Réponses : $\left\|\vec{f}_R\right\| = 5\ N$; $\left\|\vec{f}_S\right\| = 45\ N$

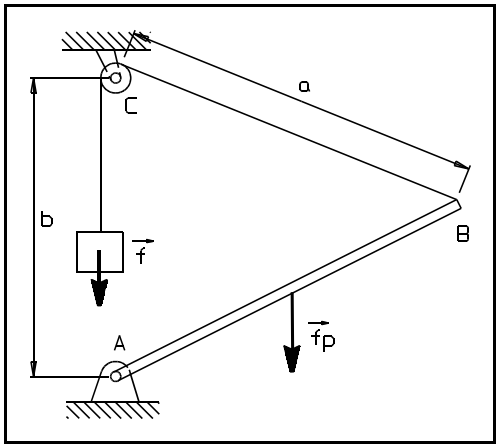
$\left\|\vec{f}_T\right\| = 5\ N$

52.19. La trappe $\overline{AB}$ est levée au moyen d'un câble passant par une poulie D (de rayon considéré nul). Rechercher l'effort $\vec{f}$ dans le câble et la réaction en A, en fonction de l'angle α. Que valent $\left\|\vec{f}_A\right\|$ et $\left\|\vec{f}_C\right\|$ pour $\alpha = 0°$ et pour $\alpha = 90°$?
$\overline{AD} = \overline{AC}$; $\overline{AC} = 2/3\ \overline{AB}$.



Réponses :
$$\left\|\vec{f}_A\right\|_{0°} = \left\|\vec{f}_p\right\| ; \left\|\vec{f}_C\right\|_{0°} = 0$$
$$\left\|\vec{f}_A\right\|_{90°} = \sqrt{5/8}\left\|\vec{f}_p\right\|$$
$$\left\|\vec{f}_C\right\|_{90°} = 3/\left(2\sqrt{2}\right)\left\|\vec{f}_p\right\|$$

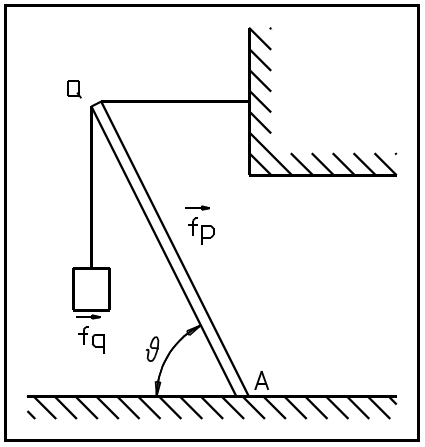
52.20. La barre $\overline{AB}$, longue de 1.6 *m*, d'un poids $\left\|\vec{f}_p\right\| = 600\ N$ (appliqué en son milieu) est maintenue en équilibre par un câble $\overline{BC}$, passant sur la poulie C et supportant une charge $\left\|\vec{f}\right\| = 400\ N$. La poulie C est sur la verticale de l'articulation A. Calculer le rapport a/b des distances $\overline{BC} = a$ et $\overline{CA} = b$ lorsque l'équilibre est réalisé (le diamètre de la poulie est négligé par rapport aux autres dimensions).



Réponse :
$$\frac{a}{b} = 2\,\frac{\left\|\vec{f}\right\|}{\left\|\vec{f}_p\right\|} = \frac{4}{3}$$

Exercices concernant les problèmes de "*frottement*" (*§ 5.3.*)

53.01. Une poutre poutre uniforme de poids $\vec{f}_p$ et de longueur l est inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale. Elle supporte par son extrémité supérieure, au point Q, un poids $\vec{f}_q$. Son extrémité supérieure est soutenue par une autre corde, horizontale, reliée au mur; son extrémité inférieure repose, en A, sur un plancher rugueux (= frottement).

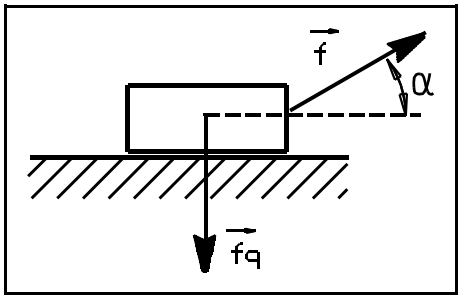


a) Déterminer la réaction d'appui du plancher sur la poutre en A.
b) Déterminer la tension dans la corde horizontale.
c) Quelle doit être le coefficient de frottement minimum entre le plancher et la poutre pour qu'il y ait équilibre ?

Données numériques :
$\theta = 45°$; $\left\|\vec{f}_p\right\| = 1000\ N$; $\left\|\vec{f}_q\right\| = 2\,000\ N$; $l = 4\ m$.

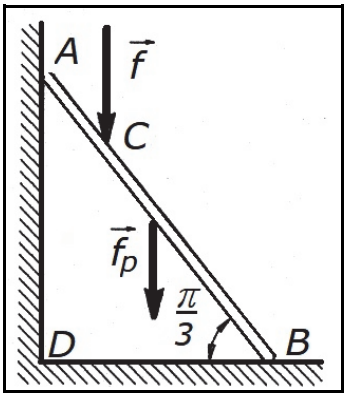
Réponses : a) $\left\|\vec{f}_A\right\| = 3905\ N$ b) $\left\|\vec{f}_{corde}\right\| = 2\,500\ N$ c) $\mu_{s\,A} = 0.83$

53.02. Déterminer quelle force $\vec{f}$ faisant un angle α avec l'horizontale, il faut appliquer à une charge $\vec{f}_q$ reposant sur un plan horizontal, pour la déplacer. Le coefficient de frottement est μ_s. Après avoir établi la formule générale, calculer $\left\|\vec{f}\right\|$ pour $\left\|\vec{f}_q\right\| = 100\ N$, $\alpha = \pi/6$ et $\mu_s = 0.6$.



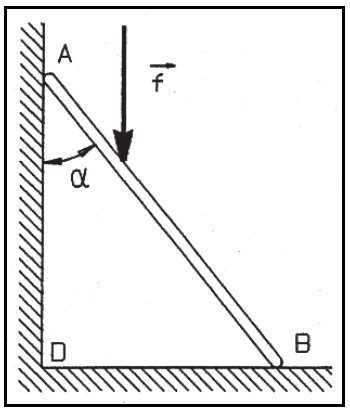
Réponse : $$\left\|\vec{f}\right\| = \frac{\mu_s \left\|\vec{f}_q\right\|}{\cos\alpha + \mu_s \sin\alpha} = 52\ N$$

53.03. Une échelle placée contre un mur fait un angle de $\pi/3$ avec l'horizontale. Elle pèse $\left\|\vec{f}_p\right\| = 60\ N$, mesure 3 m de haut et supporte une personne de 700 N à une distance $\overline{BC} = 2\ m$ du sol. Montrer que le problème de la recherche des réactions d'appui est insoluble, si on ne tient pas compte du frottement. Calculer les normes de $\vec{f}_A$ et $\vec{f}_B$ sans frottement, mais en supposant l'échelle retenue par une corde $\overline{BD}$.



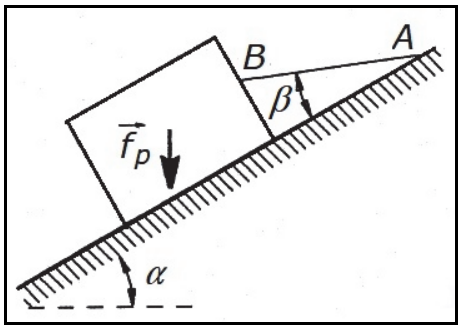
Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = \left\|\vec{f}_{\overline{BD}}\right\| = 287\ N$; $\left\|\vec{f}_B\right\| = 760\ N$

53.04. Une échelle $\overline{AB}$ de longueur *l* est posée sur le sol en B et contre un mur vertical en A. Le coefficient de frottement de l'échelle contre le mur et le sol est μ_s. Déterminer la limite supérieure de l'angle α pour qu'une personne chargée, représentée par la force $\vec{f}$ puisse se déplacer jusqu'au sommet de l'échelle sans que celle-ci glisse.



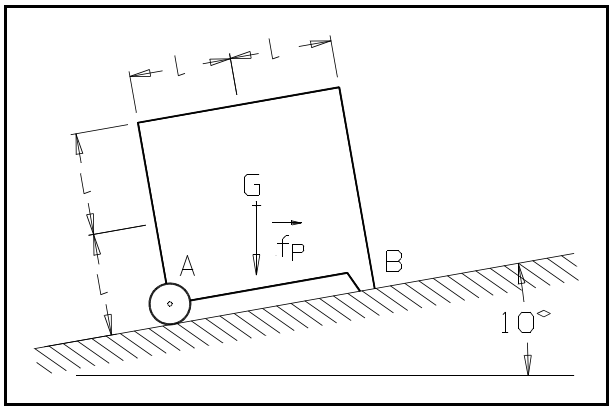
Réponse : $\alpha \leq \arctan \mu_s = \varphi_0$

53.05. Un bloc de poids $\vec{f}_p$ est maintenu sur un plan, incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, par un câble $\overline{AB}$. Le câble fait un angle β avec le plan incliné. Calculer l'effort $\left\|\vec{f}\right\|$ dans ce câble, en fonction de $\left\|\vec{f}_p\right\|$, α, β et μ_s, coefficient de frottement entre bloc et plan.



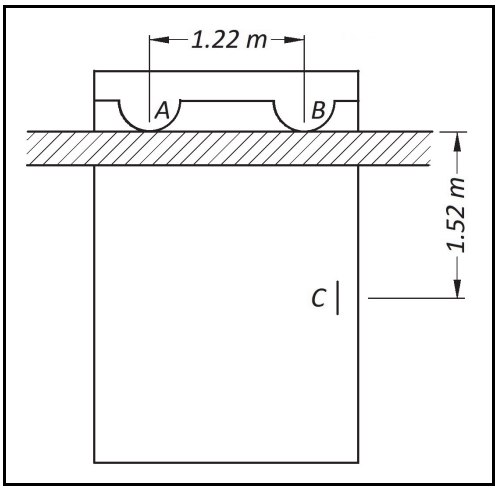
Réponse : $\left\|\vec{f}\right\| = \left\|\vec{f}_p\right\| \dfrac{\left(\sin\alpha - \mu_s \cos\alpha\right)}{\left(\cos\beta + \mu_s \sin\beta\right)}$

53.06. Un solide de poids $\vec{f}_P$ (appliqué en son centre de masse G) est appuyé sur un plan via un appui mobile A et un <u>patin avec frottement</u> en B. En inclinant lentement et progressivement le plan, on constate que le solide ne se met à glisser sur le plan que lorsque l'inclinaison de ce dernier est supérieure à 10°.
Déterminer μ_s, le coefficient de frottement statique entre patin et plan, sachant que $\left\|\vec{f}_p\right\| = 1000\ N$ et $l = 1\,m$.



Réponse : $\mu_s = 0.43$

53.07. Une porte coulissante de 800 *N* est suspendue à un rail. Les coefficients de frottement statique entre le rail et la porte aux points A et B sont respectivement $\mu_{s\,A} = 0.20$ et $\mu_{s\,B} = 0.30$.
Déterminer la force horizontale qui doit être appliquée à la poignée C de la porte de façon à la déplacer vers la droite.

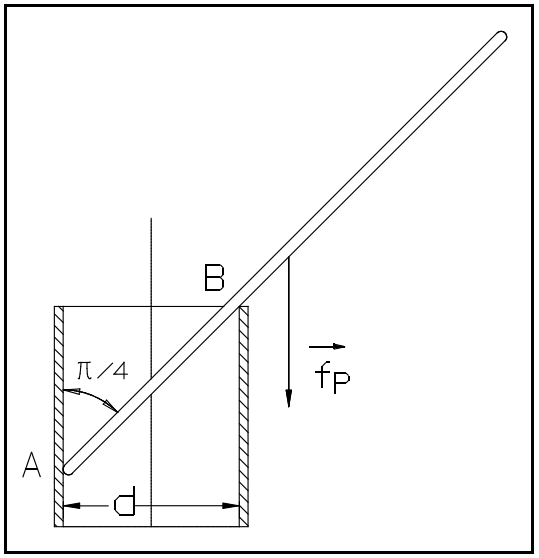


Réponse : $\left\|\vec{f}_c\right\| = 177.9\ N$

53.08. Une tige homogène de poids $\vec{f}_P$ et de longueur *l* s'appuie en A et B sur la paroi intérieure et sur le rebord d'un tube à axe vertical. La tige fait un angle de $\pi/4$ avec l'axe du tube. Le coefficient d'adhérence μ_s aux deux contacts tige-cylindre vaut 0.15. Le diamètre intérieur du tube est $d = 80\,mm$.

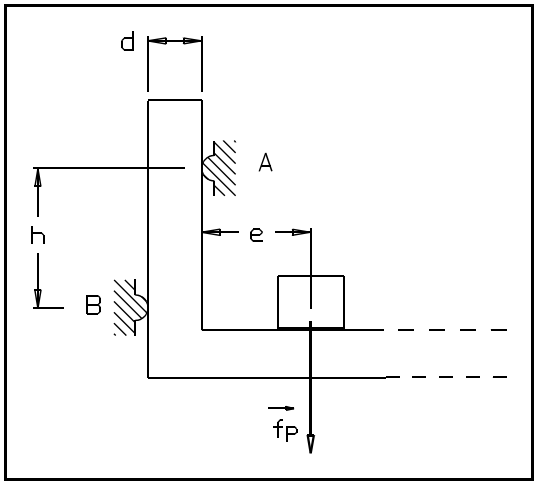
a) Entre quelles limites doit être comprise la longueur *l* de la tige pour qu'elle puisse être en équilibre ?

b) Si le frottement est inexistant aux deux contacts tige-cylindre $(\mu_s = 0)$, existe-il une longueur *l* qui permette l'équilibre ? Si oui, que vaut-elle ?



Réponses : a) $354 < l < 668\,mm$
b) $l = 452.5\,mm$

53.09. Une barre coudée à angle droit s'appuie par sa partie verticale contre les saillies A et B pour lesquelles la différence de niveau est égale à *h*. Une charge $\vec{f}_P$ peut se déplacer sur la partie horizontale de la barre; sa position est repérée par *e*. Négligeant le poids de la barre, trouver pour quelle valeur de la largeur *d* l'ensemble pourra être maintenu en équilibre, quelle que soit la position de la charge. Le coefficient de frottement de la barre contre les éléments de guidage est égal à μ_s.

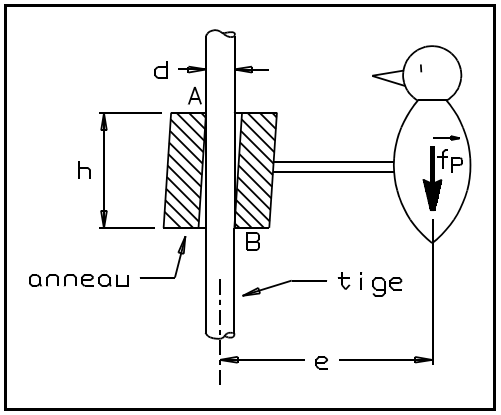


Réponse : $d \geq \dfrac{h}{\mu_s} - 2\,e$

53.10. Un jouet est constitué d'une figurine représentant un pivert, de poids $\vec{f}_P$, fixé sur un anneau de bois, de hauteur $h = 16\,mm$; cet anneau, percé d'un diamètre $d + \varepsilon$, est monté sur une tige en acier, de diamètre $d = 4\,mm$. Le coefficient d'adhérence bois-acier vaut $\mu_s = 0.45$; on considère que le contact entre anneau et tige se produit aux seuls points A et B.

a) Lorsque la tige est verticale, déterminer la valeur limite $e_{\lim}$ pour laquelle le jouet ne glissera pas le long de la tige.

b) Le mobile se mettrait-il en mouvement pour $e < e_{\lim}$ ou pour $e > e_{\lim}$? Justifier !

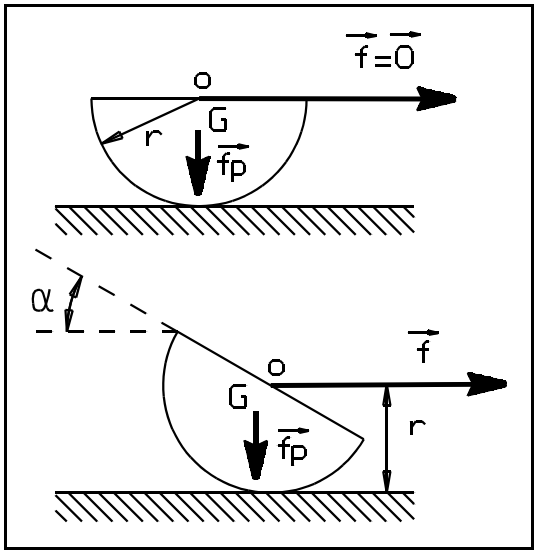


Réponses : a) $e_{\lim} = \dfrac{2\,e}{\mu_s} = 17.8\,mm$ b) Pour $e < e_{\lim}$ (A cause des angles de frottement)

53.11. Un demi-cylindre de rayon $r = 250\,mm$, est posé sur un plan horizontal. Le coefficient de frottement au contact du demi-cylindre avec le sol est $\mu_s = 0.30$.

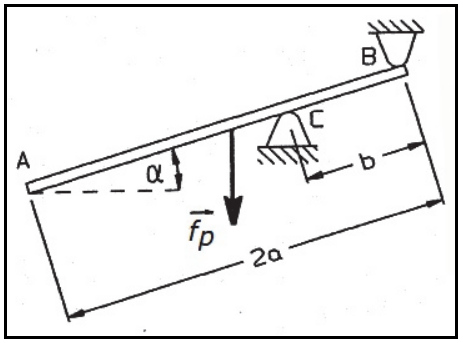
On attache en O une corde sur laquelle on exerce un effort $\vec{f}$ horizontal (sa ligne d'action restant ainsi toujours à une distance *r* du sol). On constate que le corps roule d'abord puis se met à glisser. Préciser la position prise par le corps lorsqu'il est prêt à glisser (détermination de l'angle α).

Note : le poids $\vec{f}_P$ du demi-cylindre est appliqué en G, tel que $\overline{OG} = 106\,mm$.



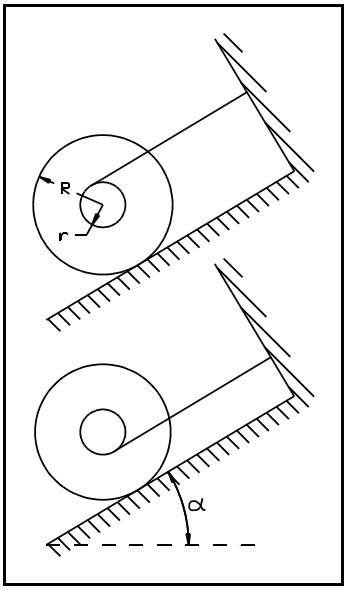
<u>*Réponse*</u> : $\alpha = \pi/4$

53.12. Une barre $\overline{AB}$ de longueur 2*a*, inclinée d'un angle α sur l'horizontale, est maintenue en équilibre par deux appuis C et B distants de *b*. Le poids $\vec{f}_P$ de la barre est appliqué au milieu de $\overline{AB}$. La distance *b* est plus petite que *a*. Le coefficient de frottement entre barre et appuis est μ_s. Déterminer l'angle limite α_{lim} d'équilibre de la barre en fonction de μ_s et des dimensions.



<u>*Réponse*</u> : $\tan\alpha_{\lim} = \mu_s \dfrac{(2\,a - b)}{b}$

53.13. Un yoyo de masse *m* se trouve posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Sachant que le coefficient d'adhérence μ_s vaut 0.35, on demande de déterminer l'angle α maximum tel que le yoyo reste immobile, pour chacune des deux configurations représentées ci-contre.
Que vaut alors l'effort dans le brin ?
Données : $m = 1\,kg$; $r/R = 1/3$.



<u>*Réponses*</u> : $\alpha_1 = 54.56°$; $\left\|\vec{f}_{corde\,1}\right\| = 5.99\ N$

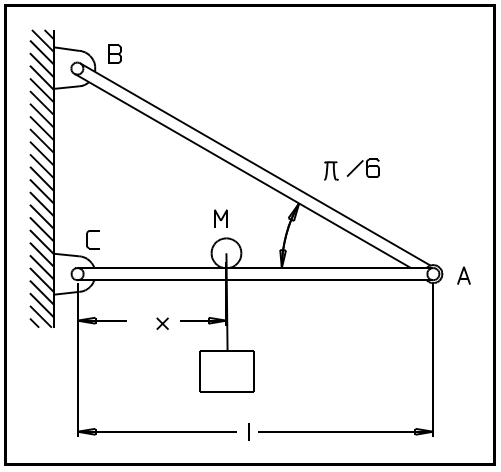
$\alpha_2 = 34.99°$; $\left\|\vec{f}_{corde\,2}\right\| = 8.44\ N$

Exercices concernant les problèmes d' "*ensemble de solides en 2D*" (*§ 5.2.3.*) (sans frottement)

54.01. Une potence murale est constituée par une poutre $\overline{AC}$ de longueur $l = 8\ m$, articulée en une rotule C, et supportant en A l'action d'un tirant $\overline{AB}$ (articulé en A et en B).
Cette poutre sert de chemin de roulement à un monorail M qui supporte une charge $\vec{f}_P$ de 2000 *N*.

a) Lorsque le monorail est au milieu de la portée $\overline{AC}$, déterminer les réactions d'appui en B et en C;

b) Trouver la position du monorail (déterminée par la longueur $x = \overline{CM}$) pour que l'effort de réaction en C soit minimum.

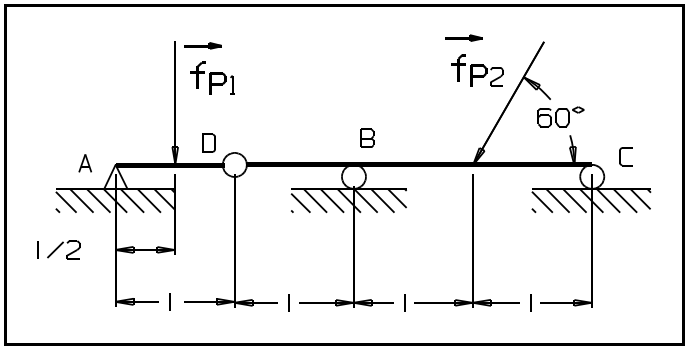


Réponses : a) $\left\|\vec{f}_B\right\| = \left\|\vec{f}_C\right\| = 2\,000\ N$ b) $x = 2\ m$

54.02. Soit une poutre posée sur trois appuis A, B et C, et articulée en D. Elle est soumise à deux charges :

- $\left\|\vec{f}_{p1}\right\| = 1000\ N$
- $\left\|\vec{f}_{p2}\right\| = 2\,000\ N$

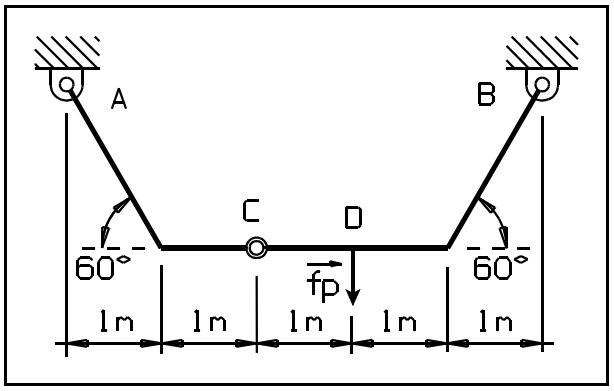
comme représenté ci-contre. Déterminer les réactions aux appuis, ainsi que l'effort dans la rotule D.



Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 1118\ N$

$\left\|\vec{f}_B\right\| = 1616\ N$; $\left\|\vec{f}_C\right\| = 616\ N$; $\left\|\vec{f}_D\right\| = 1118\ N$

54.03. Le support ci-contre est articulé en A, B et C. Il est soumis à l'action d'une charge $\vec{f}_p$ de 4 *kN*. Le poids propre de l'ensemble est négligé.
Déterminer les réactions dans les trois articulations.

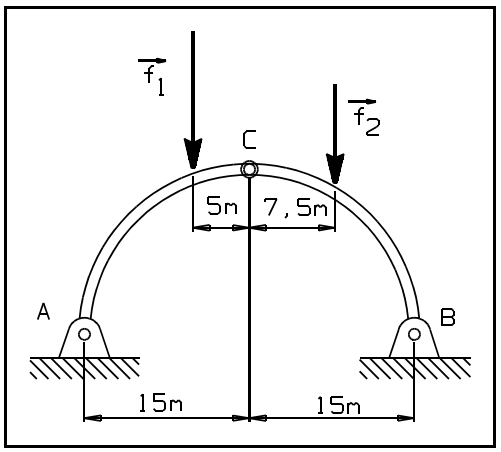


Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 2\,444\ N$

$\left\|\vec{f}_B\right\| = 3028.7\ N$

$\left\|\vec{f}_C\right\| = 2\,444\ N$

54.04. L'arc $\overline{ACB}$ comporte 3 articulations : en A et B avec le sol, en C entre les 2 quarts de circonférence. Sur l'arc $\overline{AC}$ est appliquée la charge $\vec{f}_1$ de 80 *kN* et sur l'arc $\overline{CB}$ la charge $\vec{f}_2$ de 60 *kN*. Calculer les réactions aux articulations A et B et la force existant entre les deux arcs en C.

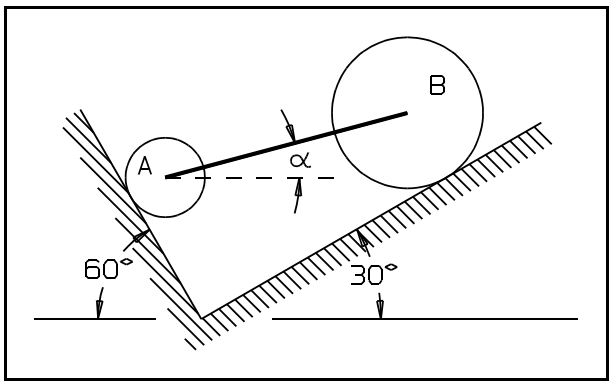


Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 80\ kN$

$\left\|\vec{f}_B\right\| = 82.9\ kN$

$\left\|\vec{f}_C\right\| = 43.2\ kN$

54.05. Deux cylindres A et B de poids $\vec{f}_{p\,A}$ et $\vec{f}_{p\,B}$ et de rayons r_A et r_B, sont reliés, de manière articulée, par une barre passant par leur centre. Ils sont posés sur deux plans inclinés respectivement à 60° et 30° par rapport à l'horizontale, comme représenté sur le schéma ci-contre. Si $\left\|\vec{f}_{p\,A}\right\| = 1\ N$ et $\left\|\vec{f}_{p\,B}\right\| = 10\ N$, on demande de déterminer :



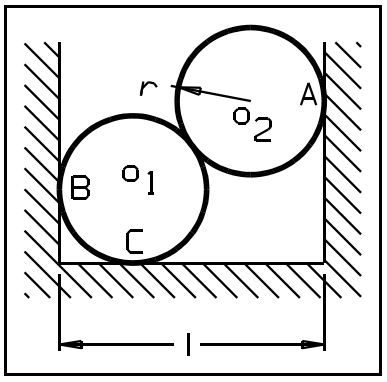
a) la position prise par l'ensemble en équilibre, en calculant la valeur de l'angle α par rapport à l'horizontale, sachant qu'il n'y a pas de frottement entre les solides en présence;

b) les réactions d'appuis $\left\|\vec{f}_A\right\|$ et $\left\|\vec{f}_B\right\|$ dues aux plans inclinés;

c) l'effort $\left\|\vec{f}_L\right\|$ dans la barre $\overline{AB}$.

Réponses : a) $\alpha = 20.17°$ b) $\left\|\vec{f}_A\right\| = 5.5\ N$ $\left\|\vec{f}_B\right\| = 9.53\ N$ c) $\left\|\vec{f}_L\right\| = 5.07\ N$

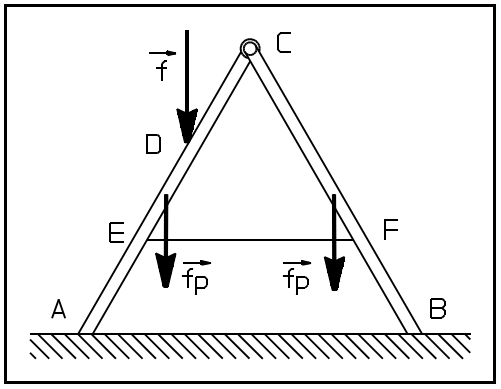
54.06. Deux cylindres lisses de rayon $r = 0.15\,m$ et d'un poids $\left\|\vec{f}_{p\,1}\right\| = \left\|\vec{f}_{p\,2}\right\| = 1100\ N$ sont placés dans une goulotte de largeur $l = 0.54\,m$, comme l'indique la figure. Le contact ayant lieu sans frottements en A, B et C (parois parfaitement lisses), déterminer les réactions d'appui en ces trois points, ainsi que l'effort existant en D entre les sphères.



Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = \left\|\vec{f}_B\right\| = 1467\ N$; $\left\|\vec{f}_C\right\| = 2\,200\ N$

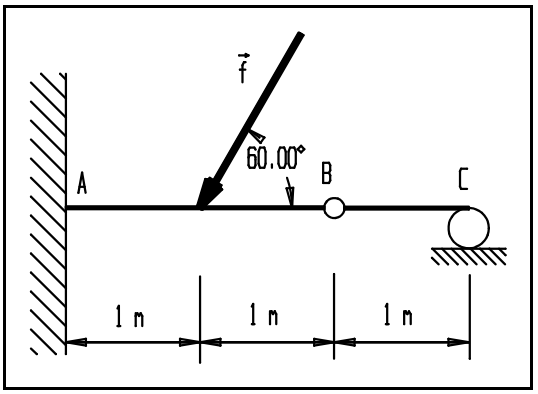
$\left\|\vec{f}_D\right\| = 1832\ N$

54.07. Une échelle double comprend deux montants $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$ de 3 *m* de longueur et d'un poids de 60 *N* (appliqué au milieu du montant). Les deux montants sont reliés par une corde horizontale $\overline{EF}$ située à 0.8 *m* du sol de façon que $\overline{ABC}$ constitue un triangle équilatéral. Une personne pesant 750 *N* est sur cette échelle à une distance $\overline{AD} = 2\ m$. Calculer les réactions au sol $\left\|\vec{f}_A\right\|$ et $\left\|\vec{f}_B\right\|$, la force existant dans l'articulation C et l'effort supporté par la corde. (Le sol est supposé lisse, c'est-à-dire sans frottements).



Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 560\ N$; $\left\|\vec{f}_B\right\| = 310\ N$; $\left\|\vec{f}_C\right\| = 342.1\ N$; $\left\|\vec{f}_{corde}\right\| = 233.6\ N$

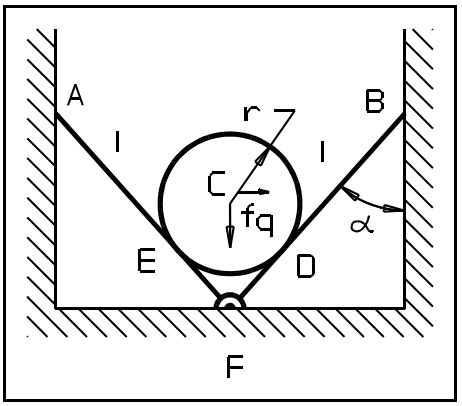
54.08. La poutre $\overline{AC}$ ci-contre est encastrée en A et repose sur un appui mobile en C; elle est de plus articulée en B. La seule force extérieure appliquée est $\vec{f}$, qui vaut 500 *N* et qui est inclinée de 60° par rapport à l'horizontale. Déterminer les réactions d'appui en A et C.



Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 500\ N$; $\left\|\vec{f}_C\right\| = 0\ N$

$\left\|\vec{m}_A\right\| = 433\ Nm$

54.09. Un cylindre est posé sur deux barres $\overline{FA}$ et $\overline{FB}$, articulées en F et posées contre les parois d'une goulotte. On demande de déterminer les réactions d'appui en A, B et F, en fonction de $\left\|\vec{f}_q\right\|$, *l*, *r* et α.

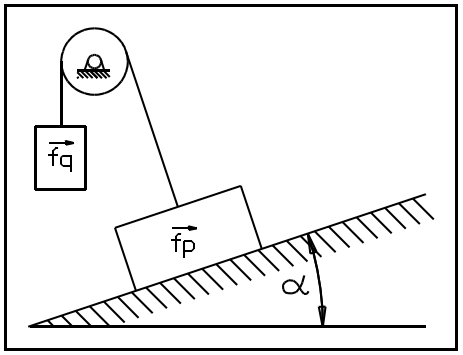


Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = \left\|\vec{f}_B\right\| = \dfrac{\left\|\vec{f}_q\right\| r}{2\,l\sin^2\alpha}$

$\left\|\vec{f}_F\right\| = \left\|\vec{f}_q\right\|$

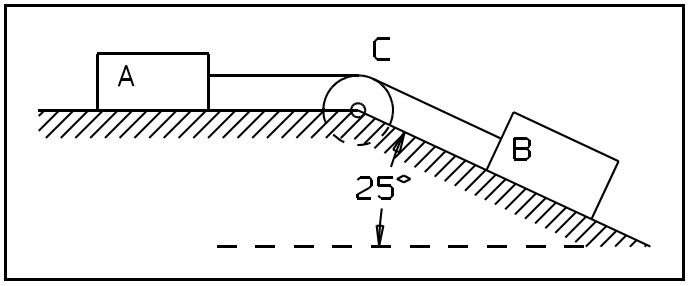
Exercices concernant les problèmes d' "*ensemble de solides en 2D*" (*§ 5.2.3.*) (avec frottement)

54.50. Le dispositif ci-contre est en équilibre sous l'action du poids $\vec{f}_p$, posé sur le plan incliné (coefficient d'adhérence $\mu_s = 0.60$) et du contrepoids $\vec{f}_q$, par l'intermédiaire d'un câble et d'une poulie. L'extrémité du câble attachée au bloc $\vec{f}_p$ a une direction perpendiculaire au plan incliné. Si $\left\|\vec{f}_p\right\| = 1\,kN$ et $\alpha = 20°$, on demande la valeur maximale que peut prendre le contrepoids $\left\|\vec{f}_q\right\|$ que l'on pourrait accrocher sans compromettre l'équilibre de l'ensemble.



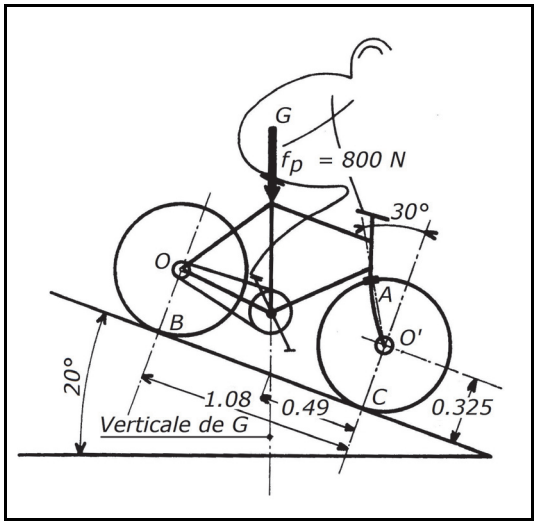
Réponse : $\left\|\vec{f}_q\right\| = 369.7\ N$

54.51. Les deux solides A et B sont de même poids $\vec{f}_p$. Le solide A repose sur un plan horizontal; le solide B repose sur un plan incliné d'un angle de 25° par rapport à l'horizontale. Les deux solides sont reliés entre eux par un câble passant sur la poulie C. Sachant que l'ensemble est en condition d'équilibre limite, déterminer la valeur du coefficient d'adhérence μ_s (identique pour le contact A-sol et pour le contact B-plan incliné). On négligera le frottement dans la poulie C.



Réponse : $\mu_s = \dfrac{\sin 25°}{1 + \cos 25°} = 0.22$

54.52. Un cycliste, à un instant considéré, s'immobilise et reste en équilibre, dans une descente, en provoquant le serrage de deux patins symétriques contre la jante de la roue avant, au point A. Déterminer la réaction exercée par le sol sur chaque roue en B et C. En appelant φ l'angle de frottement au contact roue-plan incliné, quelle doit être la valeur minimale de φ pour que, dans le cas considéré, le cycliste et la bicyclette ne glissent pas. Quel effort (tangent à la jante de la roue) exercent les patins de frein en A ?



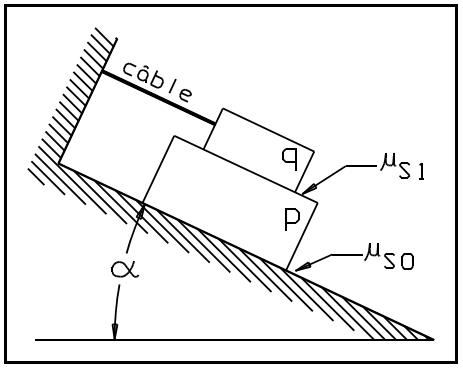
Réponses : $\varphi_{0\,\min} = 33.7°$

$\left\|\vec{f}_A\right\| = 273\ N$

54.53. Dans l'ensemble ci-contre, le bloc *p* est maintenu en équilibre par les efforts de frottement existant, d'une part, entre *p* et *q*, et, d'autre part, entre *p* et le plan incliné.

Déterminer la valeur minimale du poids du bloc *q* qui rend cet équilibre possible, en fonction de $\left\|\vec{f}_p\right\|$, de α et des coefficients de frottement μ_{s0} et μ_{s1}. Appliquer les résultats obtenus avec les valeurs numériques suivantes :

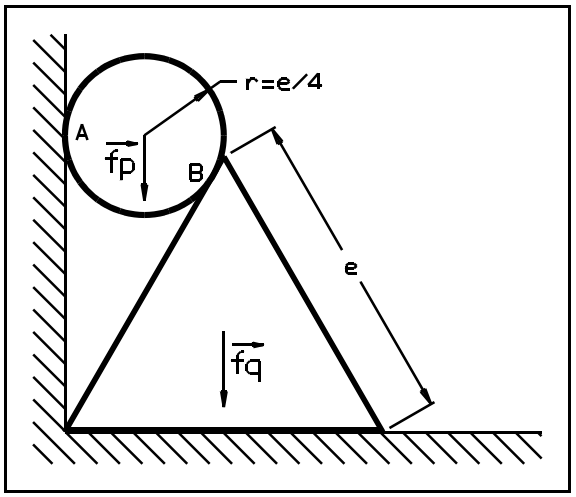
$\left\|\vec{f}_p\right\| = 200\ N$; $\alpha = 35°$, $\mu_{s0} = 0.4$ et $\mu_{s1} = 0.2$.



Réponse : $\left\|\vec{f}_{q\,\min}\right\| = \left\|\vec{f}_p\right\| \dfrac{\sin\alpha - \mu_{s0}\cos\alpha}{\left(\mu_{s0} + \mu_{s1}\right)\cos\alpha} = 100\ N$

54.54. Un prisme, dont la section est un triangle équilatéral de côté $e = 1\,m$, repose sur le sol horizontal. Le coefficient d'adhérence entre prisme et sol vaut $\mu_s = 0.25$. Une sphère, de rayon $e/4$ et de poids $\left\|\vec{f}_p\right\| = 100\ N$, s'appuie sur le mur vertical en A, et sur le prisme en B (on assimilera ces deux appuis à des appuis mobiles).

Déterminer quel doit être le poids minimum $\left\|\vec{f}_q\right\|$ du prisme, pour que l'ensemble reste en équilibre (pas de glissement ni de basculement du prisme).

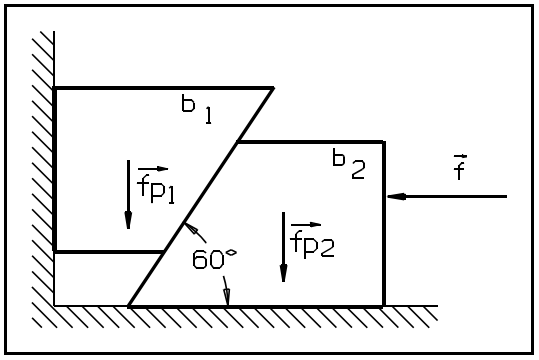


Réponse : $\left\|\vec{f}_q\right\| = \left\|\vec{f}_p\right\| \left(\sqrt{3}/\mu_s - 1\right)$

54.55. Deux blocs b_1 et b_2 sont en équilibre sous l'action d'une force $\vec{f}$.

Soit $\left\|\vec{f}_{p1}\right\| = 5\ kN$; $\left\|\vec{f}_{p2}\right\| = 12\ kN$; le coefficient de frottement mur-b_1 vaut $\mu_{s0} = 0.30$; le coefficient de frottement b_1-b_2 vaut $\mu_{s1} = 0.25$; le coefficient de frottement b_2-sol vaut $\mu_{s2} = 0.20$.

Calculer la valeur minimum de $\left\|\vec{f}\right\|$ pour que le système reste en équilibre.

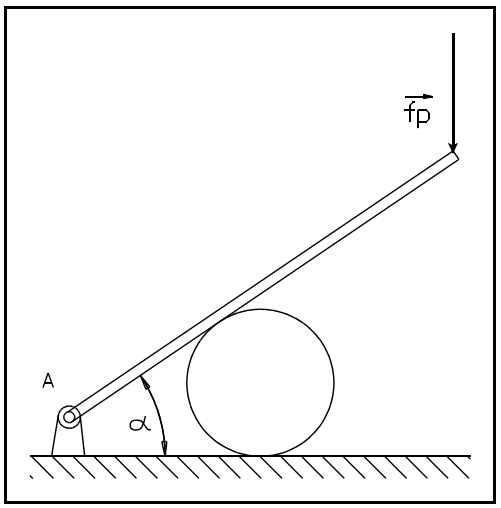


Réponse : $\left\|\vec{f}_{\min}\right\| = 783\ N$

54.56. Une bille se trouve logée dans un coin formé du plan horizontal et d'une plaque (de masse négligeable) montée sur charnière (en A). La plaque est de même nature que le plan horizontal. La masse de la bille est, elle aussi, négligeable par rapport à l'effort $\vec{f}_p$. Quel est la valeur maximale de $\left\|\vec{f}_p\right\|$ qui garantit l'immobilité de l'ensemble ?

Si $\left\|\vec{f}_p\right\| = 100\ N$, $\mu_s = 0.2$, que doit alors valoir α ?

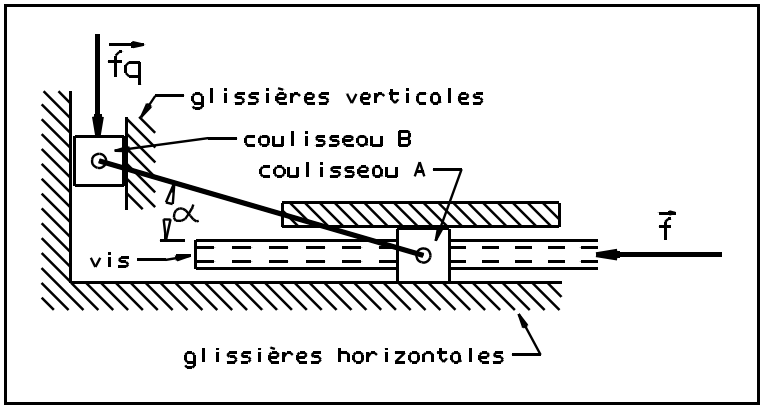
Que devient le problème si on ne néglige plus la masse de la bille ?



Réponse : $\alpha = 22.6°$ (Ne dépend pas de $\left\|\vec{f}_p\right\|$)

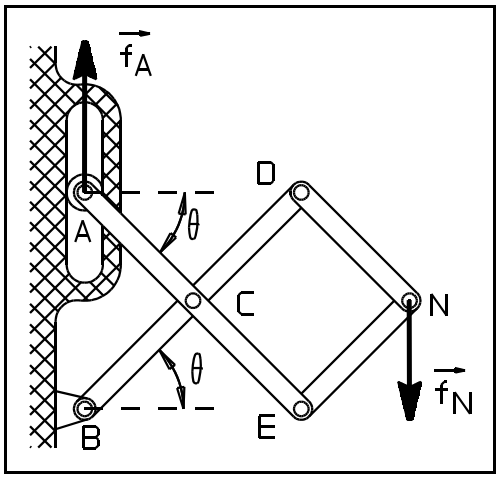
Exercices concernant principalement les "*travaux virtuels*" (*§ 5.5.*)

55.01. On désire soulever une charge $\vec{f}_q$ avec le dispositif constitué par deux coulisseaux s'appuyant sur deux glissières rectangulaires et reliés par une bielle. Sans tenir compte des frottements, trouver la valeur de l'effort horizontal $\vec{f}$ appliqué par la vis sur le coulisseau A pour assurer l'équilibre, et ceci de <u>*deux manières différentes*</u>. Le poids propre des organes est négligeable vis-à-vis de $\vec{f}_q$ et de $\vec{f}$. Appliquer le résultat aux valeurs $\left\|\vec{f}_q\right\| = 1kN$ et $\alpha = 80°$.



<u>*Réponse*</u> : $\left\|\vec{f}\right\| = 176.3\ N$

55.02. Dans le mécanisme "*à parallélogramme*" représenté ci-contre, B, D, E et N sont des articulations parfaites (sans frottement) situées aux extrémités des barres; les deux barres $\overline{AE}$ et $\overline{BD}$ sont, de plus, articulées en leur milieu C. A est un appui mobile, sans frottement, pouvant se déplacer dans une rainure verticale.
$\overline{AE} = 2\ \overline{AC} = \overline{BD} = 2\ \overline{BC} = 2\ \overline{DN} = 2\ \overline{EN} = 2\ l$.
Pour $\theta = 45°$, déduire l'expression de la force f_A requise pour maintenir l'équilibre du système soumis à une force $\vec{f}_N$ verticale de 1000 *N*.



<u>*Réponse*</u> : $\left\|\vec{f}_A\right\| = \dfrac{\left\|\vec{f}_N\right\|}{2} = 500\ N$

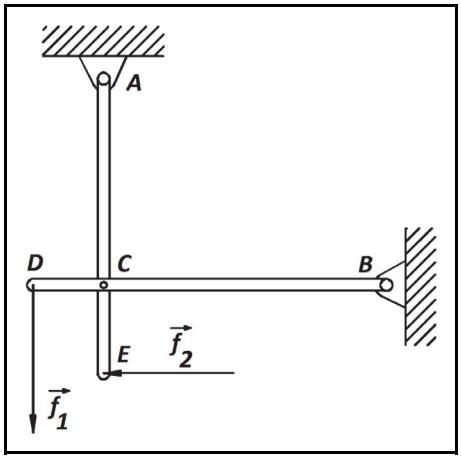
55.03 Dans l'exercice ***<u>52.05.</u>*** déterminer, par la méthode des travaux virtuels, l'angle α que fait le bras avec la verticale.

<u>*Réponse*</u> : $\alpha = 18.435°$

55.04. Dans l'exercice ***<u>53.01.</u>*** déterminer, par la méthode des travaux virtuels, la grandeur de la force qu'exerce la poutre par rapport au plancher.
Données numériques :
$\theta = 45°$; $\left\|\vec{f}_p\right\| = 1000\ N$; $\left\|\vec{f}_q\right\| = 2\,000\ N$; $l = 4\ m$.

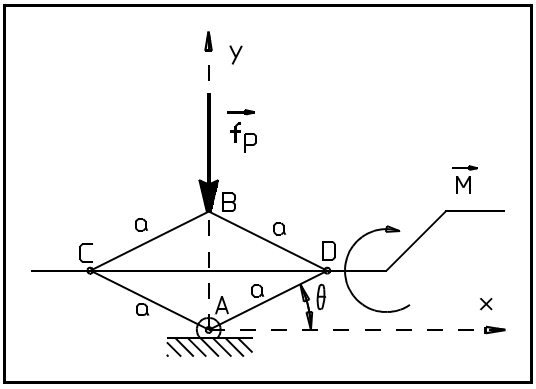
<u>*Réponse*</u> : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 3905\ N$

55.05. Dans le mécanisme ci-contre, la barre $\overline{AE}$ est articulée en A et C; la barre $\overline{BD}$ est articulée en B et C. $\overline{AE}$ est perpendiculaire à $\overline{BD}$. Caractéristiques :
$\overline{AE} = 50\,cm$; $\overline{BD} = 60\,cm$; $\overline{AC} = 35\,cm$;
$\overline{DC} = 12\,cm$. $\left\|\vec{f}_1\right\| = 800\,N$; $\left\|\vec{f}_2\right\| = 700\,N$.
Par application du principe des travaux virtuels, calculer $\vec{f}_B$; en déduire $\vec{f}_A$.



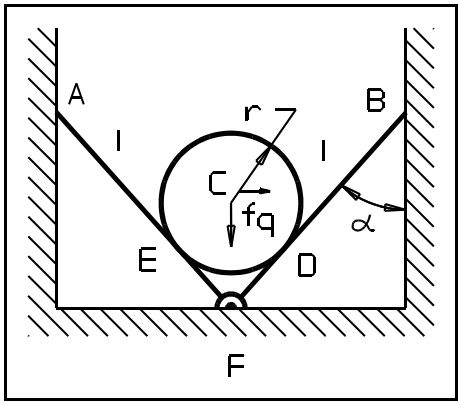
Réponses : $\vec{f}_A = -300\,\vec{1}_x + 1000\,\vec{1}_y$
$\vec{f}_B = 1000\,\vec{1}_x + 200\,\vec{1}_y$

55.06. Déterminer, par la méthode des travaux virtuels, la relation entre la force $\vec{f}_p$ et le couple $\vec{M}$, dans le cric ci-contre, en fonction de l'angle θ et du pas des filets droit et gauche de la vis $\overline{CD}$.
Si $\left\|\vec{f}_p\right\| = 10\,kN$ et le $pas = 3\,mm$, que vaut $\left\|\vec{M}\right\|$ pour $\theta = 30°$ et $60°$?



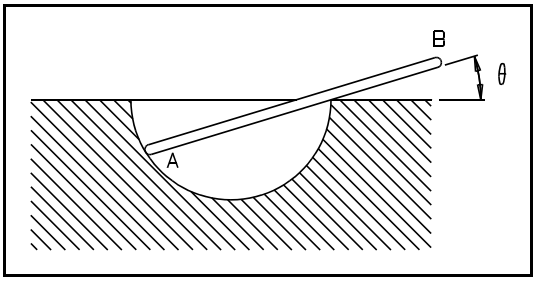
Réponses : $\left\|\vec{M}\right\| = \left\|\vec{f}_p\right\| \dfrac{pas}{\pi \tan\theta}$
$\left\|\vec{M}_{30°}\right\| = 16.6\,Nm$
$\left\|\vec{M}_{60°}\right\| = 5.52\,Nm$

55.07. Un cylindre est posé sur deux barres $\overline{FA}$ et $\overline{FB}$, articulées en F et posées contre les parois d'une goulotte. On demande de déterminer les réactions d'appui en A, B et F, en fonction de $\left\|\vec{f}_q\right\|$, l, r et α.



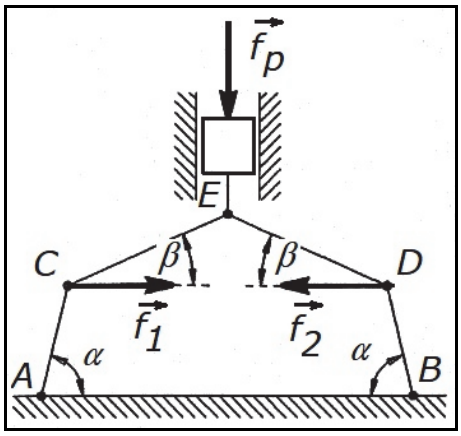
Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = \left\|\vec{f}_B\right\| = \left\|\vec{f}_q\right\| \dfrac{r}{2\,l \sin^2\alpha}$
$\left\|\vec{f}_F\right\| = \left\|\vec{f}_q\right\|$

55.08. Une tige uniforme $\overline{AB}$, de poids $\left\|\vec{f}_p\right\| = 1\,N$ et de longueur totale $l = 150\,mm$, repose à l'intérieur d'un bol hémisphérique de rayon $r = 50\,mm$ (voir la vue en coupe ci-contre).
Calculer l'angle θ correspondant à l'équilibre, en négligeant le frottement aux deux points d'appuis (ce qui signifie que le coefficient d'adhérence $\mu_s = 0$ en ces deux points).



Réponse : $\cos\theta = \dfrac{l + \sqrt{l^2 + 128\,r^2}}{16\,r} \quad \Rightarrow \quad \theta = 23.21°$

55.09. Trouver pour la presse ci-contre la relation entre $\left\|\vec{f}_1\right\|$, $\left\|\vec{f}_2\right\|$ et $\left\|\vec{f}_p\right\|$ à l'équilibre $\left(\left\|\vec{f}_1\right\| = \left\|\vec{f}_2\right\| = \left\|\vec{f}\right\|\right)$. On donne $\overline{AC} = \overline{CE} = \overline{ED} = \overline{DB} = a$ ainsi que les angles α et β. On néglige le poids des barres.



Réponse : $\left\|\vec{f}\right\| = \left\|\vec{f}_p\right\| \dfrac{\cot\beta - \cot\alpha}{2}$

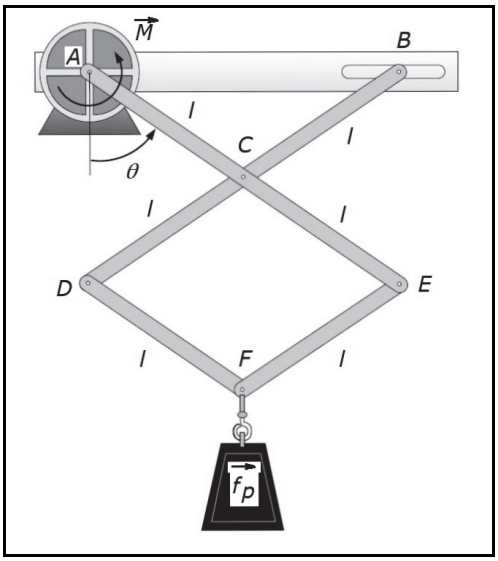
55.10. Dans l'exercice ***52.15.*** déterminer, par la méthode des travaux virtuels, la tension dans le câble de support.

Réponse : $\left\|\vec{f}_{câble}\right\| = 3593\ N$

55.11. Refaites l'exercice ***54.05.*** par la méthode des travaux virtuels.

Réponses : a) $\alpha = 20.17°$ b) $\left\|\vec{f}_A\right\| = 5.5\ N$ $\left\|\vec{f}_B\right\| = 9.53\ N$ c) $\left\|\vec{f}_L\right\| = 5.07\ N$

55.12. Déterminer le moment $\left\|\vec{M}\right\|$ du moteur au point A pour que le système ci-contre soit équilibre lorsque $\theta = 30°$, $\left\|\vec{f}_p\right\| = 1\ kN$ et $l = 2\ m$.



Réponse : $\left\|\vec{M}\right\| = 3\ kNm$

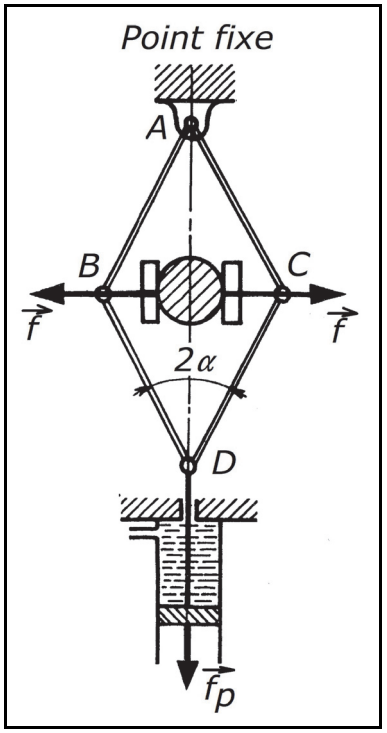
55.13. Un dispositif hydraulique d'ablocage est donné par le schéma ci-contre. Un vérin hydraulique agissant en D tend à fermer la parallélogramme constitué par quatre biellettes $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{DB}$ et $\overline{DC}$.

En appliquant le théorème des travaux virtuels, déterminer la relation qui existe entre $\left\|\vec{f}_p\right\|, \left\|\vec{f}\right\|$ et α.

$\vec{f}$: action de la pièce à serrer sur chaque mors.

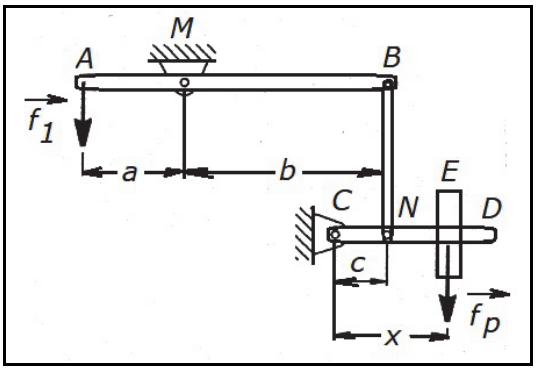
Application numérique :

$\alpha = 20°$; diamètre du piston $d = 80\,mm$; pression $p = 60\ N/mm^2$.



Réponse : $\left\|\vec{f}\right\| = \left\|\vec{f}_p\right\| \tan\alpha = 1092\ N$

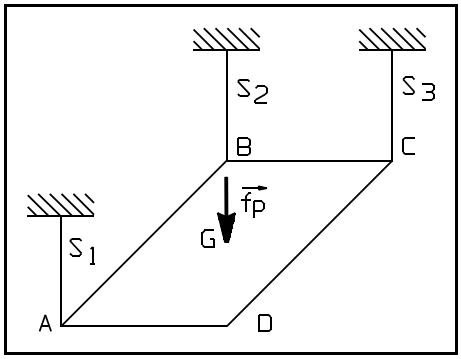
55.14. Un dispositif de pesée comprend deux leviers horizontaux $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$, articulés en M et C, et reliés par une barre articulée $\overline{BN}$. La charge à peser $\vec{f}_1$ est suspendue en A. L'équilibre, avec les 2 leviers horizontaux, est réalisé au moyen du curseur E que l'on déplace sur le levier $\overline{CD}$.Trouver la relation entre x et $\left\|\vec{f}_1\right\|$, en fonction de $\left\|\vec{f}_p\right\|$ et des dimensions.



Réponse : $x = \dfrac{a\,c}{b}\dfrac{\left\|\vec{f}_1\right\|}{\left\|\vec{f}_p\right\|}$

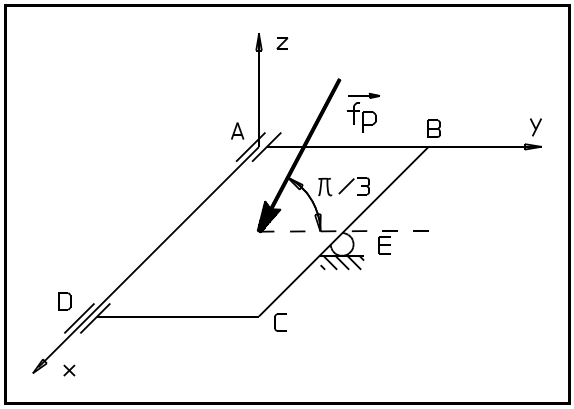
Exercices concernant principalement la "*statique en 3D*"

56.01. La dalle rectangulaire $\overline{ABCD}$ de 48 *cm* x 24 *cm* pèse $\left\|\vec{f}_p\right\| = 160\ N$ (poids supposé appliqué en son centre).
Elle est suspendue par 3 câbles verticaux s_1, s_2, s_3. Calculer les efforts existants dans ces câbles.



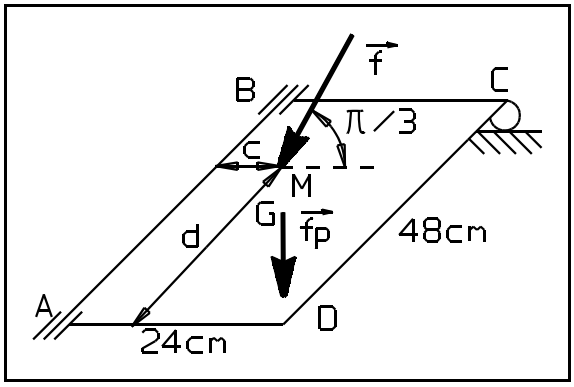
Réponses : $\left\|\vec{f}_{s1}\right\| = \left\|\vec{f}_{s3}\right\| = 80\ N\ ;\ \left\|\vec{f}_{s2}\right\| = 0$

56.02. La plaque rectangulaire $\overline{ABCD}$ horizontale, est articulée en A et D (charnières autour de Ax) et posée en E, milieu de $\overline{BC}$. Elle supporte une force $\vec{f}_p$ parallèle à Ayz, inclinée d'un angle de $\pi/3$ sur le plan Axy, appliquée au centre de la plaque et dirigée vers le bas.
Le calcul de $\left\|\vec{f}_A\right\|$, $\left\|\vec{f}_D\right\|$ et $\left\|\vec{f}_E\right\|$ est-il possible par les équations de la statique ? Si oui, écrire ces équations et calculer les réactions.



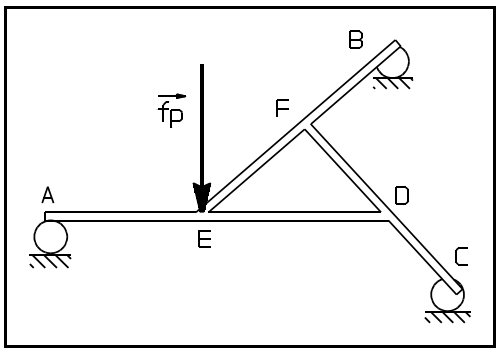
Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = \left\|\vec{f}_D\right\| = \frac{\sqrt{7}}{8}\left\|\vec{f}_p\right\|\ ;\ \left\|\vec{f}_E\right\| = \frac{\sqrt{3}}{4}\left\|\vec{f}_p\right\|$

56.03. La plaque rectangulaire horizontale $\overline{ABCD}$, de 48 *cm* x 24 *cm*, d'un poids $\left\|\vec{f}_p\right\| = 160\ N$ est montée sur 2 charnières à axe horizontal en A et B et posée sur un appui mobile en C.
Elle est soumise à une force $\left\|\vec{f}\right\| = 240\ N$ située dans un plan perpendiculaire à $\overline{AB}$, dirigée vers le bas et faisant un angle de $\pi/3$ avec le plan de la plaque. $\vec{f}$ est appliquée en M avec : $c = 8\,cm$ et $d = 32\,cm$.
Calculer les réactions en A, B et C.



Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 154.3\ N\ ;\ \left\|\vec{f}_B\right\| = 105.7\ N\ ;\ \left\|\vec{f}_C\right\| = 149.0\ N$

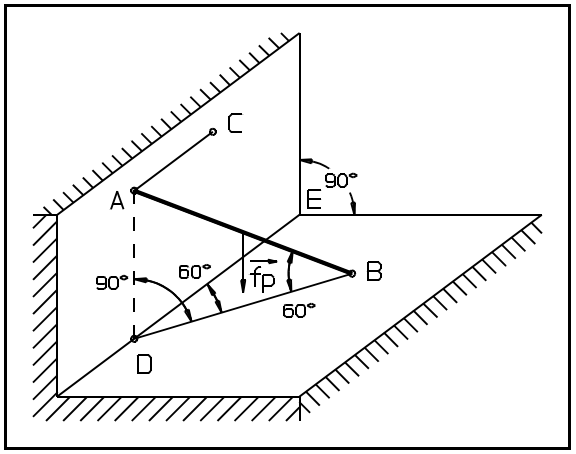
56.04. Trois barres d'égale longueur $\overline{AD} = \overline{EB} = \overline{FC}$ sont assemblées dans un même plan, de façon à ce que leurs points milieux E, F, D soient les sommets d'un triangle équilatéral. Cet ensemble est placé *horizontalement*, appuyé en A, B et C et soumis à une force *verticale* $\left\|\vec{f}_p\right\| = 840\ N$ en E. Comment cette charge se répartit-elle sur les 3 appuis ?



Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 480\ N$; $\left\|\vec{f}_B\right\| = 120\ N$

$\left\|\vec{f}_C\right\| = 240\ N$

56.05. Une barre $\overline{AB}$, de poids $\vec{f}_P$ et de longueur l est supportée par un mur vertical et un sol horizontal. Elle est tenue en équilibre par deux câbles horizontaux $\overline{AC}$ et $\overline{BD}$ attachés à ses extrémités. Déterminer les réactions du mur et du sol, et la tension dans chaque câble (on néglige les frottements).



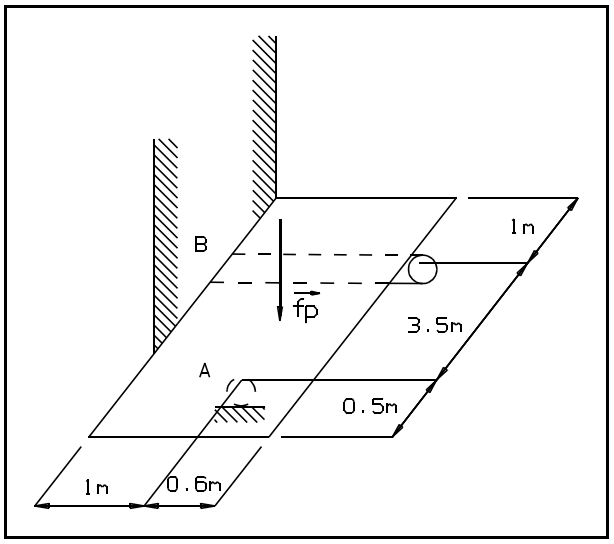
Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = \left\|\vec{f}_p\right\| / 4$

$\left\|\vec{f}_B\right\| = \left\|\vec{f}_p\right\|$

$\left\|\vec{f}_{\overline{AC}}\right\| = \left\|\vec{f}_p\right\| / 4\sqrt{3}$

$\left\|\vec{f}_{\overline{BD}}\right\| = \left\|\vec{f}_p\right\| / 2\sqrt{3}$

56.06. Une plaque en béton de 5 m × 1.6 m pèse 50 kN. ($\vec{f}_p$ appliqué au centre de la plaque). Elle repose horizontalement d'une part sur un appui mobile en A et, d'autre part, sur une poutre de forme cylindrique encastrée en B. Déterminer les réactions en A et B.

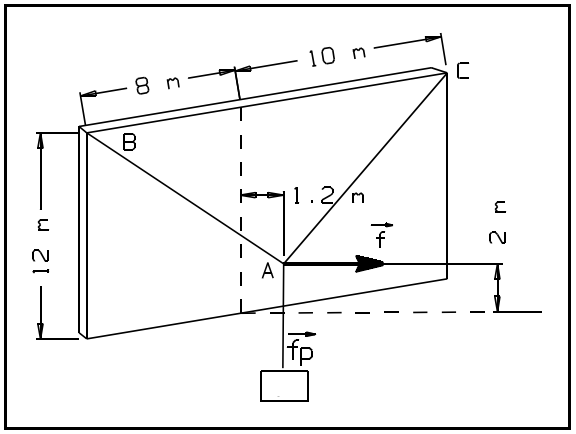


Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 21.43\ kN$

$\left\|\vec{f}_B\right\| = 28.57\ kN$

$\left\|\vec{m}_{enc\ B}\right\| = 18.57\ kNm$

56.07. Une charge $\vec{f}_p$ de 2000 *N* est soutenue par deux câbles $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ attachés à la partie supérieure du mur vertical. Sous l'action d'une force horizontale $\vec{f}$ perpendiculaire au mur, la charge prend la position indiquée. Calculez la valeur de $\vec{f}$ et l'effort dans chaque câble.

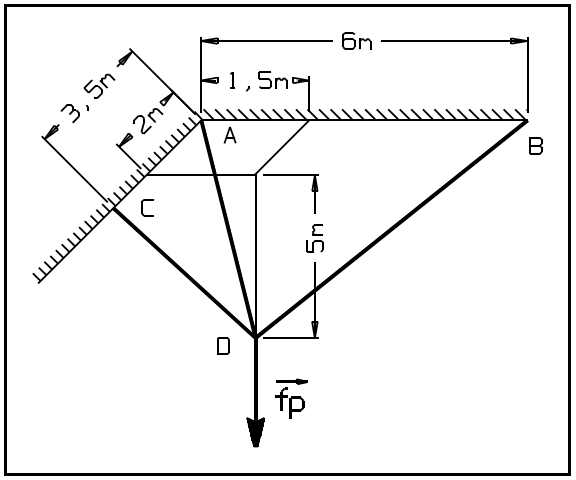


Réponses : $\left\|\vec{f}_{t\,B}\right\| = 1430\ N$

$\left\|\vec{f}_{t\,C}\right\| = 1256\ N$

$\left\|\vec{f}\right\| = 239\ N$

56.08. Une charge $\vec{f}_p$ de 10 *kN* est maintenue en équilibre dans un "*coin de mur*" au moyen de trois câbles. Déterminer les réactions dans ces câbles.

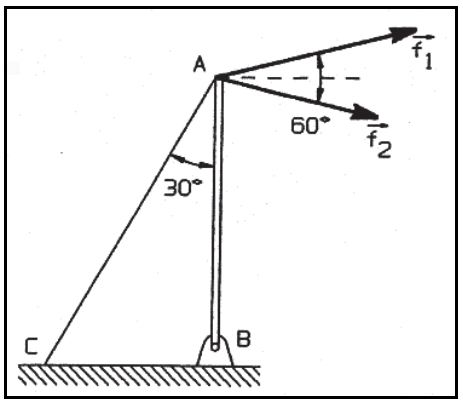


Réponses : $\left\|\vec{f}_{t\,A}\right\| = 1.99\ kN$

$\left\|\vec{f}_{t\,B}\right\| = 3.5\ kN$

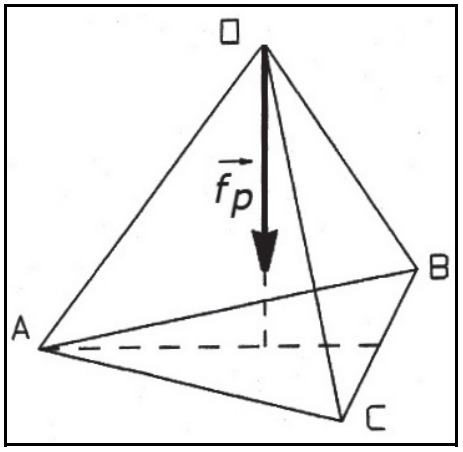
$\left\|\vec{f}_{t\,C}\right\| = 6.2\ kN$

56.09. Un mât est appuyé en B sur un sol horizontal. Il est soumis à son sommet A à 2 forces $\left\|\vec{f}_1\right\| = \left\|\vec{f}_2\right\| = 100\ N$ situées dans un plan horizontal, à 60° l'une de l'autre. Le mât est haubané par un câble $\overline{AC}$ fixé en C et formant un angle de 30° avec le mât. Le hauban est dans le plan bissecteur de $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$. Calculer, lorsque le mât, de poids négligeable, est en équilibre, l'effort $\vec{f}_C$ dans le hauban et la force de compression dans le mât.



Réponses : $\left\|\vec{f}_B\right\| = 300\ N$; $\left\|\vec{f}_C\right\| = 347\ N$

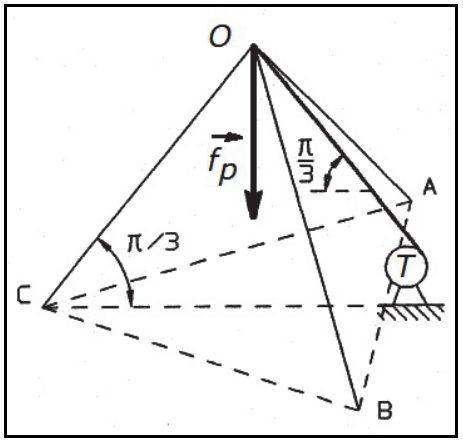
56.10. Un trépied, à montants $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ de longueurs égales l et articulés entre eux en O, est appuyé sur un sol horizontal de manière que $\overline{ABC}$ soit un triangle équilatéral de côté égal à $l\sqrt{3}/2$. Une charge $\left\|\vec{f}_p\right\| = 30\ N$ est suspendue verticalement en O. Les montants sont reliés par trois cordes $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{AC}$ les empêchant de glisser (sol considéré sans frottement). Le système étant en équilibre, calculer les forces de compression dans les 3 montants et l'effort $\left\|\vec{f}_t\right\|$ dans la corde.



Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = \left\|\vec{f}_B\right\| = \left\|\vec{f}_C\right\| = 11.5\ N$

$\left\|\vec{f}_t\right\| = 3.33\ N$

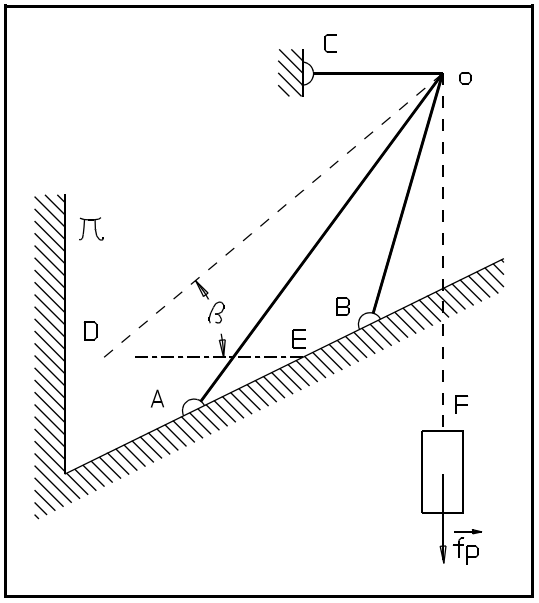
56.11. Pour soulever une charge $\vec{f}_p$ de 50 *kN*, on monte un trépied $\overline{ABC}$, dont les montants $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ mesurent 4 *m*. Ces montants symétriques sont fixés au sol, avec lequel ils font un angle de $\pi/3$. Au sommet O, est fixée une poulie servant de relais entre la charge $\vec{f}_p$ et un treuil T. Le câble $\overline{OT}$ est supposé dans le plan du montant $\overline{OC}$; il fait un angle de $\pi/3$ avec le plan horizontal.
Calculer les efforts dans les montants lorsque la charge est suspendue, en équilibre.



Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = \left\|\vec{f}_B\right\| = 52\,583\ N$

$\left\|\vec{f}_C\right\| = 2\,583\ N$

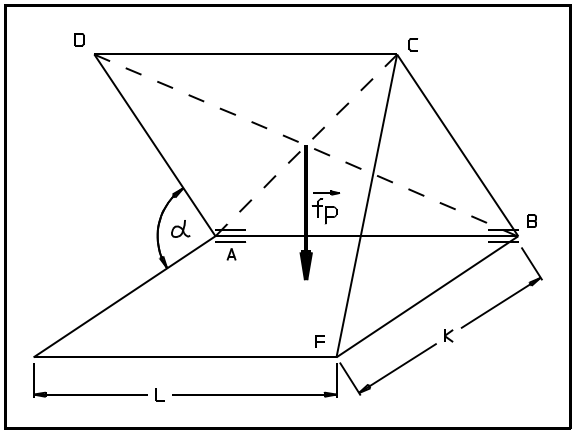
56.12. Soit un système de trois barres articulées en O, A, B et C. Le triangle équilatéral formé par O, A et B fait un angle de $\pi/6$ avec le plan vertical π, qui lui-même, contient le triangle formé par les points A, B et C. Une poulie de rayon nul se trouve en O et est destinée à guider un câble $\overline{DOF}$ qui permet de soulever une charge $\vec{f}_p$ dont le module vaut 800 *N*. L'angle β que forme le câble avec un plan horizontal vaut $\pi/4$. On remarquera que le point E se trouve à la verticale du point C et que la barre $\overline{OC}$ est perpendiculaire au plan π. Déterminer les efforts dans le câble ainsi que les réactions aux appuis à rotule A, B et C.



Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = \left\|\vec{f}_B\right\| = 910\ N$

$$\left\|\vec{f}_C\right\| = 222.8\ N\ ;\ \left\|\vec{f}_{câble}\right\| = 800\ N$$

56.13. Le capot $\overline{ABCD}$ articulé en A et B est maintenu en position ouverte (angle α) grâce à la barre $\overline{CF}$. Le poids du capot agit au milieu de la plaque. On demande d'établir les valeurs d'efforts au niveau des charnières en A et B ainsi que l'effort généré dans la barre de maintien.



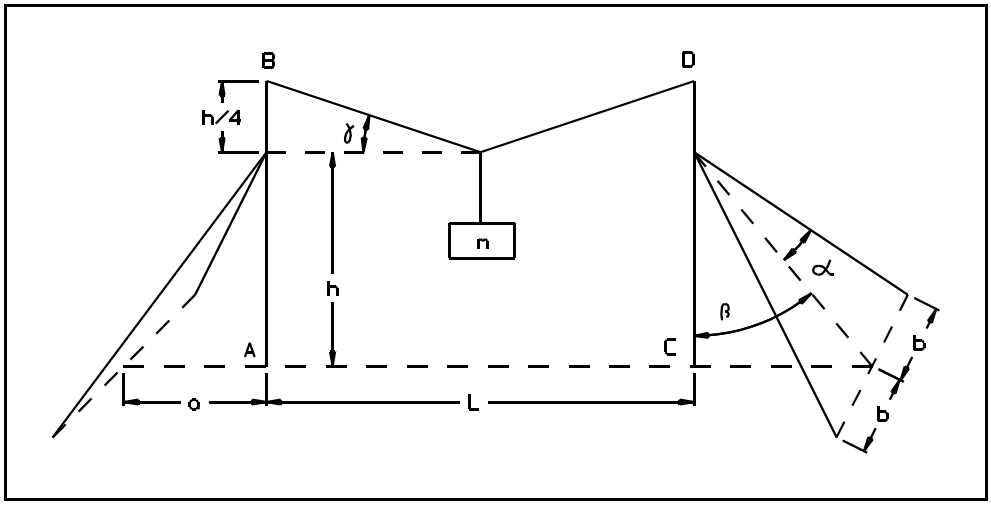
Réponses :

$$\left\|\vec{f}_{\overline{CF}}\right\| = \frac{\left\|\vec{f}_p\right\|}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha/2}$$

$$\left\|\vec{f}_A\right\| = \left\|\vec{f}_p\right\|/2$$

$$\left\|\vec{f}_B\right\| = \sqrt{\left(\frac{\left\|\vec{f}_p\right\|}{2}\,\frac{\cos\alpha\,\sin\alpha/2}{\cos\alpha/2}\right)^2 + \left(\frac{\left\|\vec{f}_p\right\|}{2}\left(1-\cos\alpha\right)\right)^2}$$

56.14. Le dessin ci-dessous représente, en perspective, une masse m qui est suspendue à équidistance de deux poteaux $\overline{AB}$ et $\overline{DC}$, articulés au sol; ces deux poteaux sont soutenus par deux haubans chacun, disposés symétriquement. Le système est statiquement stable. Que valent les efforts dans les haubans ? Les réactions d'appui des deux poteaux ?



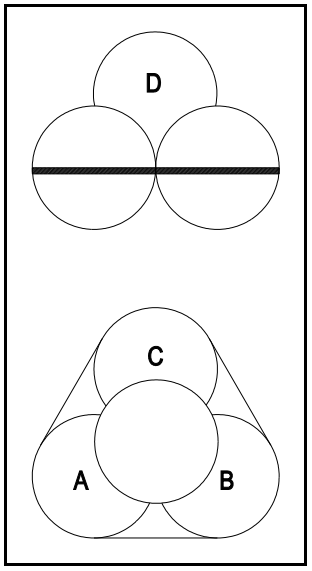
Réponses :

$$\left\|\vec{f}_{hauban}\right\| = \frac{5}{16}\,m\,g\,\frac{\cot\gamma}{\cos\alpha\,\sin\beta}$$

$$\left\|\vec{f}_A\right\| = \left\|\vec{f}_C\right\| = \sqrt{\left(\frac{m\,g}{8}\cot\gamma\right)^2 + \left(\frac{m\,g}{2} + \frac{5\,m\,g}{8}\cot\gamma\,\cot\beta\right)^2}$$

56.15. Trois sphères identiques, de 50 *N*, et de centres A, B et C, sont maintenues l'une contre l'autre sur le sol, par une courroie en caoutchouc située dans le plan des centres. On pose sur cet ensemble une quatrième sphère identique aux trois autres.

a) De combien la tension dans la courroie augmente-t-elle ?
b) Quelle force existe-t-il entre la boule supérieure et chacune des inférieures ?

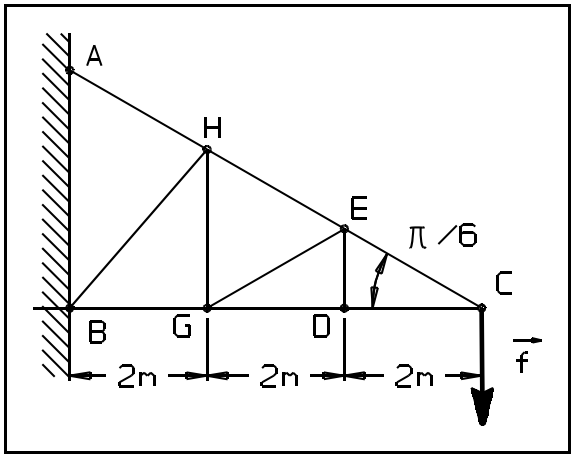


Réponses : a) $\left\| \vec{f}_{courroie} \right\| = 6.8\ N$

b) $\left\| \vec{f}_A \right\| = \left\| \vec{f}_B \right\| = \left\| \vec{f}_C \right\| = 20.4\ N$

Exercices concernant principalement les "*systèmes triangulés - Crémona*" (*§ 5.6.*)

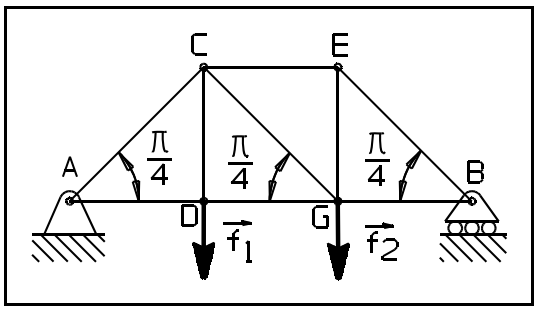
57.01. Déterminer les réactions d'appui et les efforts dans chaque barre pour le treillis ci-contre pour une charge $\left\|\vec{f}\right\| = 1\,kN$.



Réponses :

Barre	*T - C*	*Intensité [N]*
$\left\|\vec{f}_A\right\| = \overline{CE} = \overline{EH} = \overline{AH}$	T	2000
$\left\|\vec{f}_B\right\| = \overline{DC} = \overline{DG} = \overline{BG}$	C	1732
$\overline{EG} = \overline{GH} = \overline{BH}$	-	0

57.02. Déterminer les efforts dans les barres du treillis représenté ci-contre (toutes les barres inclinées font un angle de $\pi/4$ avec l'horizontale). Les forces appliquées valent : $\left\|\vec{f}_1\right\| = \left\|\vec{f}_2\right\| = 2\,kN$.



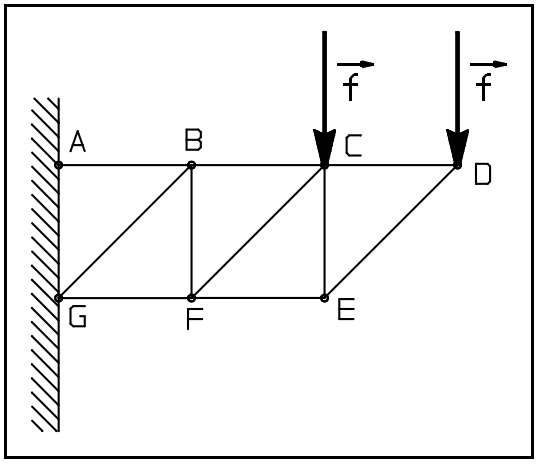
Réponses :

Barre	*T - C*	*Intensité [N]*
$\left\|\vec{f}_A\right\| = \overline{BG} = \overline{EG} = \overline{DG}$ $\left\|\vec{f}_B\right\| = \overline{AD} = \overline{CD}$	T	2000
$\overline{BE} = \overline{AC}$	C	2828
$\overline{CE}$	C	2000
$\overline{CG}$	-	0

57.03. Pour le treillis représenté ci-contre, soumis à l'action de deux forces extérieures $\vec{f}$ (valant chacune 1 *kN*), verticales et appliquées en C et D, déterminez :

a) les réactions d'appui aux 2 articulations A et G;
b) les efforts ainsi que la nature de ces efforts (traction ou compression) dans chacune des barres.

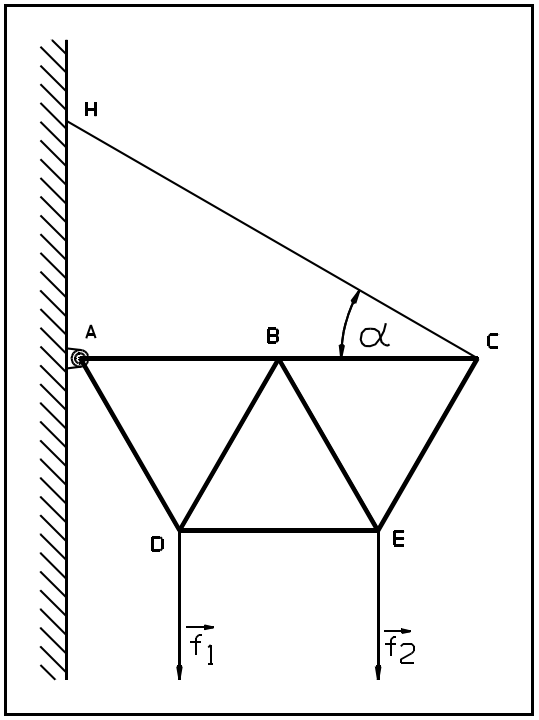
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{GF} = \overline{FE} = 1\,m$;
$\overline{BG} = \overline{CF} = \overline{DE} = \sqrt{2}\,m$.



Réponses :

Barre	*T - C*	*Intensité [N]*	*Barre*	*T - C*	*Intensité [N]*
$\left\|\vec{f}_A\right\|$		5000	$\left\|\vec{f}_G\right\|$		5385
$\overline{CD}$	T	1000	$\overline{BG}$	C	2828
$\overline{CE}$	T	1000	$\overline{EF}$	C	1414
$\overline{EF}$	C	1000	$\overline{BC}$	T	3000
$\overline{CF}$	C	2828	$\overline{FG}$	C	3000
$\overline{BF}$	T	2000			

57.04. Le système triangulé ABCDE ci-contre est constitué de barres de longueurs identiques :
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DE} = \overline{AD}$
$= \overline{DB} = \overline{BE} = \overline{EC} = 1\,m$
Ce système triangulé est fixé au mur au moyen d'une rotule A, et est maintenu horizontal par un câble $\overline{CH}$ ($\alpha = \pi/6$); en D et E sont suspendues deux charges : $\left\|\vec{f}_1\right\| = \left\|\vec{f}_2\right\| = 1\,kN$.

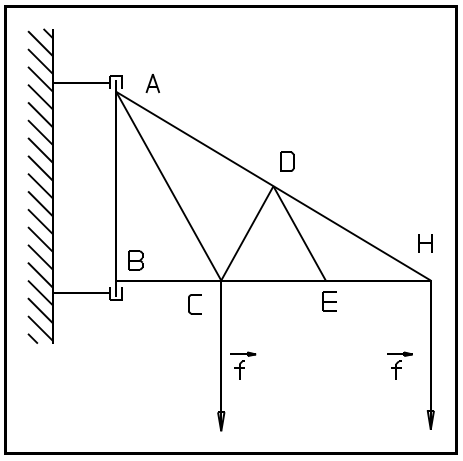


a) Déterminer les réactions d'appui en A et H.
b) Déterminer la *nature* (traction ou compression) et la *grandeur* de l'effort associé à chacune des barres.

Réponses :

Barre	*T - C*	*Intensité [N]*
$\left\|\vec{f}_A\right\| = \left\|\vec{f}_H\right\|$		2000
$\overline{CE} = \overline{AD}$	T	1155
$\overline{BC} = \overline{AB}$	C	2309
$\overline{DE}$	T	577
$\overline{BE} = \overline{BD}$	-	0

57.05. Le treillis représenté ci-contre est soumis à deux efforts de 8 *kN* en C et H. Sachant que :
$\overline{AB} = 3\,m$; $\overline{BH} = 5\,m$; $\overline{AD} = \overline{DH}$; $\overline{BC} = \overline{CE} = \overline{EH}$,
a) déterminer les réactions d'appui au mur;
b) rechercher les efforts dans chaque barre du treillis.

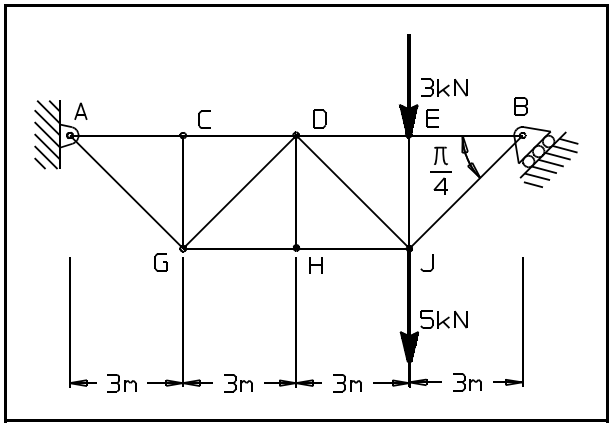


Réponses :

Barre	*T - C*	*Intensité [N]*	*Barre*	*T - C*	*Intensité [N]*
$\left\|\vec{f}_A\right\|$		17778	$\left\|\vec{f}_B\right\|$		23917
$\overline{AC}$	T	9138	$\overline{EC} = \overline{EH}$	C	13328
$\overline{BC}$	C	17778	$\overline{AB}$	C	16000
$\overline{AD} = \overline{DH}$	T	15549	$\overline{DE} = \overline{CD}$	-	0

57.06. Pour le treillis représenté ci-contre, soumis à l'action de deux forces extérieures verticales et appliquées en E et J, déterminez :

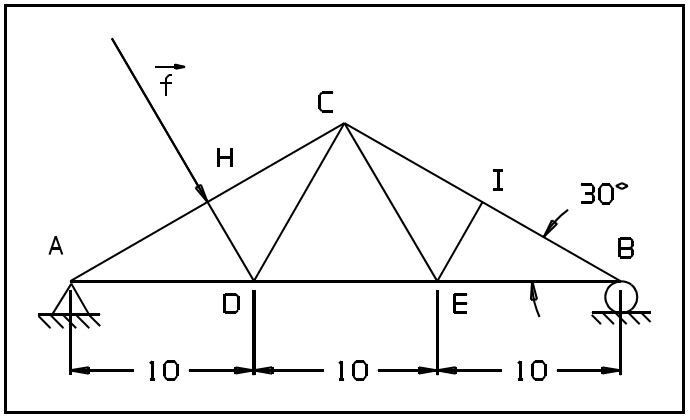
a) les réactions d'appui en A et B;
b) la *nature* (traction ou compression) et la *grandeur* de l'effort associé à chacune des barres constituant les nœuds B, E, H et J.



Réponses :

Barre	*T - C*	*Intensité [kN]*	*Barre*	*T - C*	*Intensité [kN]*
$\left\|\vec{f}_A\right\|$		$\sqrt{40}$	$\left\|\vec{f}_B\right\|$		8.49
$\overline{BE}$	C	12	$\overline{BJ}$	T	8.49
$\overline{DE}$	C	12	$\overline{EJ}$	C	3
$\overline{HJ}$	T	4	$\overline{GH}$	T	4
$\overline{DJ}$	T	2.83	$\overline{DH}$	-	0

57.07. Par la méthode de Crémona, rechercher les efforts dans chaque barre pour le treillis représenté ci-contre, soumis à la force extérieure $\vec{f}$, perpendiculaire à $\overline{AC}$, sachant que $\left\|\vec{f}\right\|$ vaut 1 *kN* et que $\overline{AH} = \overline{HC} = \overline{CI} = \overline{IB}$.
Les dimensions sont données en *m*.

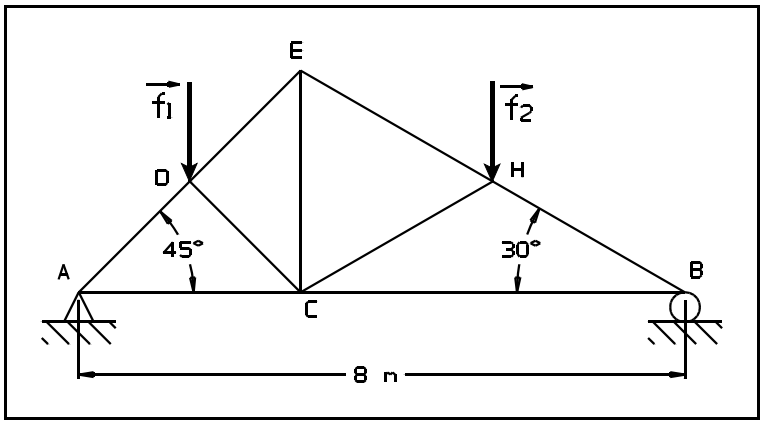


Réponses :

Barre	*T - C*	*Intensité [N]*	*Barre*	*T - C*	*Intensité [N]*
$\left\|\vec{f}_A\right\|$		763.8	$\left\|\vec{f}_B\right\|$		288.7
$\overline{AD}$	T	1500	$\overline{DE} = \overline{BE}$	T	500
$\overline{AH}$	C	1154.7	$\overline{CE}$	-	0
$\overline{DH}$	C	1000	$\overline{CI} = \overline{BI}$	C	577.4
$\overline{CH}$	C	1154.7	$\overline{EB}$	T	3000
$\overline{CD}$	T	1000	$\overline{EI}$	-	0

StC.57.08.

On donne ci-contre le profil d'une ferme de charpente métallique soumise à l'action de deux forces verticales $\vec{f}_1$ (2 *kN*) et $\vec{f}_2$ (4 *kN*) et reposant sur deux appuis A et B. On demande de rechercher la valeur et la nature des efforts dans chacune des barres.

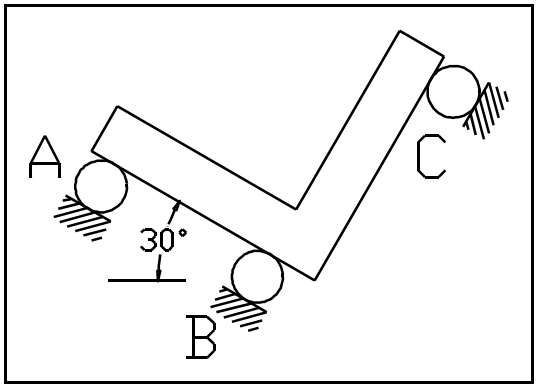


Réponses :

Barre	*T - C*	*Intensité [N]*	*Barre*	*T - C*	*Intensité [N]*
$\left\|\vec{f}_A\right\|$		2902	$\left\|\vec{f}_B\right\|$		3098
$\overline{AC}$	T		$\overline{FE}$	C	
$\overline{AD}$	C		$\overline{FB}$	C	
$\overline{CD}$	C		$\overline{BC}$	T	
$\overline{ED}$	C		$\overline{CF}$	C	
$\overline{CE}$	T				

Exercices "*intégrés*"

5S.01. Un profilé en L de 50 x 50 x 10 *mm* pèse 10 *N*; il est incliné de 30° par rapport à l'horizontale et repose sur 3 appuis mobiles A, B et C (A et C se trouvant à 5 *mm* de l'extrémité de chaque branche, alors que B est distant de 10 *mm* du bord le plus proche.
Déterminer, graphiquement ou analytiquement (au choix) :
a) la position du centre de gravité du L;
b) les réactions d'appuis en A, B et C.

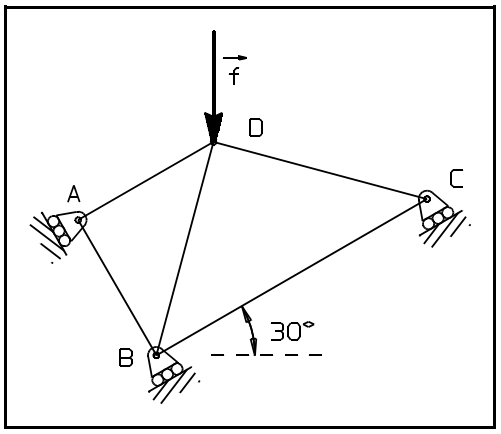


Réponses : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 5.64\ N$

$\left\|\vec{f}_B\right\| = 3.02\ N\ ;\ \left\|\vec{f}_C\right\| = 5.00\ N$

5S.02. Le système triangulé (plan) ci-contre est constitué de cinq barres, et repose au moyen de trois appuis mobiles en A, B et C. Il est sollicité par une force $\vec{f}$ de 1 *kN*, verticale.
a) Déterminer, analytiquement ou graphiquement, les réactions d'appui $\vec{f}_A$, $\vec{f}_B$ et $\vec{f}_C$ aux trois appuis A, B et C.
b) la nature (traction ou compression) ainsi que la grandeur de l'effort dans chacune des cinq barres du système.

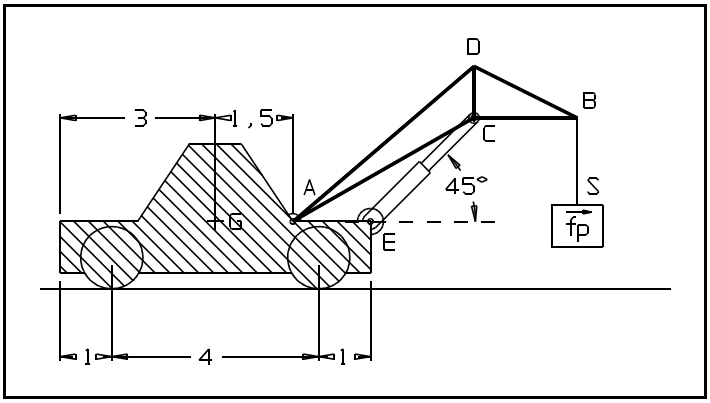
Données :
$\overline{AB} = \overline{AD} = 1\,m\ ;\ \overline{BC} = 2\,m\ ;\ \overline{CD} = \overline{BD} = \sqrt{2}\,m$



Réponses :

Barre	*T - C*	*Intensité [N]*	*Barre*	*T - C*	*Intensité [N]*
$\left\|\vec{f}_A\right\|$		500	$\left\|\vec{f}_B\right\| = \left\|\vec{f}_C\right\|$		433
$\overline{BC}$	T	433	$\overline{AD}$	C	500
$\overline{DC} = \overline{BD}$	C	612	$\overline{AB}$	-	0

5S.03. Une grue sur roues est schématisée ci-contre. Au moyen de la "*flèche triangulée*" $\overline{ACDB}$, actionnée par le vérin $\overline{EC}$, on doit soulever une charge $\vec{f}_p$ de 5 *kN*.



a) Déterminer les efforts au niveau des rotules A et E (le vérin $\overline{EC}$ étant assimilable à une barre de poids négligeable, articulée en ses deux extrémités).

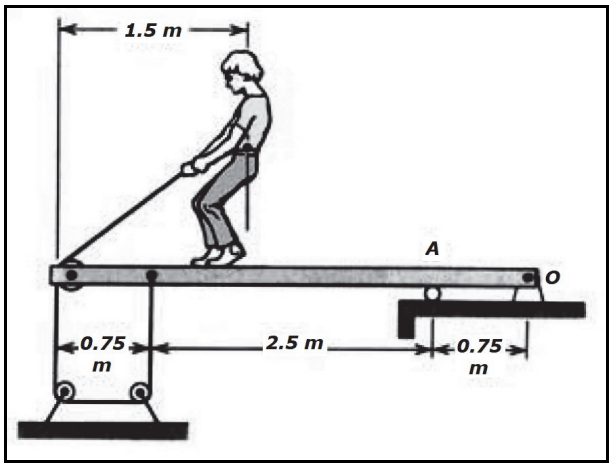
b) Déterminer le type et la valeur de l'effort dans la barre $\overline{DC}$.

c) Considérant que le poids de la grue se trouve appliqué au point G de la surface hachurée, que doit valoir <u>*au minimum*</u> ce poids de la grue pour que cette dernière ne soit pas déséquilibrée par la charge à soulever.

<u>*Données*</u> : vérin $\overline{EC} = 2\sqrt{2}\ m$, incliné à 45° par rapport à l'horizontale;
barre $\overline{CB} = 2\ m$, direction horizontale;
barre $\overline{DC} = 1\ m$, direction verticale.

<u>*Réponses*</u> : a) $\left\|\vec{f}_A\right\| = 22\,669\ N$; $\left\|\vec{f}_E\right\| = 25927\ N$ b) $\left\|\vec{f}_{\overline{CD}}\right\| = 13571\ N$ compression
c) $\left\|\vec{f}_{\min}\right\| = 12\,500\ N$

5S.04. Soit une poutre horizontale pesante, d'un poids de 1000 *N*, appuyée en O (articulation) et en A (rouleau). Un jeune garçon, d'un poids de 500 *N*, exerce une force de traction de 150 *N* sur le câble représenté sur le dessin ci-contre. On peut négliger tout frottement dans les poulies. Déterminer les réactions de liaison en O et A.



<u>*Réponses*</u> : $\left\|\vec{f}_A\right\| = 5701\ N$
$\left\|\vec{f}_O\right\| = 3929.5\ N$
(Vers le bas)