CHAPITRE 6. GRAPHOSTATIQUE . . . . . **- 6.1 -**
6.1. Principe. Notions de statique graphique . . . . . **- 6.1 -**
6.1.1. Objet. . . . . **- 6.1 -**
6.1.2. Principe . . . . . **- 6.1 -**
6.1.3. Rappels des conditions d'équilibre . . . . . **- 6.1 -**
6.1.4. Rappels des principes de réduction des systèmes de forces. . . . . **- 6.2 -**
6.2. Résolution des problèmes plans. . . . . **- 6.6 -**
6.2.1. Forces concourantes en un point. . . . . **- 6.6 -**
***A)** Premier cas* . . . . . **- 6.6 -**
***B)** Second cas* . . . . . **- 6.6 -**
***C)** Application importante* . . . . . **- 6.7 -**
6.2.2. Forces parallèles . . . . . **- 6.9 -**
6.2.3. Forces coplanaires quelconques : droite de Culmann . . . . . **- 6.10 -**
6.2.4. Forces coplanaires quelconques : polygone funiculaire. . . . . **- 6.12 -**
***A)** Résultante et axe central d'un système de forces coplanaires*. . . . . **- 6.12 -**
***B)** Conditions d'équilibre en graphostatique*. . . . . **- 6.14 -**
6.3. Position du centre de masse de surfaces planes . . . . . **- 6.19 -**
6.4. Notions sur les systèmes triangulés . . . . . **- 6.22 -**
6.4.1. Définition et théorie. . . . . **- 6.22 -**
6.4.2. Méthodes des noeuds de Crémona (treillis simples) - Méthode graphique. . . . . **- 6.22 -**
6.5. Introduction à la graphostatique dans l'espace . . . . . **- 6.25 -**
6.5.1. Principe . . . . . **- 6.25 -**
6.5.2. Equilibre du point : système de "trois barres" . . . . . **- 6.25 -**

CHAPITRE 6. GRAPHOSTATIQUE

6.1. *Principe. Notions de statique graphique*

6.1.1. Objet

La graphostatique ou statique graphique est l'ensemble des méthodes graphiques appliquées aux questions de la statique : elle donne des résultats en général plus rapidement que la méthode analytique, mais leur précision dépend évidemment du ***soin*** apporté à la réalisation des épures.
On l'applique ***surtout*** à la recherche des conditions d'équilibre, des centres de masse, des moments ... ***lorsque toutes les forces sont coplanaires***. Si les forces ne sont pas coplanaires, il faut procéder en considérant l'équilibre dans deux plans perpendiculaires.

6.1.2. Principe

L'étude se fera en général à partir de deux dessins :

- une épure de ***"situation géométrique"*** donnant la position des lignes d'action des forces, les unes par rapport aux autres. Ce dessin s'effectue à une ***échelle des longueurs*** : $1\,cm \div a\,m$.
  Sur cette épure, les forces figurent (pas nécessairement à l'échelle), uniquement en vue d'en indiquer ***le sens***;
- une épure dite ***"polygone des forces"*** où celles-ci sont représentées par des vecteurs libres, à une *échelle des forces*, par exemple : $1\,cm \div b\,N$.
  C'est sur cette épure que se fait la construction des résultantes de forces etc.

  La séparation de ces deux épures facilite la clarté de l'étude.

Il est indispensable de choisir correctement les échelles de façon à ce que les résultats soient clairs, facilement interprétables et précis. Une épure trop petite enlève toute précision à la méthode.
Les échelles doivent toujours être indiquées sur les dessins. Sans cette indication, les dessins sont sans signification.

6.1.3. Rappels des conditions d'équilibre

Un problème ne pourra être résolu graphiquement que si et seulement si il peut l'être analytiquement.

Ainsi, il faudra, pour chaque problème, vérifier que le nombre d'inconnues qu'on cherche à déterminer, est bien en accord avec les équations de la statique (qui traduisent, rappelons-le, les conditions vectorielles $\vec{F} = \vec{0}$ et $\vec{M}_O = \vec{0}$).

Le tableau ci-dessous résume les divers cas possibles.

		Conditions d'équilibre		Nombre d'inconnues déterminables
		$\vec{F} = \vec{0}$	$\vec{M}_O = \vec{0}$	
Forces coplanaires (dans Oxy)	Concourantes	$\sum f_{ix} = 0$ $\sum f_{iy} = 0$	-	2
	Parallèles (à Oy)	$\sum f_{iy} = 0$	$\sum m_{Oz}(f_i) = 0$	2
	Quelconques	$\sum f_{ix} = 0$ $\sum f_{iy} = 0$	$\sum m_{Oz}(f_i) = 0$	3
Forces dans l'espace (Oxyz)	Concourantes	$\sum f_{ix} = 0$ $\sum f_{iy} = 0$ $\sum f_{iz} = 0$	-	3
	Parallèles (à Oz)	$\sum f_{iz} = 0$	$\sum m_{Ox}(f_i) = 0$ $\sum m_{Oy}(f_i) = 0$	3
	Quelconques	$\sum f_{ix} = 0$ $\sum f_{iy} = 0$ $\sum f_{iz} = 0$	$\sum m_{Ox}(f_i) = 0$ $\sum m_{Oy}(f_i) = 0$ $\sum m_{Oz}(f_i) = 0$	6

Nous allons, dans les paragraphes qui suivent, parcourir ces différents cas.

6.1.4. Rappels des principes de réduction des systèmes de forces

A) On ne modifie pas l'effet d'une force en la faisant glisser le long de sa ligne d'action (***fig. 6.1.***)

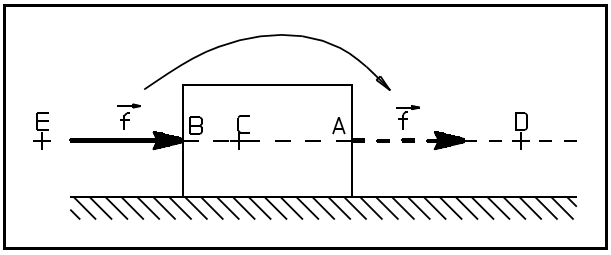

fig. 6.1. - *Force glissante sur sa ligne d'action.*

B) Deux forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ dont les lignes d'action. sont concourantes en A peuvent être remplacées par leur résultante (diagonale du parallélogramme des forces) dont la ligne d'action passe également par A (***fig. 6.2.***).

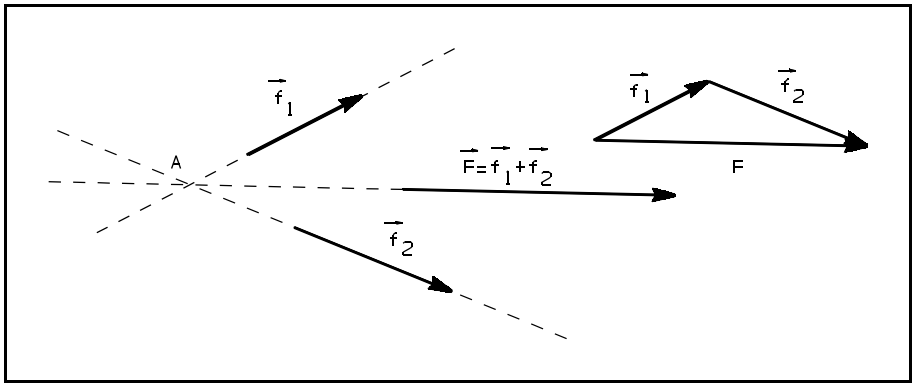

fig. 6.2. - *Compositions de 2 forces concourantes.*

C) Une force $\vec{f}_1$ peut être décomposée suivant deux forces $\vec{f}_{11}$ et $\vec{f}_{12}$ de directions imposées a_1 et a_2, à condition que $\vec{f}_1$, $\vec{f}_{11}$ et $\vec{f}_{12}$ concourent en un même point (***fig. 6.3.***).

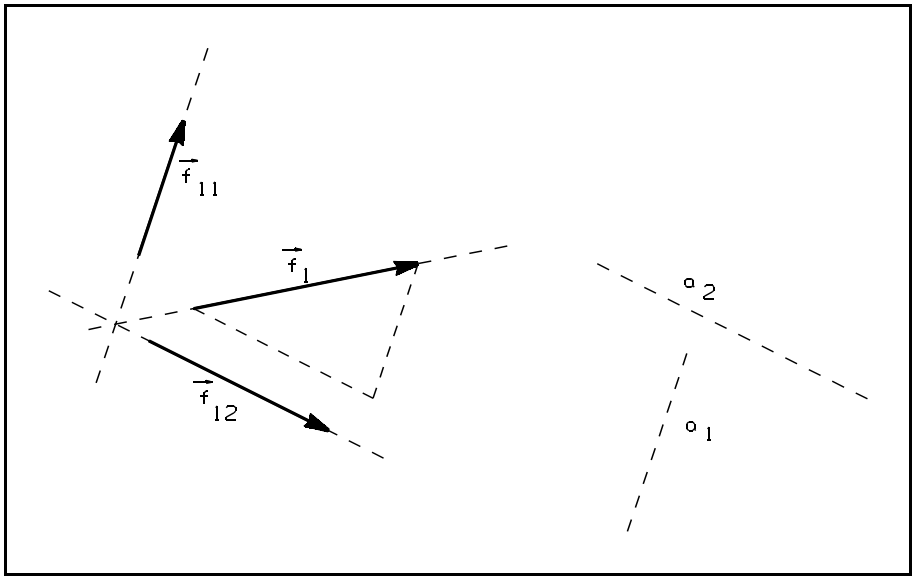

fig. 6.3. - *Décomposition d'une force en 2 directions connues.*

D) On ne change rien à un système de forces en y ajoutant un système de deux forces *réciproques* $\vec{r}$ et $-\vec{r}$ (deux forces opposées, sur la même ligne d'action, ***fig. 6.4.***).

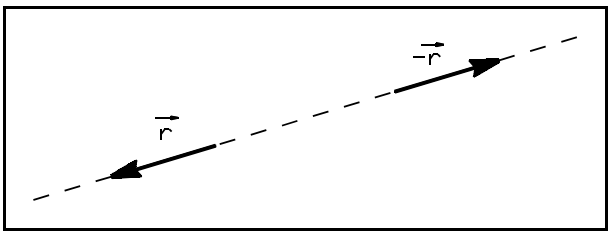

fig. 6.4. - *Ajout de forces réciproques.*

E) Deux forces parallèles $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ peuvent être remplacées par leur résultante $\vec{F}$ respectant la relation établie en ***§ 3.2.3.***; diverses constructions graphiques sont possibles, qui vérifient toutes la relation précitée.

1ère méthode (***fig. 6.5.***)

Pour trouver le point d'application de $\vec{F}$, on trace :

- $\overline{BC} = \left\| \vec{f}_1 \right\|$
- $\overline{AD} = \left\| \vec{f}_2 \right\|$

Les triangles $\overline{AXD}$ et $\overline{XBC}$ sont semblables, donc :

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{EC}\left(=\overline{AB}\right)} = \frac{\overline{AD}}{\overline{ED}} = \frac{\left\| \vec{f}_2 \right\|}{\left\| \vec{f}_1 \right\| + \left\| \vec{f}_2 \right\|}$$

(avec $\overline{AB}$ connu) et donc :

➜ $$\overline{AX} = \overline{AB} \frac{\left\| \vec{f}_2 \right\|}{\left\| \vec{f}_1 \right\| + \left\| \vec{f}_2 \right\|}$$

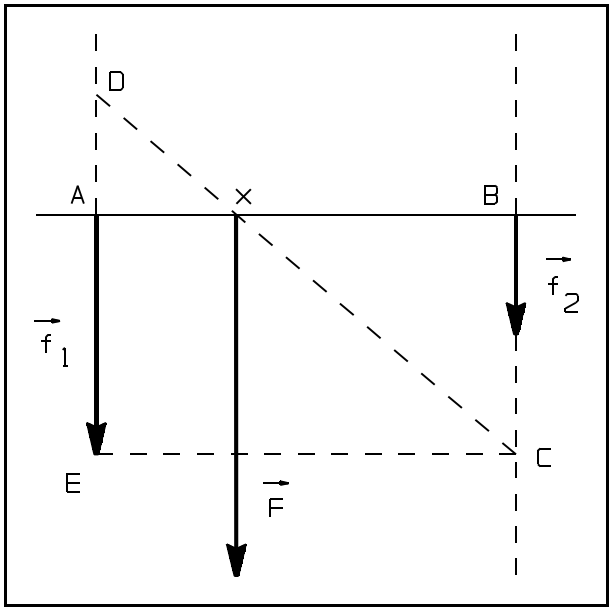

fig. 6.5. - *Résultante de 2 forces parallèles.*

2ième méthode (***fig. 6.6.***)

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{f}_1 + \vec{f}_2 \\ &= \vec{f}_1 + \vec{r} + \vec{f}_2 + \left(-\vec{r}\right) \\ &= \vec{f}_3 + \vec{f}_4 \end{aligned}$$

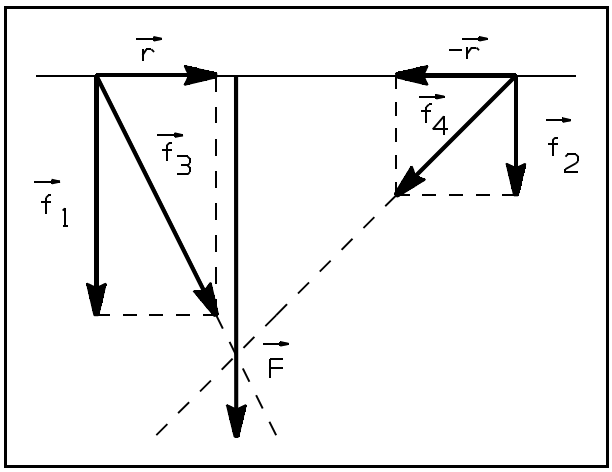

fig. 6.6. - *Résultante de 2 forces parallèles..*

3ième méthode (***fig. 6.7.***)

$$\vec{F} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$$

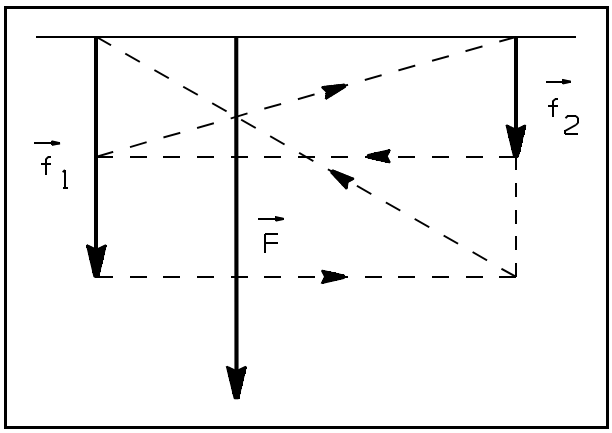

fig. 6.7. - *Résultante de 2 forces parallèles.*

Les mêmes constructions peuvent être utilisées pour deux forces parallèles de sens contraires.

Exemple par la *1ère méthode* (***fig. 6.8.***) :

- $\overline{BC} = \left\| \vec{f}_1 \right\|$
- $\overline{AD} = \left\| \vec{f}_2 \right\|$

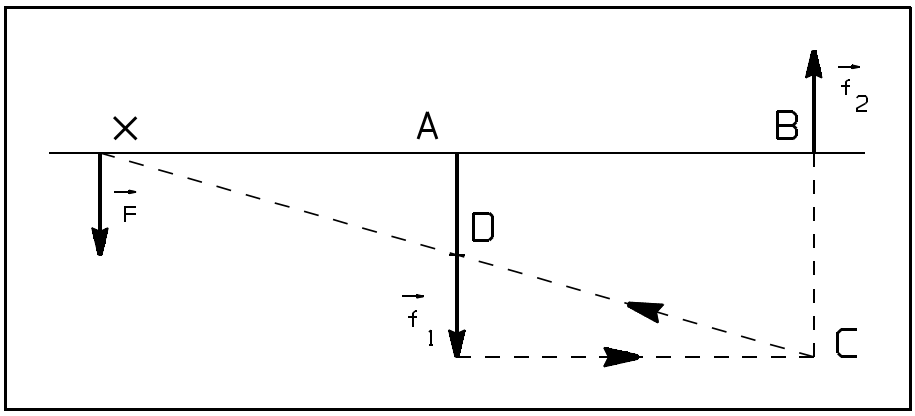

fig. 6.8. - *Résultante de 2 forces parallèles de sens contraires.*

F) Une force $\vec{f}_1$ peut être décomposée en deux forces $\vec{f}_{11}$ et $\vec{f}_{12}$, de lignes d'action a_1 et a_2 imposées, parallèles à la ligne d'action de $\vec{f}$ (***fig. 6.9.***).

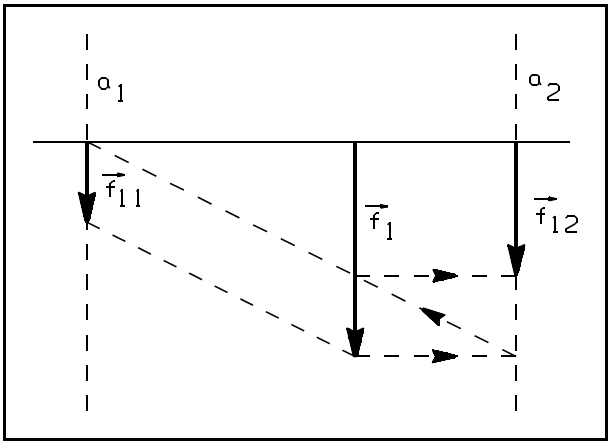

fig. 6.9. - *Décomposition d'une force en 2 directions parallèles.*

6.2. ***Résolution des problèmes plans***

6.2.1. Forces concourantes en un point

La seule condition d'équilibre, $\vec{F} = \vec{0}$, se traduit en graphostatique par un ***"polygone des forces fermé"***.

A) *Premier cas*

Soit un système de *n* forces $\vec{f}$ concourantes en P.

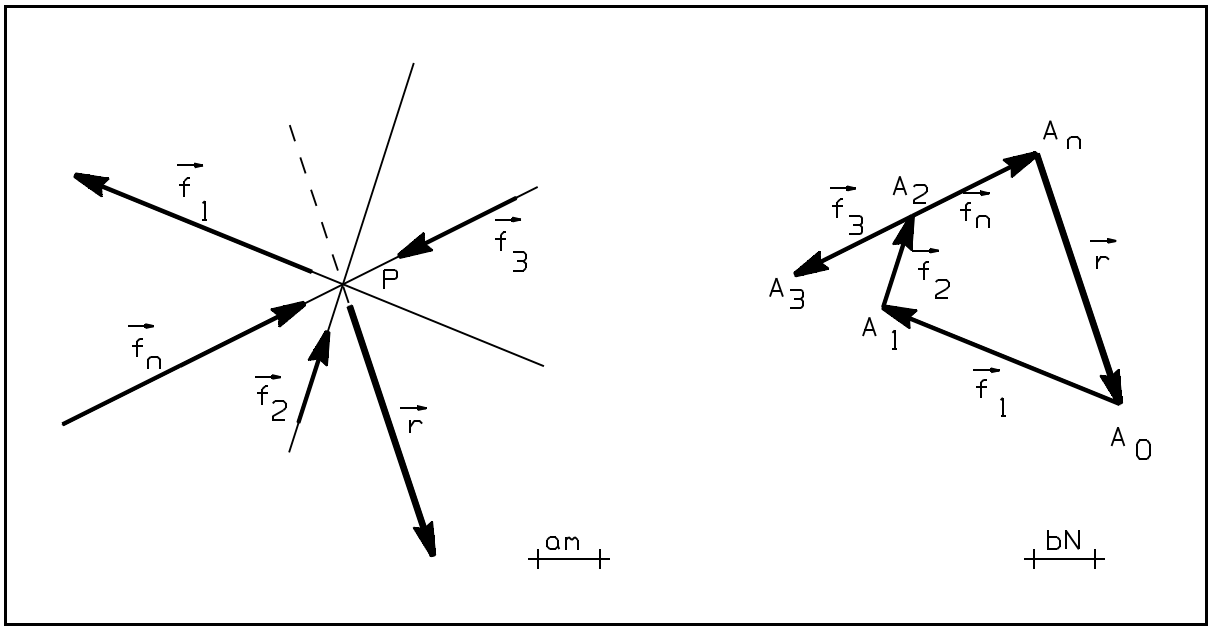

fig. 6.10. - *Forces concourantes en un point : équilibre.*

Déterminer graphiquement la force $\vec{r}$ qui équilibre le point P.

Il suffit, à partir d'un point A_o quelconque du plan, de tracer le polygone des n forces connues, à l'échelle $1\,cm \div b\,N$; chaque force est reportée parallèlement à sa ligne d'action. dans l'épure de situation. La force $\vec{r}$ recherchée est représentée à l'échelle b par le vecteur $\vec{A_n A_0}$ qui ferme le polygone des forces. Deux inconnues ont ainsi été déterminées : la *direction* et la *grandeur* de la résultante $\vec{r}$.

B) *Second cas*

Soit un système de n forces $\vec{f}_i$ concourantes en P. On demande de déterminer graphiquement les forces $\vec{f}_c$ et $\vec{f}_d$, de directions *c* et *d* connues, qui équilibrent le point P.

Comme dans le premier cas, on construit à partir d'un point quelconque A_o le polygone des forces connues, à l'échelle $1\,cm \div b\,N$. Par le point de départ A_o, on mène une parallèle à *c*, et par le point d'extrémité A_n, une parallèle à *d*. Ces deux droites se coupent en X.

On trouve ainsi $\vec{f}_c = b\,\vec{A_n X}$ et $\vec{f}_d = b\,\vec{X A_o}$.

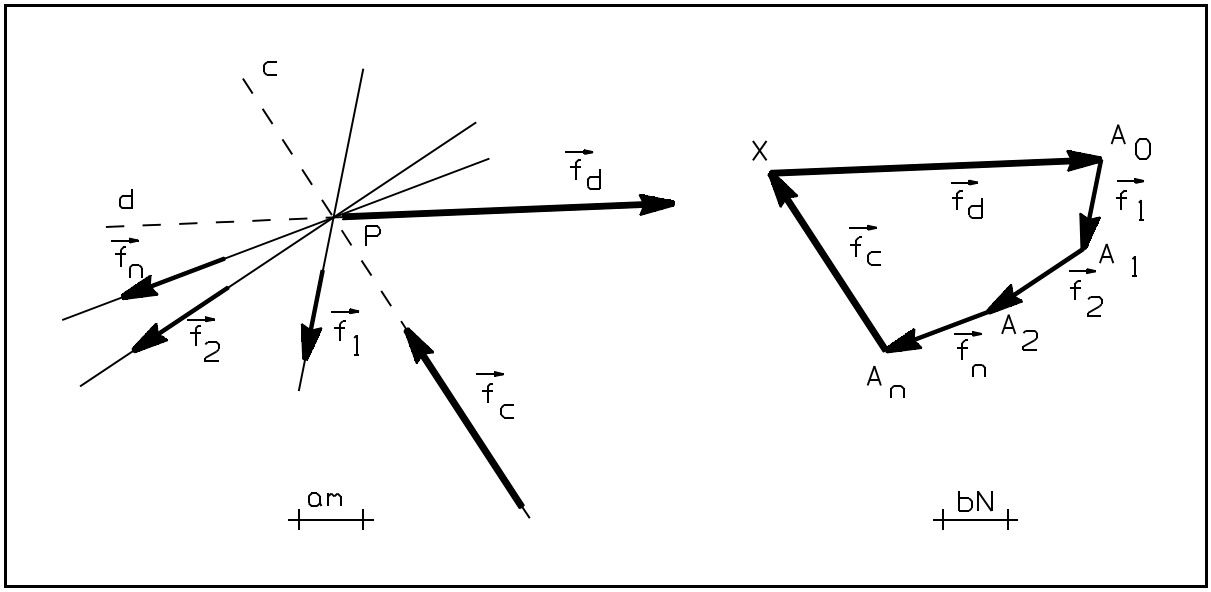

fig. 6.11. - *Forces concourantes en un point : équilibre.*

De nouveau, deux inconnues ont été déterminées : la grandeur de $\vec{f}_c$ et la grandeur de $\vec{f}_d$, les directions de ces forces étant imposées.

C) *Application importante*

Le ***théorème des trois forces*** (voir ***§ 5.1.5.***) est une application directe et immédiate des deux premiers cas développés ci-avant.

Application 6.1. Un poids $\|\vec{p}\| = 10\ N$ est suspendu au plafond au moyen de deux cordes, l'une de 3 *m* , l'autre de 4 *m*, leurs points d'attache au plafond étant distants de 5 *m*. Calculer la tension dans chaque corde.

Solution :

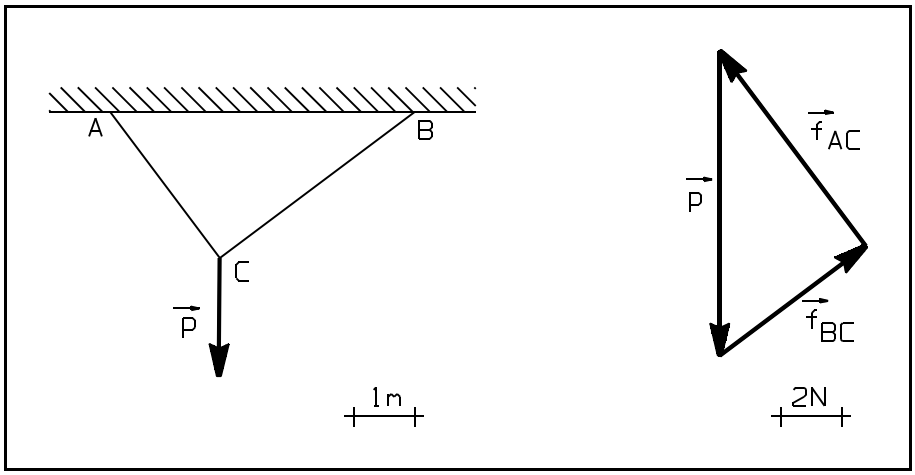

fig. 6.12. - *Application 6.1. résolution.*

Le polygone des forces donne :

$$\left\|\vec{f}_{\overline{AC}}\right\| = 2\left[\frac{N}{cm}\right] \times 4\,[cm] = 8\ N$$

$$\left\|\vec{f}_{\overline{BC}}\right\| = 2\left[\frac{N}{cm}\right] \times 3\,[cm] = 6\ N$$

Application 6.2. Une barre pesant 100 *N*, et longue de 5 *m*, est appuyée sur le sol, via une rotule A; cette dernière se trouve à une distance de 3 *m* par rapport au pied d'un mur. L'autre extrémité B de la barre repose simplement sur ce mur (= appui mobile). Déterminer les réactions d 'appuis $\vec{f}_A$ et $\vec{f}_B$ considérant que le centre de masse de la barre se trouve au milieu de celle-ci.

Solution :

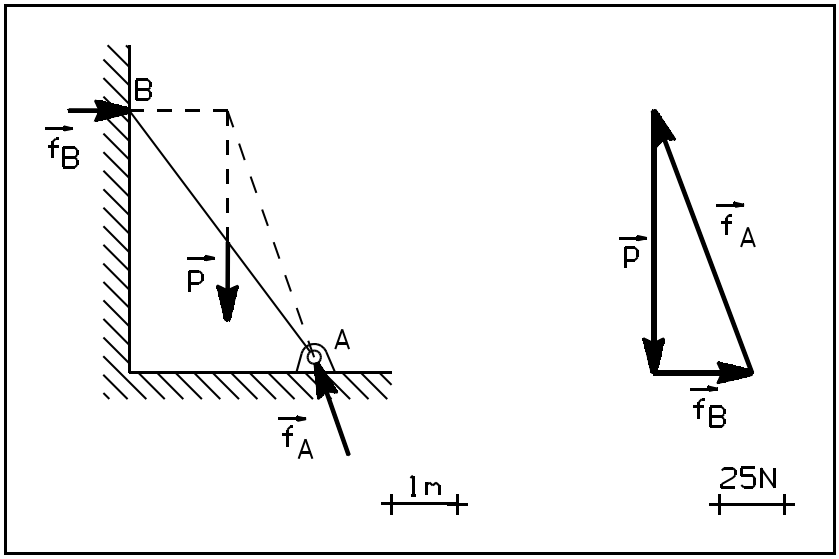

fig. 6.13. - *Application 6.2.*

Théorème des 3 forces

L'appui en B impose la direction (horizontale) de $\vec{f}_B$; par le théorème des trois forces $\vec{f}_A$, $\vec{f}_B$ et $\vec{p}$ doivent se couper en un même point, ce qui détermine obligatoirement la direction de $\vec{f}_A$. Le triangle des forces donne alors :

$$\left\|\vec{f}_A\right\| = 25\left[\frac{N}{cm}\right] \times 4.3\,[cm] = 107.5\ N$$

$$\left\|\vec{f}_B\right\| = 25\left[\frac{N}{cm}\right] \times 1.5\,[cm] = 37.5\ N$$

6.2.2. Forces parallèles

La résolution de problèmes plans faisant intervenir des forces parallèles repose toujours sur les constructions décrites en ***§ 6.1.4.***, ***e*** et ***f***. Deux inconnues peuvent être déterminées.

Application 6.3. Une poutre de 1 *m* de long repose sur deux appuis A et B, tels que schématisés ci-contre. La force $\vec{f}$, de 1000 *N*, est appliquée à 0.7 *m* de l'extrémité gauche de la poutre. Déterminer les réactions d'appui $\vec{f}_A$ et $\vec{f}_B$.

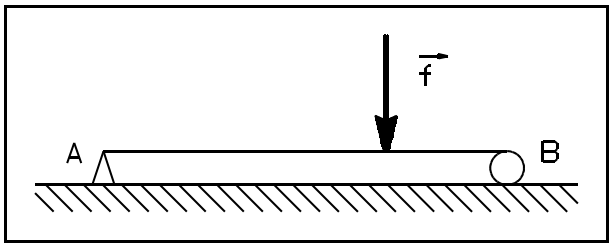

fig. 6.14. - *Application 6.3.*

Solution :

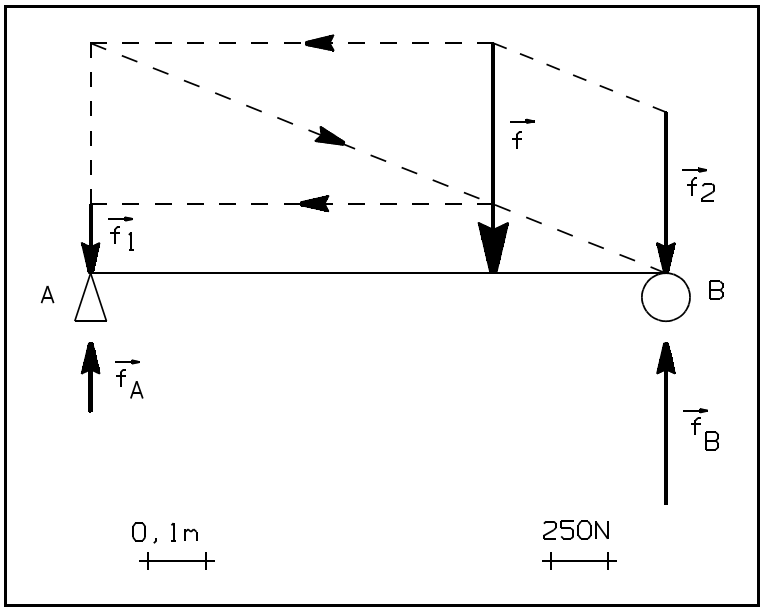

fig. 6.15. - *Application 6.3. : solution.*

Décomposition d'une force suivant 2 directions parallèles

Remarquons d'abord que $\vec{f}_A$ ne peut être que verticale, puisque, $\vec{f}$ et $\vec{f}_B$ le sont et que le polygone de forces doit être fermé ...

Il suffit ensuite de décomposer $\vec{f}$ en $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$; les réactions d'appuis sont les vecteurs réciproques de ces deux forces.

Constatons que, dans ce cas-ci, les deux épures (situation et forces) sont confondues. Les mesures des forces donnent :

$$\left\|\vec{f}_A\right\| = 250\left[\frac{N}{cm}\right] \times 1.2\,[cm] = 300\ N$$

$$\left\|\vec{f}_B\right\| = 250\left[\frac{N}{cm}\right] \times 2.8\,[cm] = 700\ N$$

6.2.3. Forces coplanaires quelconques : droite de Culmann

Le problème est d'équilibrer une force $\vec{f}$ par 3 forces $\vec{f}_a$, $\vec{f}_b$ et $\vec{f}_c$ dont les trois lignes d'action *a*, *b*, *c* sont connues et non concourantes (***fig. 6.16.***).

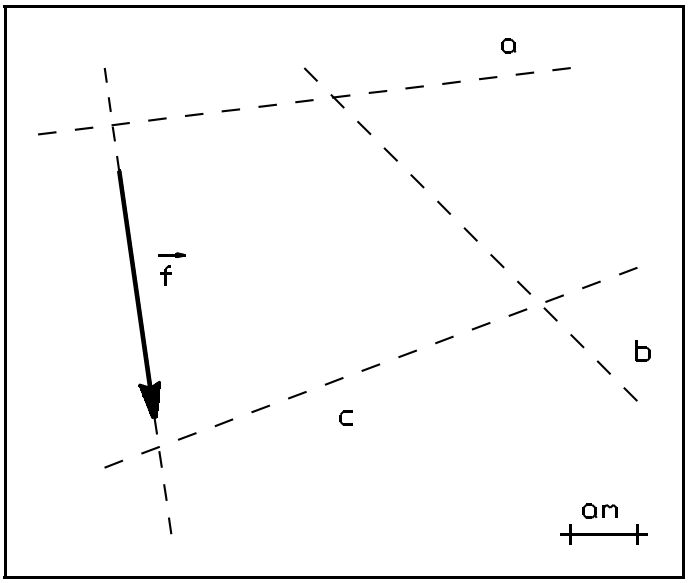

fig. 6.16. - *Décomposition d'une force en 3 directions connues.*

Le problème comporte bien 3 inconnues (en accord avec ***§ 6.1.3.***) à savoir les seules grandeurs $\|\vec{f}_a\|, \|\vec{f}_b\|$ et $\|\vec{f}_c\|$, les directions et positions étant imposées.

Pour résoudre le problème, le théorème des trois forces n'est évidemment pas ***directement*** d'application (puisque il y a quatre forces non concourantes); mais on l'appliquera à deux reprises, en deux points différents. Soit X_1 le point d'intersection des deux autres lignes d'action. (***fig. 6.17.***).

La droite $\overline{X_1 X_2}$ est appelée "*droite de Culmann* [(1)] *d*".

On peut appliquer le théorème des 3 forces en X_1 et équilibrer $\vec{f}$ par $\vec{f}_a$ et $\vec{f}_d$ (dans l'épure des forces) :

$$\vec{f} + \vec{f}_a + \vec{f}_d = \vec{0}$$

La force $\vec{f}_d$ dont, par construction, la ligne d'action. passe par le point d'intersection de *b* et *c*, peut être décomposée en $\vec{f}_b$ et $\vec{f}_c$ (de nouveau, théorème des trois forces) :

$$\vec{f}_d = \vec{f}_b + \vec{f}_c$$

On obtient ainsi finalement :

$$\vec{f} + \vec{f}_a + \vec{f}_b + \vec{f}_c = \vec{0}$$

---

(1) *Culmann Karl, (1821 [Bad Bergzabern] - 1881 [Riesbach]) : ingénieur allemand.*

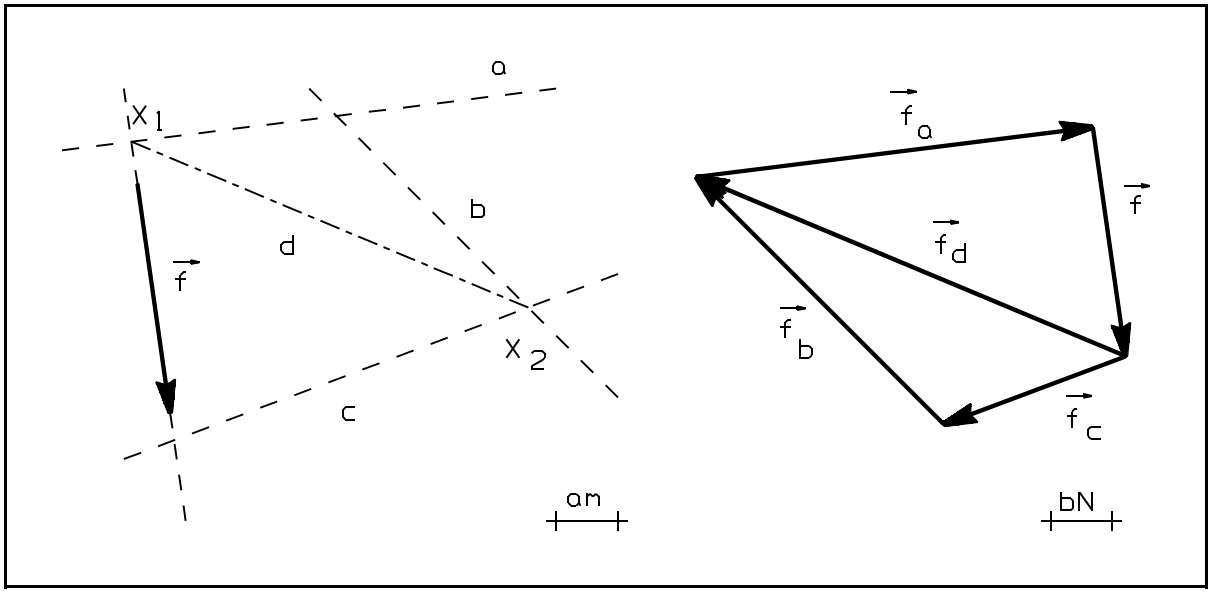

fig. 6.17. - *Droite de Culmann.*

Remarque :
Il existe ***trois droites*** de Culmann (dans le cas où 2 lignes d'action sont parallèles, il n'existe que *2 droites de Culmann*) dont au moins une est toujours accessible dans le cadre de l'épure; la solution du problème ne dépend évidemment pas de la droite de Culmann utilisée (parmi les trois possibles).

Application 6.4. Un wagonnet porte une charge $\vec{p}$ de 5000 N (entr'axe $e = 2\,m$; rayon de roues $r = 0.4\,m$; centre de masse G de la charge, situé à $h = 1\,m$ par rapport aux rails). Les rails forment avec l'horizontale un angle $\alpha = 15°$. Un câble $\overline{CD}$, horizontal, est accroché au niveau de l'axe C, et maintient l'ensemble en équilibre.
Déterminer les réactions d'appui des roues au sol, $\vec{f}_a$ et $\vec{f}_b$ ainsi que la tension dans le câble $\overline{CD}$.

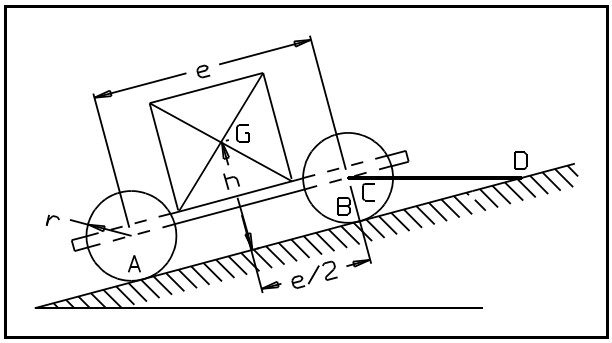

fig. 6.18. - *Application 6.4.*

Solution :
Droite de Culmann

La solution graphique est immédiate puisque la direction et la position des forces $\vec{f}_A$, $\vec{f}_B$ et $\vec{f}_{\overline{CD}}$ sont connues ! Remarquons que la solution analytique à ce même problème prendrait certainement plus de temps (avec, il est vrai, une plus grande précision numérique des résultats).

Résultats

$$\left\|\vec{f}_A\right\| = 2\,800\ N\ ;\ \left\|\vec{f}_B\right\| = 2\,375\ N\ ;\ \left\|\vec{f}_{\overline{CD}}\right\| = 1\,350\ N\ .$$

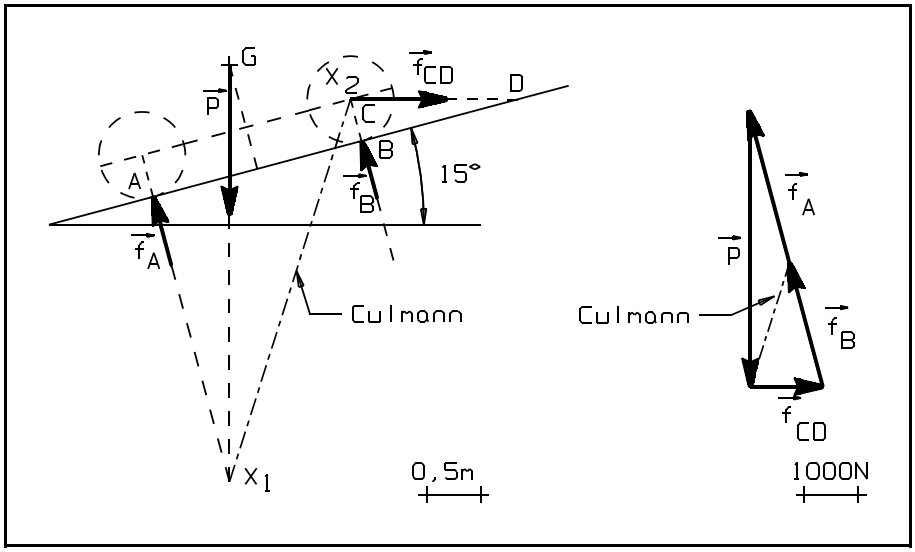

fig. 6.19. - *Application 6.4. : solution.*

6.2.4. Forces coplanaires quelconques : polygone funiculaire

A) *Résultante et axe central d'un système de forces coplanaires*

Soit un système de n forces $\vec{f}_i$ sur des lignes d'action a_i; recherchons les trois inconnues que sont la position, la direction et la grandeur de la résultante $\vec{F}$ de ce système de forces (***fig. 6.20.***).

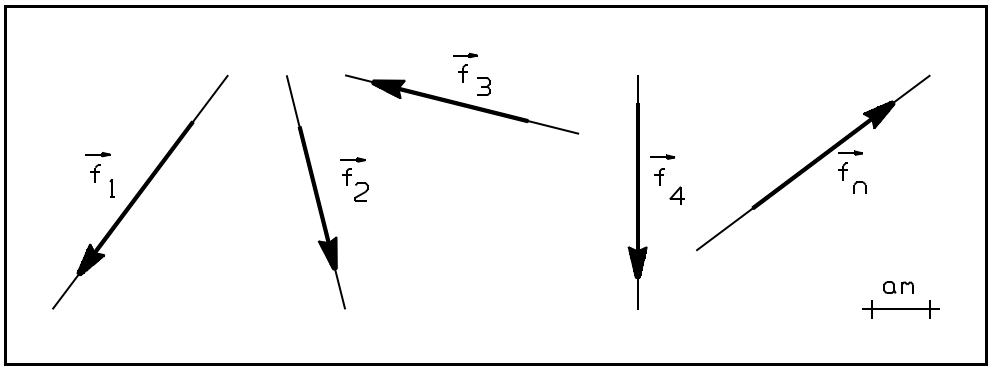

fig. 6.20. - *Forces quelconques.*

Nous allons démontrer que pour une problème comprenant *n* forces, il suffit d'appliquer "*intelligemment*" *n* fois le théorème des trois forces (toujours lui !).

Prenons par exemple $n = 3$ pour établir le principe de résolution (***fig. 6.21.***).

On commence par déterminer la résultante $\vec{F}$ en formant le polygone des forces :

$$\vec{F} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = b\ \vec{A_0 A_3}$$

Ainsi, la direction et la grandeur de $\vec{F}$ sont déjà connues; reste à déterminer sa position dans l'épure de situation. Pour ce faire, on choisit un "*pôle P*" quelconque (en dehors d'un des côtés du polygone des forces), et on trace les "*rayons polaires*" joignant les points A_i à P; on appelle "*F.1*" le rayon polaire coincé entre $\vec{F}$ et $\vec{f}_1$; "1.2" celui qui est coincé entre $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$; "1.3" ...

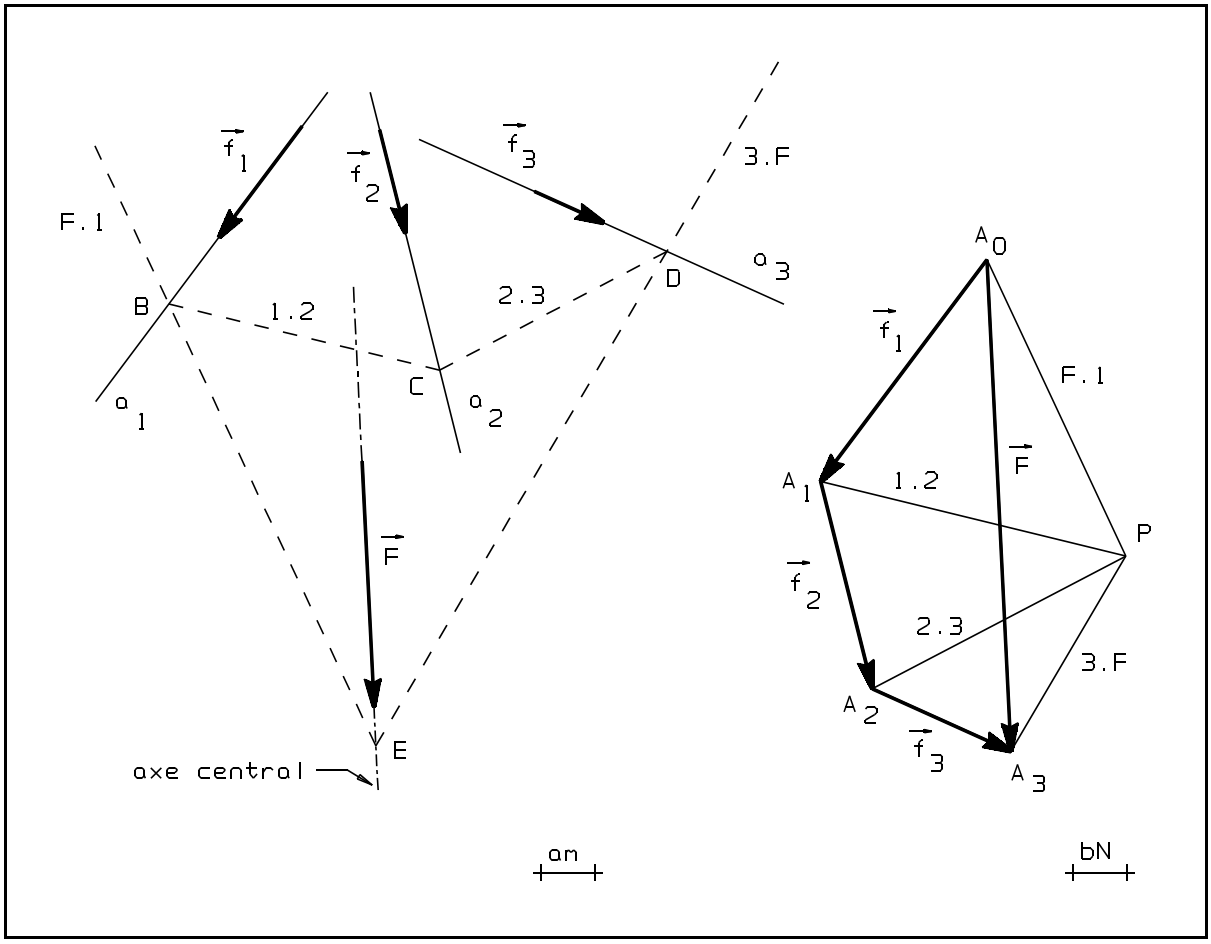

fig. 6.21. - *Polygone funiculaire : recherche de l'axe central.*

Ensuite, par un point quelconque de l'épure de situation, on mène une parallèle à *F.1*, jusqu'à son point de rencontre B avec la ligne d'action. a_1; par B, on mène une parallèle à 1.2 jusqu'à son point de rencontre C avec a_2; par C ...

Les segments ainsi tracés forment les côtés d'un polygone appelé "*polygone funiculaire*", côtés qu'on repérera de la même manière que les rayons polaires correspondants.

> Les rayons polaires *(i−1).i* et *i.(i+1)* encadrent la force $\vec{f}_1$ au polygone des forces, les côtes *(i−1).i* et *i.(i+1)* du polygone funiculaire se coupent sur la ligne d'action de $\vec{f}_1$ dans l'épure de situation.

Pour terminer : les rayons polaires *F*.1 et 3.*F* encadrent la résultante $\vec{F}$ au polygone des forces; les côtés *F*.1 et 3.*F* du polygone funiculaire se coupent sur la ligne d'action. de $\vec{F}$ (c'est-à-dire sur l'axe central du système de forces) dans l'épure de situation. C'est donc en prolongeant les côtés extrêmes du polygone funiculaire qu'on détermine par où doit passer la résultante du système.

Cette méthode revient à remplacer successivement chaque force $\vec{f}_i$ par deux forces $\vec{f}_{i_1}$ et $\vec{f}_{i_2}$ ***(fig. 6.22.)***; lorsqu'on en fait la somme pour déterminer la résultante du système, toutes ces composantes se détruisent deux à deux ($\vec{f}_{i_2}$ avec $\vec{f}_{(i+1)_1}$) sauf les composantes extrêmes $\vec{f}_{11}$ et $\vec{f}_{32}$. Le système de forces $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ est donc équivalent au système formé par $\vec{f}_{11}$ et $\vec{f}_{32}$, et sa résultante passe par E.

Remarques :

- Le résultat est indépendant des échelles choisies; celles-ci n'interviennent pas dans la construction.
- De même, le choix d'un autre pôle P (ou d'un autre point de départ du polygone funiculaire), amène en un autre point de ce même axe central.

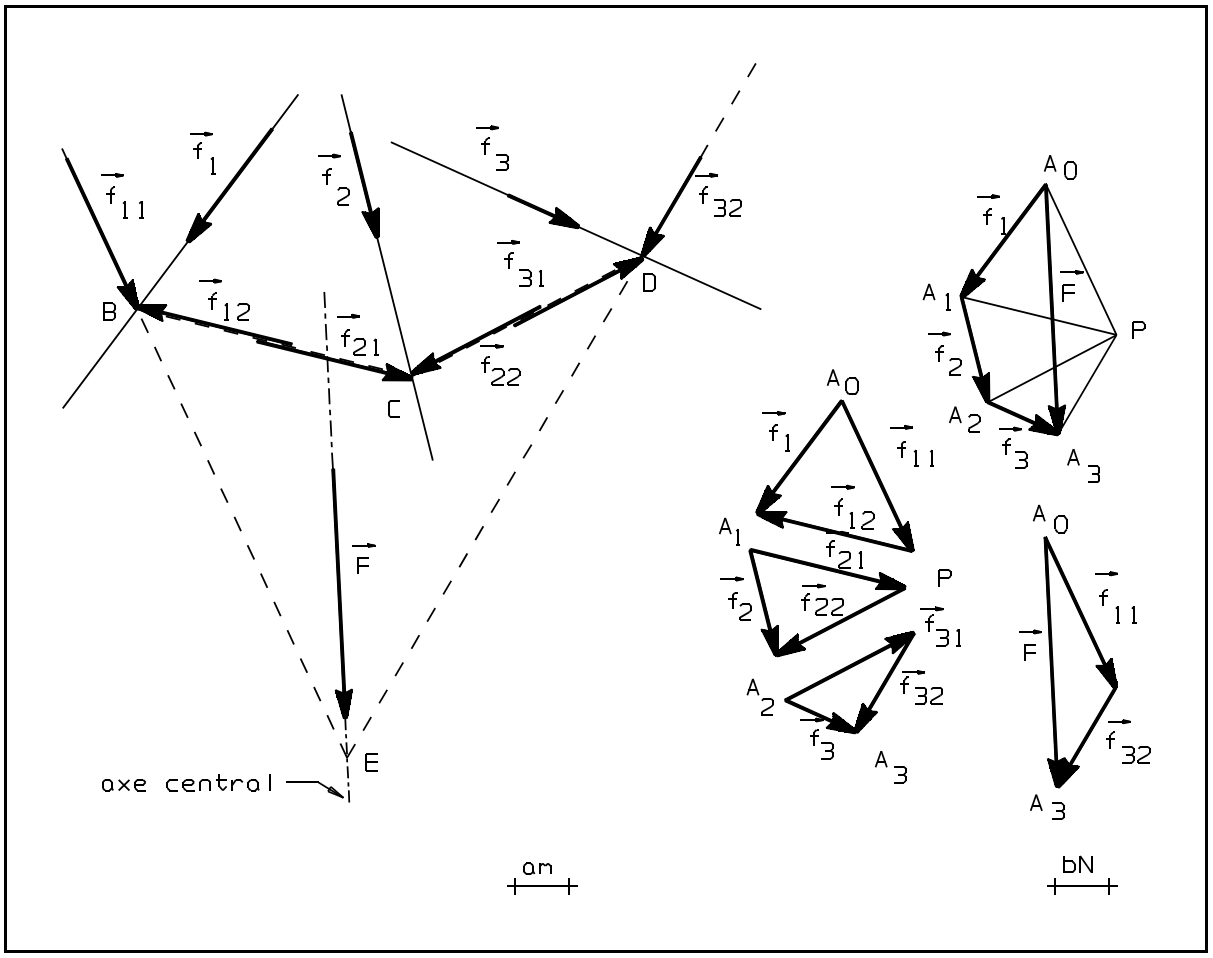

fig. 6.22. - *Polygone funiculaire : démonstration.*

B) *Conditions d'équilibre en graphostatique*

La condition $\vec{F} = \sum \vec{f}_i = \vec{0}$ se traduit par *un polygone des forces fermé* : les rayons polaires *F.1* et *n.F* sont confondus en *n.1* (***fig. 6.23.***, avec $n = 4$). Si on remplace chaque $\vec{f}_i$ par ses composantes $\vec{f}_{i_1}$ et $\vec{f}_{i_2}$, il en résulte que les composantes "*extrêmes*" $\vec{f}_{11}$ et $\vec{f}_{n2}$ ont même grandeur, même direction, mais sont de sens opposés.

$$\vec{f}_1 = \vec{A_0P} + \vec{PA_1} = \vec{f}_{11} + \vec{f}_{12}$$
$$\vec{f}_i = \vec{A_{i-1}P} + \vec{PA_i} = \vec{f}_{i_1} + \vec{f}_{i_2}$$
$$\vec{f}_4 = \vec{A_3P} + \vec{PA_0} = \vec{f}_{41} + \vec{f}_{42}$$

En reprenant le raisonnement établi au point a, on constate que le système de forces se ramène à ces deux forces opposées $\vec{f}_{11}$ et $\vec{f}_{n2}$; si en formant le polygone funiculaire on obtient des côtés *n.1* et

(n.1)' qui sont parallèles mais distincts, le système est équivalent au couple de forces $\vec{f}_{11}$ et $\vec{f}_{n2}$, dont le moment résultant vaut :

$$\left\|\vec{M}_P\right\| = \left(b \times \overline{PA_0}\right)\left(a \times d'\right) \quad [Nm]$$

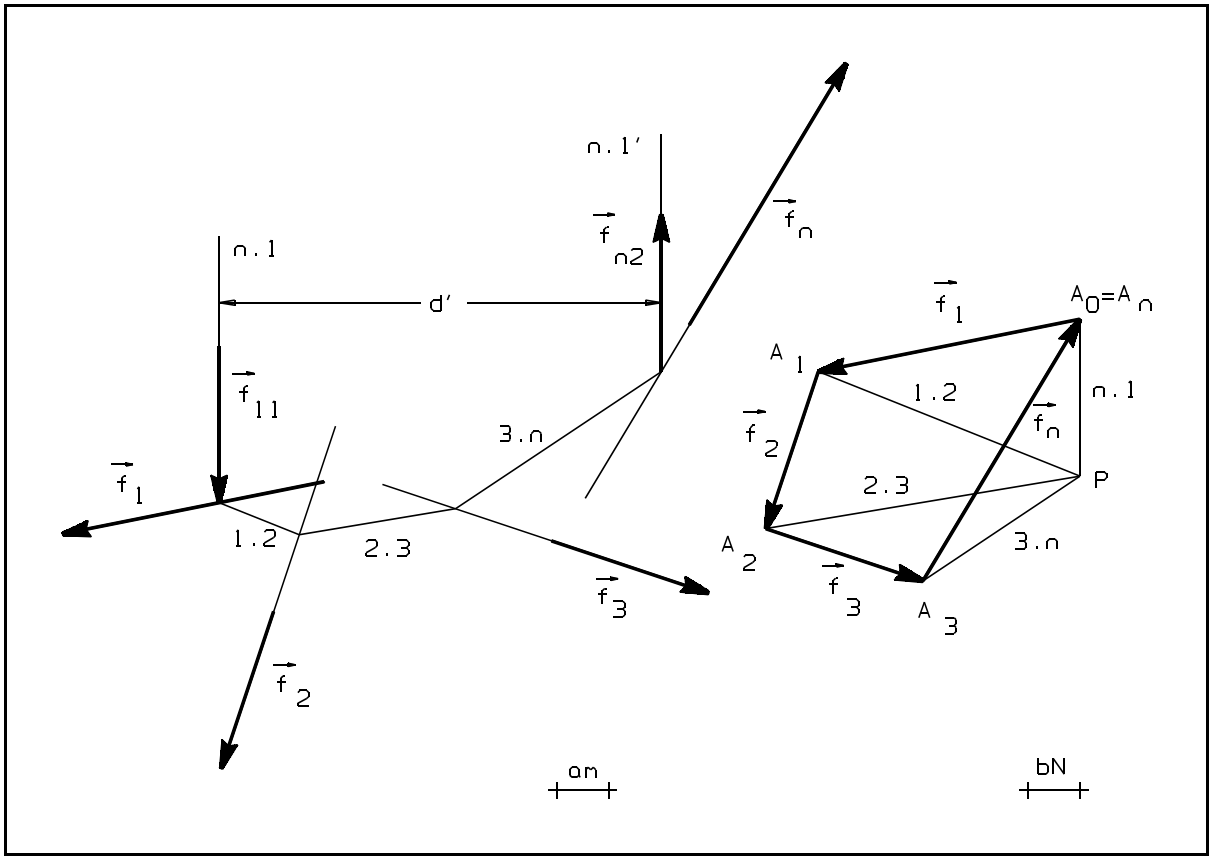

fig. 6.23. - *Fermeture du polygone funiculaire : équilibre.*

Par contre, si les côtés *n.1* et *(n.1)'* du polygone funiculaire se superposent, alors le système de forces a une résultante nulle ($\vec{F} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{f}_{11} + \vec{f}_{12} = \vec{0}$) et un moment résultant nul (d' est nul dans l'épure de situation; $\vec{f}_{11}$ et $\vec{f}_{n2}$ sont "*réciproques*").

Les conditions d'équilibre se traduisent donc en graphostatique par :

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{Polygone des forces fermé}$$
$$\vec{M}_P = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{Polygone funiculaire fermé}$$

A partir des données du problème (forces actives), il faut :

- tracer le polygone des forces (à une échelle convenable);
- choisir un pôle P et tracer les rayons polaires;
- construire le polygone funiculaire;
- fermer celui-ci, puis, par le pôle P, tracer une parallèle à ce côté de fermeture;

On détermine ainsi dans l'épure des forces les différentes forces réactives.

Application 6.5. La poutre $\overline{AC}$ de 10 *m* de long, est soumise à 3 forces verticales : $\left\|\vec{f}_1\right\| = 1500\ N$, $\left\|\vec{f}_2\right\| = 2500\ N$ et $\left\|\vec{f}_3\right\| = 3000\ N$. Déterminer les réactions d'appui $\vec{f}_A$ et $\vec{f}_B$.

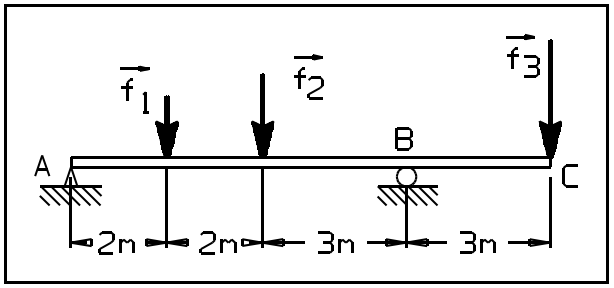

fig. 6.24. - *Application 6.5.*

Solution :

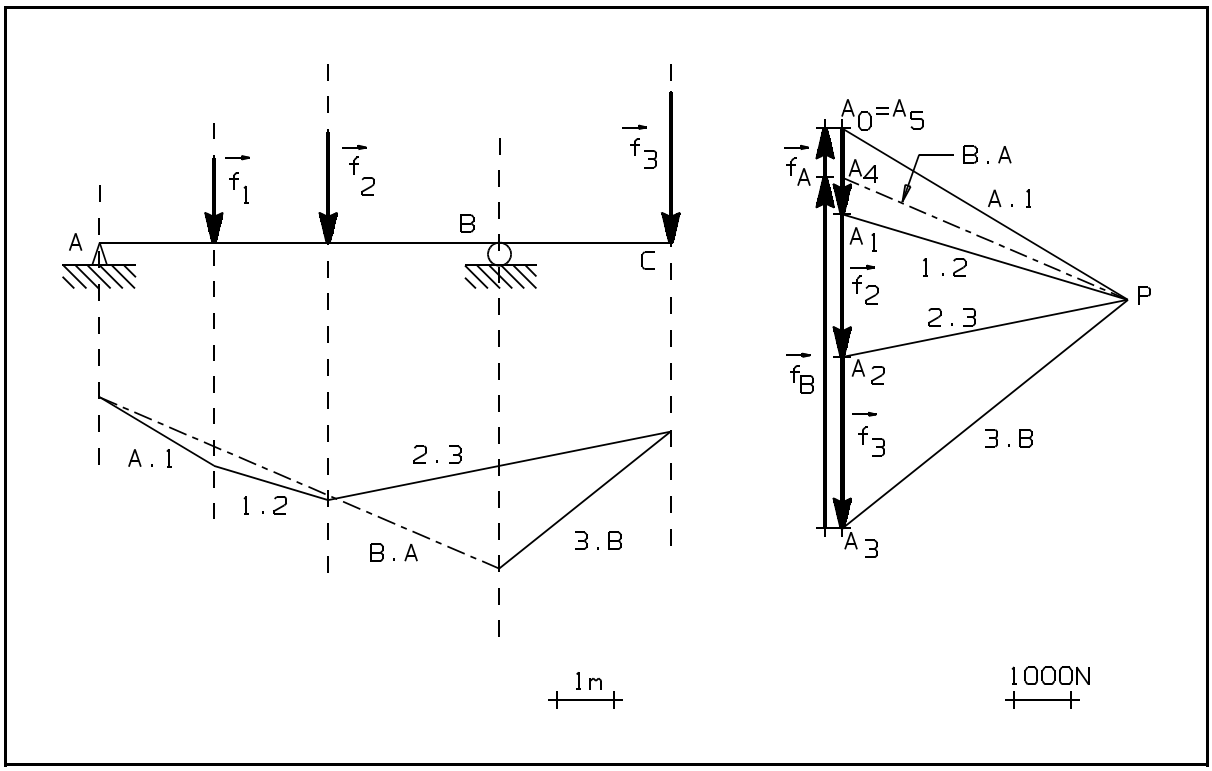

fig. 6.25. - *Application 6.5. : solution.*

$\vec{f}_1$	$\vec{f}_2$	$\vec{f}_3$	$\vec{f}_B$	$\vec{f}_A$	
^	^	^	^	^	
A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	$A_5 = A_0$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A.1	1.2	2.3	3.*B*	*B*.*A*	*A*.1

$\vec{f}_A$ est nécessairement verticale, puisque toutes les autres forces le sont (y compris $\vec{f}_B$, appui mobile). Le "*polygone*" des forces va donc être dégénéré en un segment de droite. C'est pourquoi il est (bien souvent) utile de rappeler, dans un petit tableau annexe, l'ordre des forces dans le polygone des forces (on commence par les forces actives, en essayant de progresser de proche en proche, puis on termine par les forces réactives, encore inconnues !).

Dans ce tableau sont également repris les points A_i délimitant ces forces, ainsi que la numérotation des rayons polaires correspondants. Le rayon polaire *B*.*A* est indéterminé au départ (point A_4, subdivisant la fermeture du polygone des forces, de A_3 à A_0, en les 2 réactions $\vec{f}_A$ et $\vec{f}_B$); sa direction

sera déterminée par le côté B.A. de fermeture du polygone funiculaire. Une fois A_4 déterminé, on obtient ainsi :

$$\left\|\vec{f}_A\right\| = b \times \overline{A_4 A_0} = 1000\left[\frac{N}{cm}\right] \times 0.9\,[cm] = 900\ N$$

$$\left\|\vec{f}_B\right\| = b \times \overline{A_3 A_4} = 1000\left[\frac{N}{cm}\right] \times 6.1\,[cm] = 6100\ N$$

Le résultat est indépendant de l'ordre suivi dans la construction du polygone des forces, non seulement pour les forces actives, mais aussi pour les réactions d'appui. Mais il faut *respecter le même ordre* dans la construction du polygone funiculaire.

Application 6.6. La pièce $\overline{ABCD}$ est articulée en A et appuyée en C. Elle est soumise à 3 forces :
$\left\|\vec{f}_1\right\| = 700\ N\ ; \left\|\vec{f}_2\right\| = 2\,000\ N\ ; \left\|\vec{f}_3\right\| = 870\ N$.
Déterminer les réactions d'appui $\vec{f}_A$ et $\vec{f}_C$.

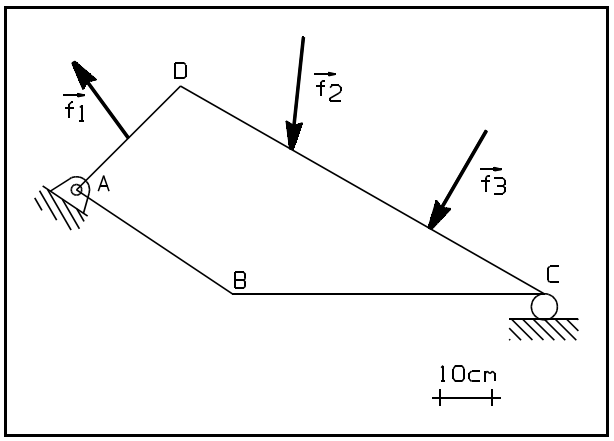

fig. 6.26. - *Application 6.6.*

Solution :

	$\vec{f}_1$		$\vec{f}_2$		$\vec{f}_3$		$\vec{f}_B$		$\vec{f}_A$	
	^		^		^		^		^	
A_0		A_1		A_2		A_3		A_4		$A_5 = A_0$
⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮
$A.1$		1.2		2.3		$3.C$		$C.A$		$A.1$

Si la ligne d'action de $\vec{f}_C$ est connue (verticale), celle de $\vec{f}_A$ ne l'est pas (d'où problème pour tracer le polygone funiculaire). En fait, le seul point connu de la ligne d'action de $\vec{f}_A$ est le point A lui-même. Il faut donc faire passer (débuter) le polygone funiculaire par A; en A, deux côtés du polygone funiculaire doivent se couper.

$$\left\|\vec{f}_A\right\| = b \times \overline{A_4 A_0} = 200\left[\frac{N}{cm}\right] \times 6.6\,[cm] = 1320\ N$$

$$\left\|\vec{f}_C\right\| = b \times \overline{A_3 A_4} = 200\left[\frac{N}{cm}\right] \times 7.0\,[cm] = 1400\ N$$

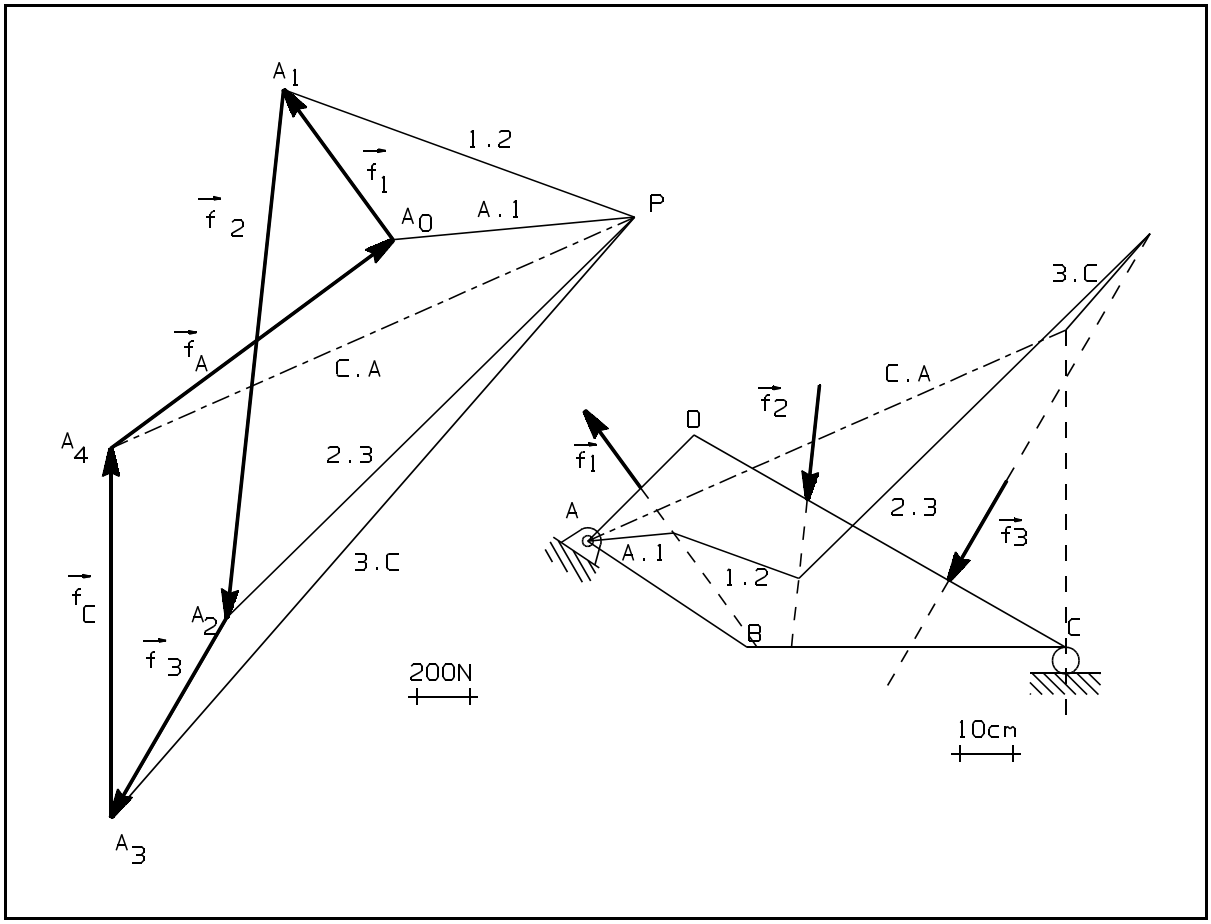

fig. 6.27. - *Application 6.6. : solution.*

6.3. ***Position du centre de masse de surfaces planes***

La détermination du centre de masse revient à la recherche de la résultante d'un système de vecteurs parallèles (éventuellement suivant deux directions différentes). On décompose la surface en éléments et on fait correspondre à tous ces éléments des vecteurs de grandeur proportionnelle à l'aire de l'élément qu'ils représentent, parallèles à une direction commune quelconque. L'axe central du système de vecteurs ainsi obtenu passe par G.

Rappelons les considérations qui permettent de faciliter la recherche de G :

- les éléments de symétrie (axes ou centre) passent par G;
- la décomposition de la surface en 2 surfaces "*simples*" (de centres de masse G_1 et G_2 connus) permet de situer un lieu de points pour G : la droite passant par G_1 et par G_2;
- l'utilisation de surfaces partielles "*négatives*" facilite souvent la recherche de G : attention, à ces surfaces négatives on doit associer des vecteurs de sens opposé à ceux représentant des surfaces positives.

Application 6.7. Déterminer la position de G dans le trapèze ci-contre.

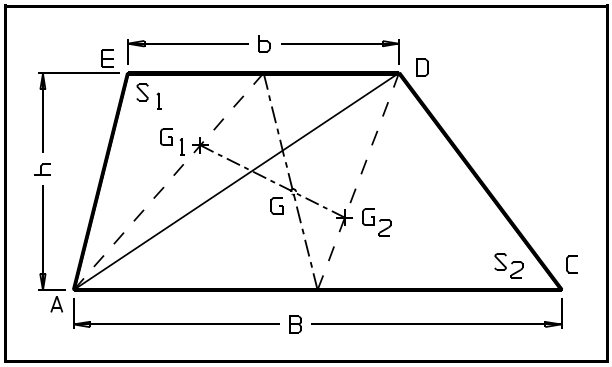

fig. 6.28. - *Application 6.7.*

Solution :

Décomposition de la surface en 2 surfaces "simples"

La position de G dans le trapèze ci-contre se détermine en décomposant la surface en deux triangles S_1 (centre G_1) et S_2 (centre G_2) puis en traçant le segment qui relie le milieu de la petite base au milieu de la grande base.

Application 6.8. Déterminer la position du centre de gravité G du "L" ci-contre.

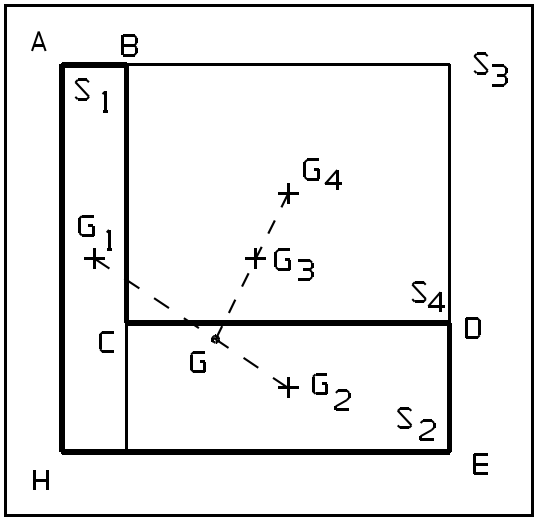

fig. 6.29. - *Application 6.8.*

Solution :

Décomposition de la surface en 2 surfaces "simples"

Pour la surface en "L" ci-contre, on décompose une première fois en deux rectangles S_1 et S_2 (d'où un premier lieu de points $\overline{G_1G_2}$); puis on décompose en un grand rectangle S_3 dont on retire le petit rectangle S_4 (d'où un second lieu de points $\overline{G_3G_4}$). G est à l'intersection de ces deux lieux de points.

Application 6.9. Déterminer la position du centre de masse du disque percé d'un trou (avec $r_2 = r_1/2$).

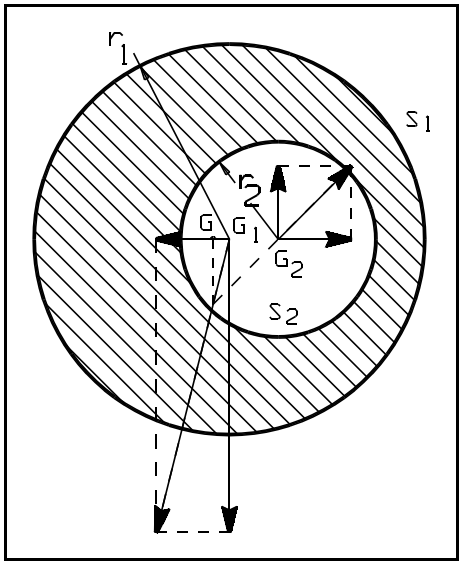

fig. 6.30. - *Application 6.9.*

Solution :

*Composition de 2 forces parallèles **(§ 6.1.4.E))***

On sait que G appartient à l'axe de symétrie de la surface (diamètre horizontal); il suffit ensuite de trouver l'axe central des deux vecteurs associés,

- l'un au grand disque ($A_1 = \pi\, r_1^2$),
- l'autre au "trou" ($A_2 = -\pi\, r_2^2 = -\pi \dfrac{r_1^2}{4} = -\dfrac{A_1}{4}$)

Application 6.10. Déterminer le centre de masse du secteur circulaire $\overset{\frown}{OAB}$ ci-contre.

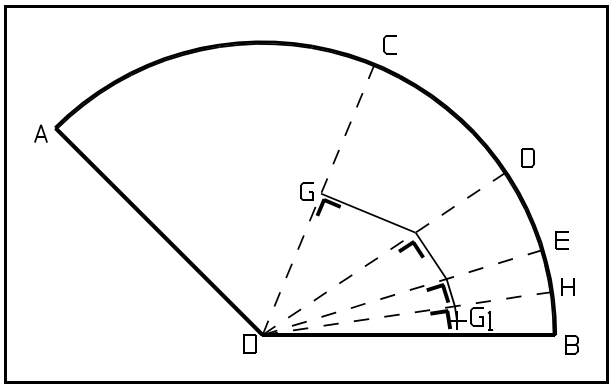

fig. 6.31. - *Application 6.10.*

Solution :

A) Si l'angle au centre est petit ($0 \rightarrow 5° \ldots 8°$) le secteur peut être assimilé à un triangle. Soit le secteur circulaire $\overset{\frown}{OBH}$ assimilé à un triangle.

D'où : $\overline{OG_1} = \dfrac{2}{3}\, r$

B) Le centre de masse de la somme de 2 secteurs petits, identiques, juxtaposés ($\overset{\frown}{OBH}$ et $\overset{\frown}{OHE}$) est sur la perpendiculaire au côté commun ($\overline{OH}$).

$\overline{G_1G_2} \perp \overline{OH}$ et G le milieu de $\overline{G_1G_2}$.

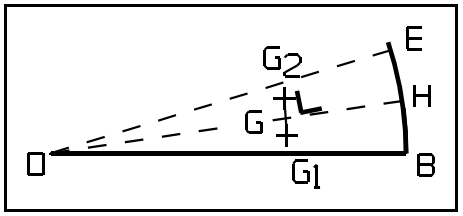

fig. 6.32. - *Application 6.10. : solution.*

C) La méthode revient à diviser le secteur circulaire donné en une somme de secteurs petits, et déterminer G de proche en proche.

$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$; $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DB}$; $\overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EB}$.

Application 6.11. Déterminer le centre de masse de la surface ci-après.

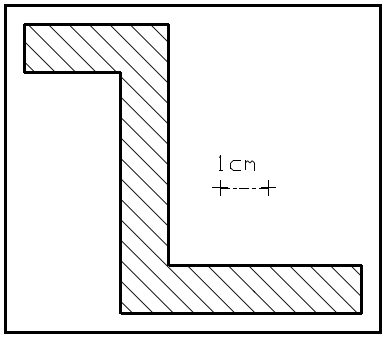

fig. 6.33. - *Application 6.11.*

Solution :

Polygone funiculaire

On utilise deux fois la technique du polygone funiculaire, sur les vecteurs $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$ associés aux trois rectangles élémentaires.

Le polygone funiculaire nécessaire à la détermination de la position verticale de G se construit à partir de perpendiculaires menées aux rayons polaires tracés pour la position horizontale de G.

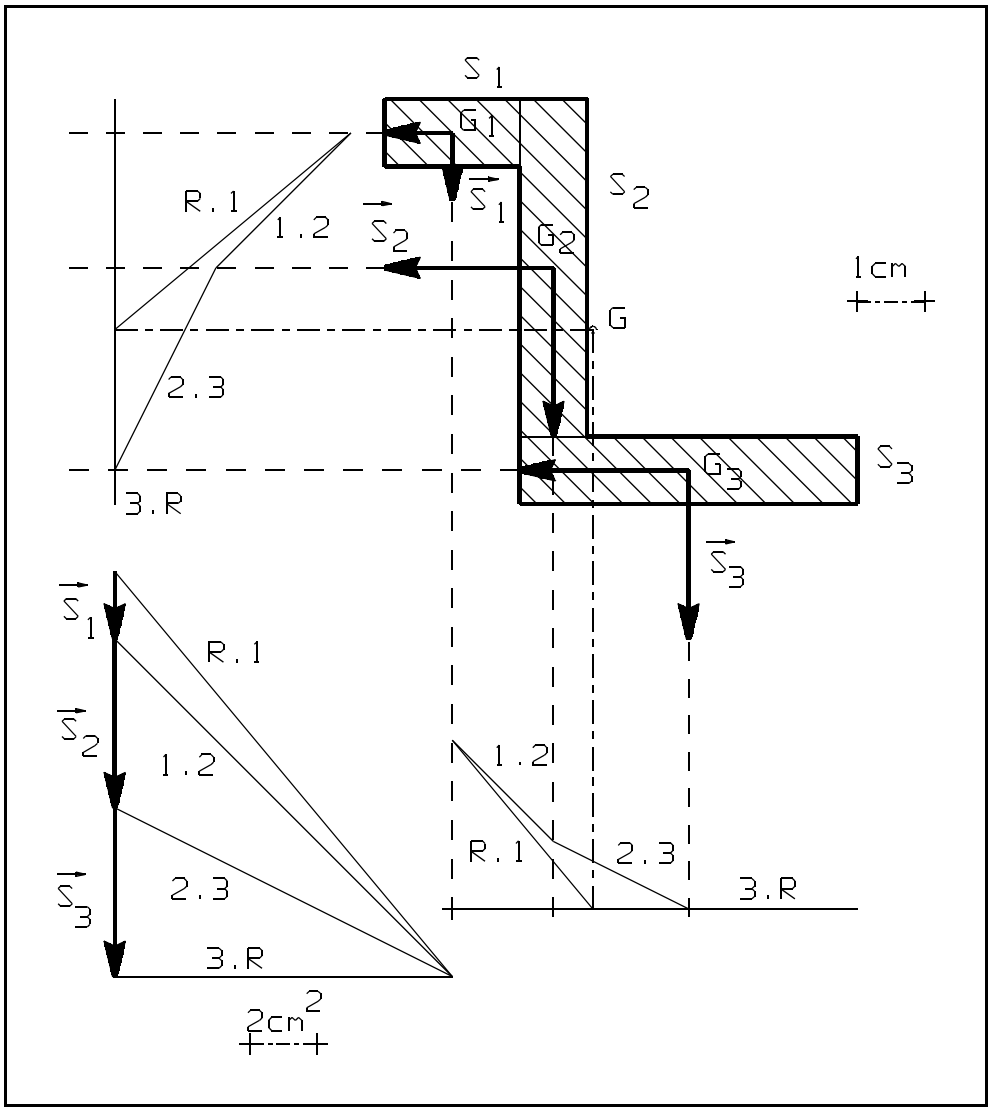

fig. 6.34. - *Application 6.11. : solution.*

6.4. *Notions sur les systèmes triangulés*

6.4.1. Définition et théorie

Voir définition et théorie au ***§ 5.6. Notions sur les systèmes triangulés***.

6.4.2. Méthodes des noeuds de Crémona (treillis simples) - Méthode graphique

a. Il faut au départ connaître toutes les forces extérieures appliquées, actives ***et*** réactives ; il faut donc commencer par déterminer les réactions d'appui (polygone funiculaire, méthode analytique ...).

b. On étudie ensuite de proche en proche l'équilibre des différents noeuds, en partant en général d'une extrémité de la structure.

c. On appelle ***Crémona*** [2] la juxtaposition ordonnée des polygones des forces relatifs aux différents noeuds.

d. Chaque fois qu'on passe d'un noeud au suivant il ne faut pas perdre de vue que l'action d'une barre sur un noeud est égale et directement opposée à son action sur le noeud précédent ($\vec{f}_{\overline{AB}} = -\vec{f}_{\overline{BA}}$).

e. Si l'ouvrage est symétrique (c'est le cas de beaucoup de charpentes) par rapport à un plan vertical par exemple, avec des charges ayant le même plan de symétrie, il est suffisant, en général, d'en étudier la moitié.

f. Si en un noeud il n'y a qu'une tension de barre inconnue, la fermeture du polygone des forces, relative à ce noeud, sert de contrôle car la résultante des forces connues doit être dirigée suivant la direction de la barre dont on cherche la tension.

Le grand attrait de la méthode de Crémona est de pouvoir combiner entre eux tous les polygones des forces des différents noeuds. On choisit un sens général de rotation (par exemple le sens horlogique) et on trace tous les polygones en y introduisant les forces dans l'ordre où on les rencontre en tournant autour du noeud dans le sens choisi. Les divers polygones peuvent alors être greffés l'un sur l'autre de manière à former un diagramme unique très compact qui permet tout aussi bien de déterminer les efforts dans les barres tout en ne demandant que la moitié de travail de dessin.

---

[2] *Luigi Cremona, (1830 [Pavie] - 1903 [Rome]) : mathématicien et homme politique italien.*

Application 6.12. Une grue de 5000 N est représentée ci-contre; en A, une rotule; en B, un appui mobile. Cette grue supporte trois forces : $\left\|\vec{f}_1\right\| = 5000\ N$; $\left\|\vec{f}_2\right\| = 3000\ N$ et $\left\|\vec{f}_3\right\| = 2000\ N$.

Déterminer les réactions d'appui $\vec{f}_A$ et $\vec{f}_B$ ainsi que les tensions dans chaque barre.

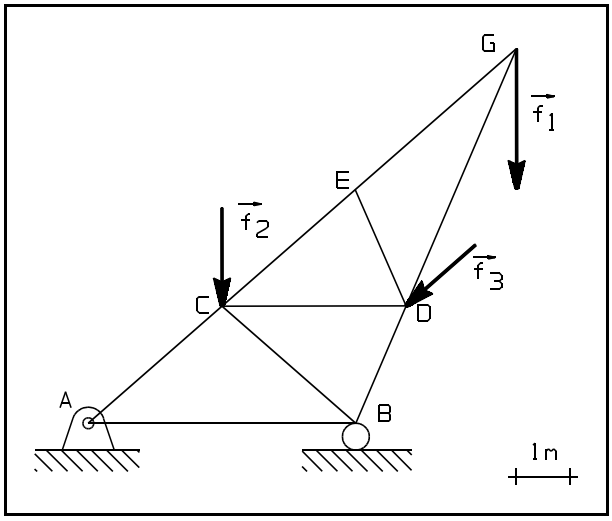

fig. 6.35. - *Application 6.12.*

Solution :

Recherche des réactions d'appui

Polygone funiculaire :

A étant une articulation, nous savons que le funiculaire sera construit à partir du point A. C'est la ligne de fermeture *B.A* du funiculaire qui détermine $\vec{f}_A$ et $\vec{f}_B$.

$\vec{f}_1$	$\vec{f}_2$	$\vec{f}_3$	$\vec{f}_B$	$\vec{f}_A$	
∧	∧	∧	∧	∧	
A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	$A_5 = A_0$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A.2	2.3	3.1	1.*B*	*B*.*A*	*A*.2

$$\left\|\vec{f}_A\right\| = b \times \overline{A_4 A_0} = 1000\left[\frac{N}{cm}\right] \times 1.4\,[cm] = 14000\ N$$

$$\left\|\vec{f}_B\right\| = b \times \overline{A_3 A_4} = 1000\left[\frac{N}{cm}\right] \times 9.7\,[cm] = 9\,700\ N$$

Détermination des tensions dans les différentes barres

On se choisit un ordre de parcours des noeuds : G, E, D, C, B, A

Sens antihorlogique comme sens de lecture autour des noeuds.

- noeud G : $\vec{f}_1 + \vec{f}_{\overline{EG}} + \vec{f}_{\overline{DG}} = \vec{0}$
- noeud E : $\vec{f}_{\overline{GE}} + \vec{f}_{\overline{CE}} + \vec{f}_{\overline{DE}} = \vec{0}$

  n'est possible que si $\vec{f}_{\overline{DE}} = \vec{0}$ et $\vec{f}_{\overline{GE}} = -\vec{f}_{\overline{CE}}$
- noeud D : $\vec{f}_3 + \underbrace{\vec{f}_{\overline{GD}}}_{-\vec{f}_{\overline{DB}}} + \underbrace{\vec{f}_{\overline{ED}}}_{=\vec{0}} + \vec{f}_{\overline{CD}} + \vec{f}_{\overline{BD}} = \vec{0}$
- etc...

On en déduit le tableau de résultats ainsi que la nature de l'effort (traction ou compression) dans chaque barre.

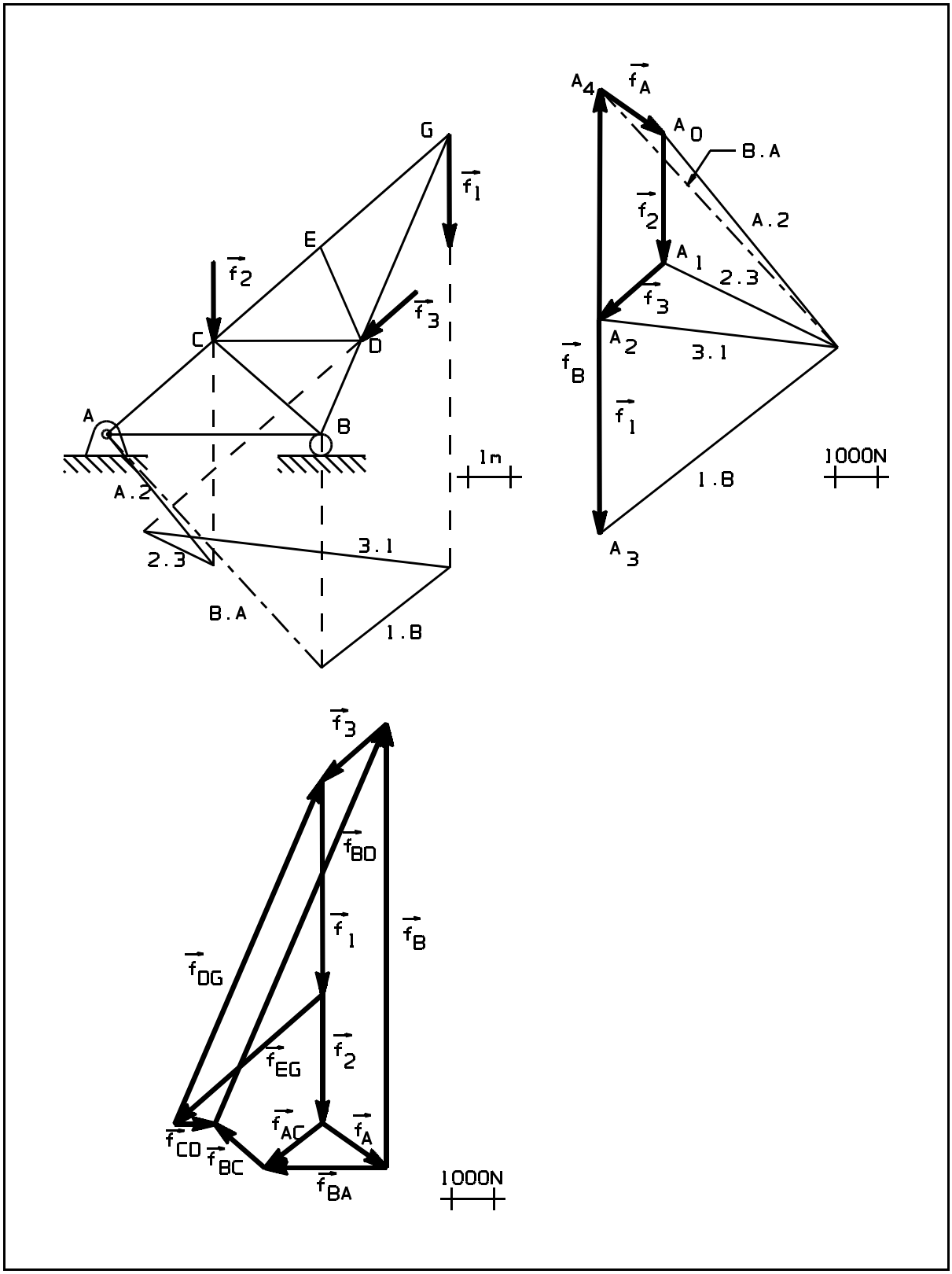

fig. 6.36. - *Application 6.12. : solution.*

Barre	*T : Traction* *C : Compression*	*Intensité [N]*
$\overline{EG}$	T	2900
$\overline{GD}$	C	7300
$\overline{ED}$	-	0
$\overline{EC}$	T	2900
$\overline{CD}$	C	1000
$\overline{CB}$	C	1400
$\overline{CA}$	T	300
$\overline{DB}$	C	8800
$\overline{AB}$	C	1600

6.5. ***Introduction à la graphostatique dans l'espace***

6.5.1. Principe

Déterminer les réactions d'appui ou les forces de liaison concernant des problèmes dans l'espace ne peut se faire ***directement*** au moyen d'une seule épure plane.

Tout comme en descriptive, il y a lieu de travailler via des ***projections*** (de situations et de forces) dans trois plans perpendiculaires entre eux : un plan ***horizontal***, un plan ***frontal*** et un plan de ***profil***.

Pour un problème dans l'espace, il y aura dès lors à répéter trois fois les principes de résolution des problèmes plans, en étant bien conscient que les trois jeux d'épures ainsi obtenus ne sont pas indépendants les uns des autres, mais doivent se correspondre, par exemple par toute une série de "*lignes de rappels*". Ainsi, la recherche des six inconnues associées en toute généralité à ces problèmes dans l'espace, devient très rapidement d'une complexité graphique insurmontable ...

6.5.2. Equilibre du point : système de "trois barres"

Dans le cas d'un point P maintenu en équilibre par trois barres articulées, et soumis à une force extérieure $\vec{f}$ appliquée en ce point P, le nombre d'inconnues tombe à trois (au lieu de six, voir ***§ 6.1.3.***).

La figure ***fig. 6.37.*** présente le principe d'un tel "*trois barres*".

Les trois inconnues sont les grandeurs des réactions d'appui $\left\|\vec{f}_A\right\|$, $\left\|\vec{f}_B\right\|$ et $\left\|\vec{f}_C\right\|$, leur direction coïncidant avec celle de chacune des barres articulées.

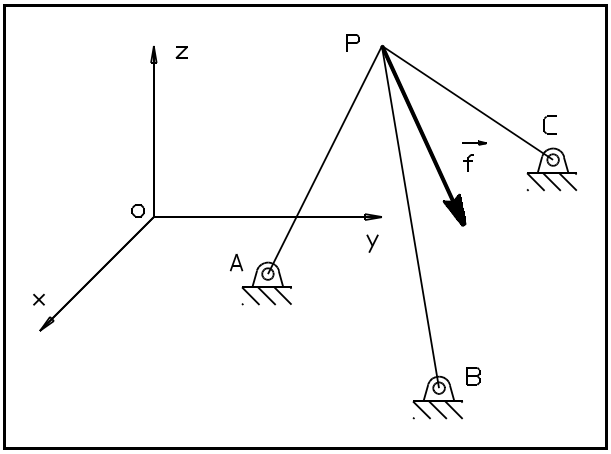

fig. 6.37. - *Equilibre d'un point dans l'espace.*

Les équations de la statique regroupées deux à deux donnent :

- $\sum f_{i_x} = 0$ et $\sum f_{i_Y} = 0$ ➜ équilibre dans le *plan horizontal* Oxy (Vue du dessus)
- $\sum f_{i_Y} = 0$ et $\sum f_{i_z} = 0$ ➜ équilibre dans le *plan frontal* Oyz (Vue de face)
- $\sum f_{i_z} = 0$ et $\sum f_{i_x} = 0$ ➜ équilibre dans le *plan de profil* Ozx (Vue de droite)

Il suffit de dessiner deux de ces équilibres pour résoudre le problème. En général, on dispose le système d'axes Oxyz de la façon la plus judicieuse pour pouvoir déjà bénéficier de considérations de symétrie et autres; si on travaille par exemple dans le plan horizontal et dans le plan frontal, il suffira de vérifier dans les épures des forces correspondantes que les ***deux polygones des forces*** sont ***fermés*** (équilibre du point, d'où pas de sens à parler de polygones funiculaires).

Il ne faut pas oublier de faire se correspondre les projections par des lignes de rappel.

Application 6.13. Soit le trépied articulé $\overline{PABC}$:
$\overline{OP} = 4\ m$; $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 6.39\ m$ et $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$. La force $\vec{f}$ de 2577 N est contenue dans un plan horizontal, et fait un angle α de 14.04° avec une parallèle à Oy. Déterminer les réactions d'appui $\vec{f}_A$, $\vec{f}_B$ et $\vec{f}_C$.

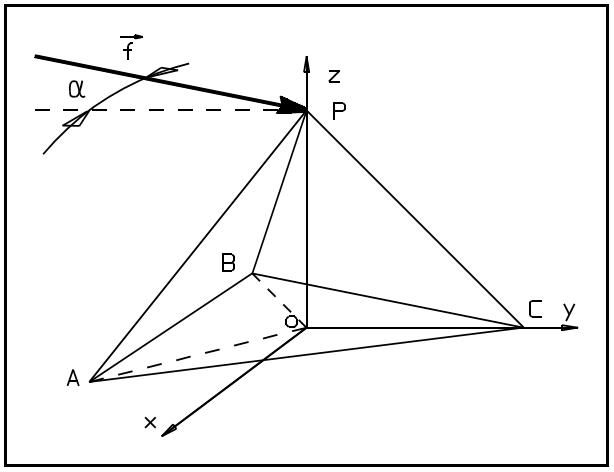

fig. 6.38. - *Application 6.13.*

Solution :

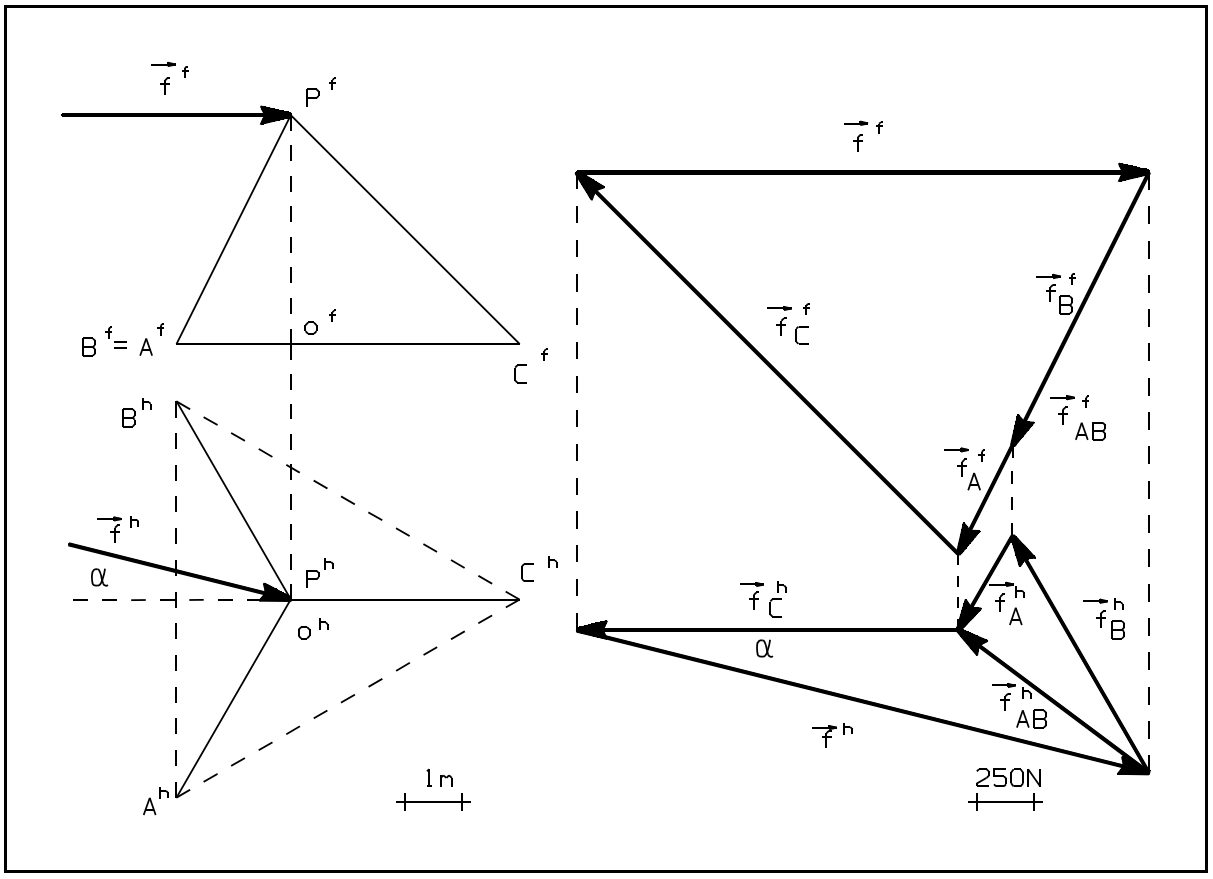

fig. 6.39. - *Application 6.13. : solution.*

Le tracé des deux épures de situation (frontale et horizontale) n'appelle pas de commentaires particuliers.

La force $\vec{f}$ est vue en vraie grandeur et direction dans le plan horizontal, d'où $\vec{f}^{\,h}$; par lignes de rappel, on détermine $\vec{f}^{\,f}$.

Dans le plan frontal, les barres $\overline{P^f A^f}$ et $\overline{P^f B^f}$ sont confondues; les lignes d'actions des

réactions $\vec{f}_A^{\,f}$ et $\vec{f}_B^{\,f}$ le seront donc aussi. Le point P[f] peut ainsi être considéré comme étant soumis à l'action de trois forces :

$$\vec{f}^{\,f} + \vec{f}_C^{\,f} + \vec{f}_{\frac{f}{AB}} = \vec{0}$$

$\vec{f}_{\frac{f}{AB}}$ représentant la somme combinée $\vec{f}_A^{\,f} + \vec{f}_B^{\,f}$.

Par lignes de rappel, on détermine les projections horizontales de $\vec{f}_C^{\,h}$, et donc aussi de $\vec{f}_{\frac{h}{AB}}$, qu'il suffit ensuite de décomposer, suivant les directions $\overline{P^h A^h}$ et $\overline{P^h B^h}$, en $\vec{f}_A^{\,h}$ et $\vec{f}_B^{\,h}$; cette dernière décomposition peut être reportée directement dans l'épure frontale, pour scinder $\vec{f}_{\frac{f}{AB}}$ en $\vec{f}_A^{\,f}$ et $\vec{f}_B^{\,f}$. Seule la force $\vec{f}_C$ est vue en vraie grandeur dans le plan frontal :

$$\left\| \vec{f}_C^{\,f} \right\| = \left\| \vec{f}_C \right\| = 250\,[\frac{N}{cm}] \times 9.4\,[cm] = 2\,350\ N$$

Les autres forces ne sont vues en vraie grandeur dans aucun des deux plans, d'où la nécessité d'effectuer des rotations ou des rabattements pour les amener en position horizontale ou frontale, comme on l'a effectué ci-contre pour la seule force $\vec{f}_B$.

On trouve :

$$\left\| \vec{f}_B \right\| = 250\,[\frac{N}{cm}] \times 6.7\,[cm] = 1675\ N$$

De même, on trouverait : $\left\| \vec{f}_A \right\| = 675\ N$.

On voit sur le dessin que les barres $\overline{PA}$ et $\overline{PB}$ sont en traction, alors que $\overline{PC}$ est en compression.

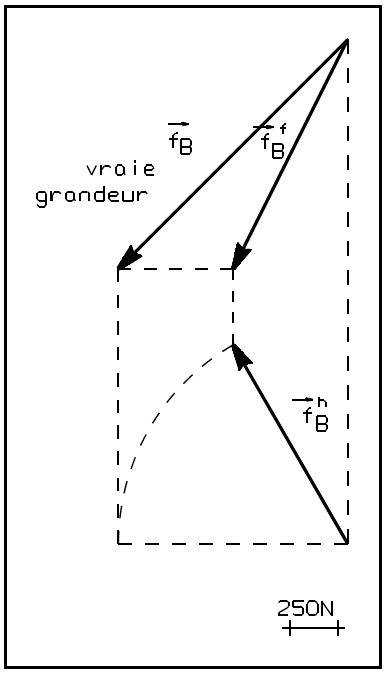

fig. 6.40. - *Recherche de la vraie grandeur : rotation.*

Application 6.14. Un mât vertical de 5 *m* de haut est appuyé via une rotule A sur un sol horizontal; il est haubané par deux câbles $\overline{BC}$ et $\overline{BD}$, accrochés au sol en C et D. Une force horizontale $\vec{f}$ de 1000 *N* est appuyée en B; elle fait, par rapport au plan bissecteur des deux câbles, un angle α de 10°. Déterminer la tension dans chaque câble, ainsi que la réaction de la rotule A.

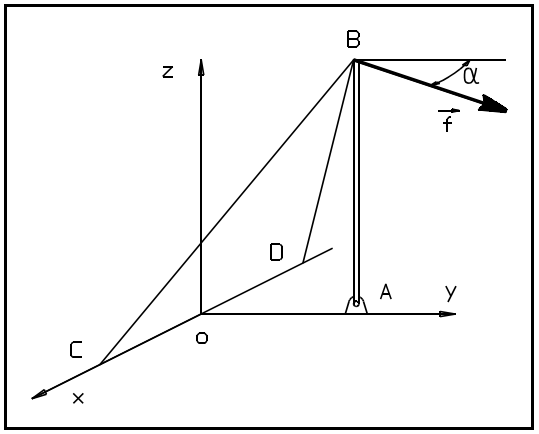

fig. 6.41. - *Application 6.14.*

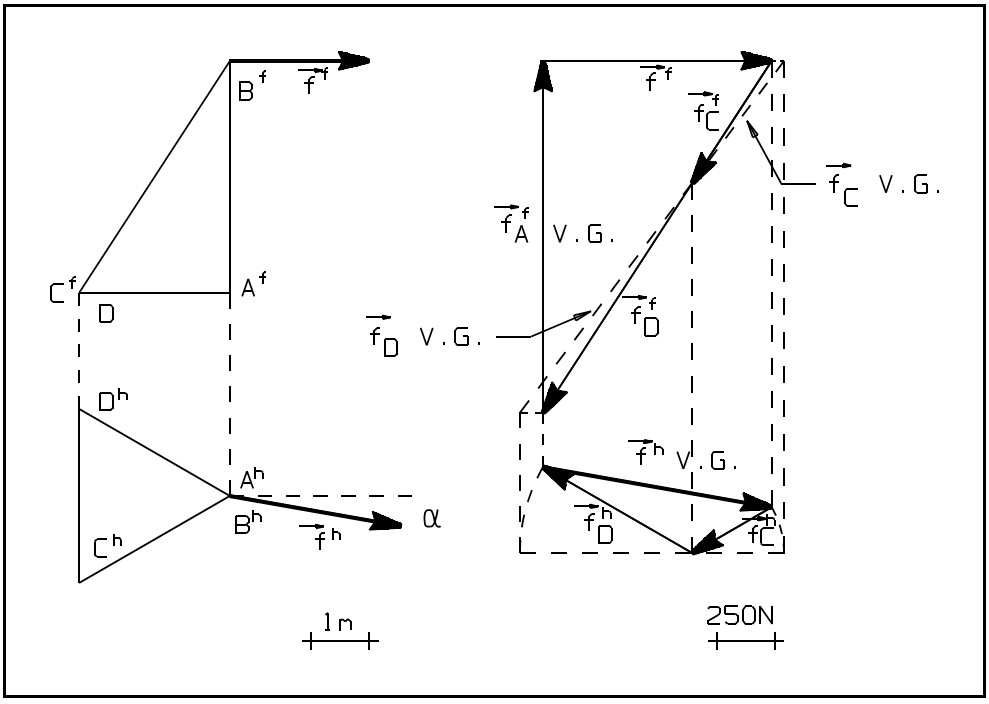

fig. 6.42. - *Application 6.14. : solution.*

Solution :

Pas de commentaires particuliers :

$\vec{f}^{\,h}$ est vue en vraie grandeur, ainsi que $\vec{f}_A^{\,h}$; pour connaître les vraies grandeurs de $\vec{f}_C$ et $\vec{f}_D$, il suffit de faire des rotations pour les amener dans un plan frontal ...