CHAPITRE 7. MOUVEMENT SIMPLE DU POINT . . . . ***- 7.1 -***
7.1. Définitions . . . . ***- 7.1 -***
7.1.1. Introduction . . . . ***- 7.1 -***
7.1.2. Description du mouvement d'un point . . . . ***- 7.1 -***
A)** Système d'axes de référence* . . . . ***- 7.1 -
B)** Définition analytique du mouvement* . . . . ***- 7.1 -
C)** Définition intrinsèque du mouvement* . . . . ***- 7.3 -
7.1.3. Vecteur vitesse . . . . ***- 7.4 -***
A)** Définition* . . . . ***- 7.4 -
B)** Expressions cartésienne et scalaire* . . . . ***- 7.7 -
C)** Distance parcourue* . . . . ***- 7.7 -
7.1.4. Vecteur accélération . . . . ***- 7.8 -***
A)** Définition* . . . . ***- 7.8 -
B)** Expressions cartésiennes* . . . . ***- 7.9 -
C)** Hodographe* . . . . ***- 7.9 -
7.2. Mouvement rectiligne . . . . ***- 7.10 -***
7.2.1. Généralités . . . . ***- 7.10 -***
7.2.2. Mouvement rectiligne uniforme (M.R.U.) . . . . ***- 7.10 -***
7.2.3. Mouvement rectiligne uniformément accéléré (M.R.U.A.) . . . . ***- 7.12 -***
7.2.4. Mouvement rectiligne apériodique . . . . ***- 7.14 -***
7.2.5. Mouvement rectiligne harmonique . . . . ***- 7.15 -***
7.3. Mouvement plan . . . . ***- 7.17 -***
7.3.1. Généralités . . . . ***- 7.17 -***
7.3.2. Accélérations normale et tangentielle. Trièdre de Frenet. . . . . ***- 7.20 -***
7.3.3. Mouvement circulaire : étude générale . . . . ***- 7.26 -***
A)** Description* . . . . ***- 7.26 -
B)** Expressions vectorielles* . . . . ***- 7.28 -
7.3.4. Mouvement circulaire uniforme (M.C.U.) . . . . ***- 7.30 -***
7.3.5. Mouvement circulaire uniformément accéléré (M.C.U.A.) . . . . ***- 7.33 -***
7.3.6. Vitesse et accélération en coordonnées polaires . . . . ***- 7.35 -***
7.4. Mouvements dans l'espace . . . . ***- 7.38 -***

CHAPITRE 7. MOUVEMENT SIMPLE DU POINT

7.1. *Définitions*

7.1.1. Introduction

La cinématique a pour objet d'introduire les éléments fondamentaux nécessaires à la description géométrique d'un mouvement, sans se soucier des causes (les forces) qui provoquent ce mouvement. Les concepts mis en jeu par la cinématique sont principalement ceux de position, vitesse, accélération, trajectoire. Ils ne font intervenir que les deux dimensions physiques fondamentales de longueur et de temps.

7.1.2. Description du mouvement d'un point

A) *Système d'axes de référence*

L'étude du mouvement d'un corps est l'étude des positions successives de ce corps, au cours du temps, par rapport à un trièdre pris comme référence.

Il est fondamental de préciser le trièdre utilisé, car le mouvement dépend de celui-ci. Par exemple, un voyageur assis dans un wagon qui avance, est en mouvement par rapport à un trièdre lié à la terre, et est au repos par rapport à un trièdre lié au wagon; la voie de chemin de fer est au repos par rapport à la terre, et en mouvement par rapport au soleil (repos = vecteur position invariable par rapport au trièdre). Dans ce chapitre, nous étudierons le mouvement d'un ***point matériel*** (élément de matière, de dimensions négligeables, assimilé à un point géométrique); en réalité, cela nous permettra d'étudier le mouvement du centre de masse d'un corps, point auquel est supposée concentrée toute la masse du corps.

B) *Définition analytique du mouvement*

Soit le trièdre Oxyz pris comme référence (***fig. 7.1.***). Le point mobile M occupe à l'instant origine ($t_0 = 0$) une position M_0 (x_0; y_0; z_0).

La mesure du temps se fait au moyen de la variable scalaire *t*, dont la valeur absolue mesure l'intervalle de temps qui sépare l'instant origine de l'instant considéré; *t* est positif si l'instant considéré est postérieur à l'instant origine; *t* est négatif si l'instant considéré est antérieur à l'instant origine.

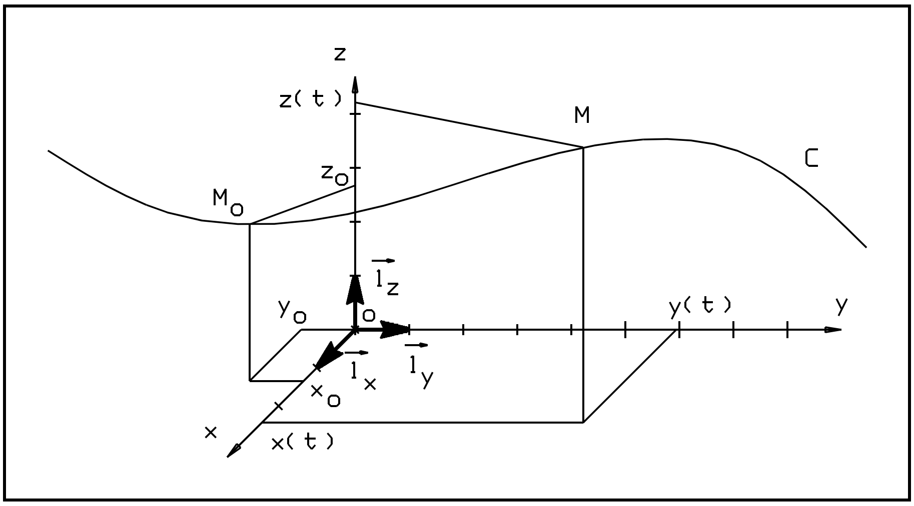

fig. 7.1. - *Définition du mouvement.*

La position (donc le mouvement) du point M sera définie si on connaît, à chaque instant *t*, ses coordonnées en fonction du temps, soit les trois équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad M\left(x(t); y(t); z(t)\right) \; \textbf{\textit{(éq. 7.2.)}}$$

ce qui peut s'écrire vectoriellement $\overrightarrow{OM}$ étant le *vecteur position* (***fig.*** *7.2.*) Que l'on désignera désormais par $\vec{r}$:

$$\boxed{\vec{r} = x\,\vec{1}_x + y\,\vec{1}_y + z\,\vec{1}_z = f_1(t)\,\vec{1}_x + f_2(t)\,\vec{1}_y + f_3(t)\,\vec{1}_z}$$

Par <u>*définition*</u>, on appelle ***"trajectoire C"*** *le lieu de positions successives occupées par M au cours du temps*. La trajectoire peut être rectiligne ou curviligne (ouverte, ***fig. 7.2.a.*** ou fermée, ***fig. 7.2.b.***) plane ou en 3D.

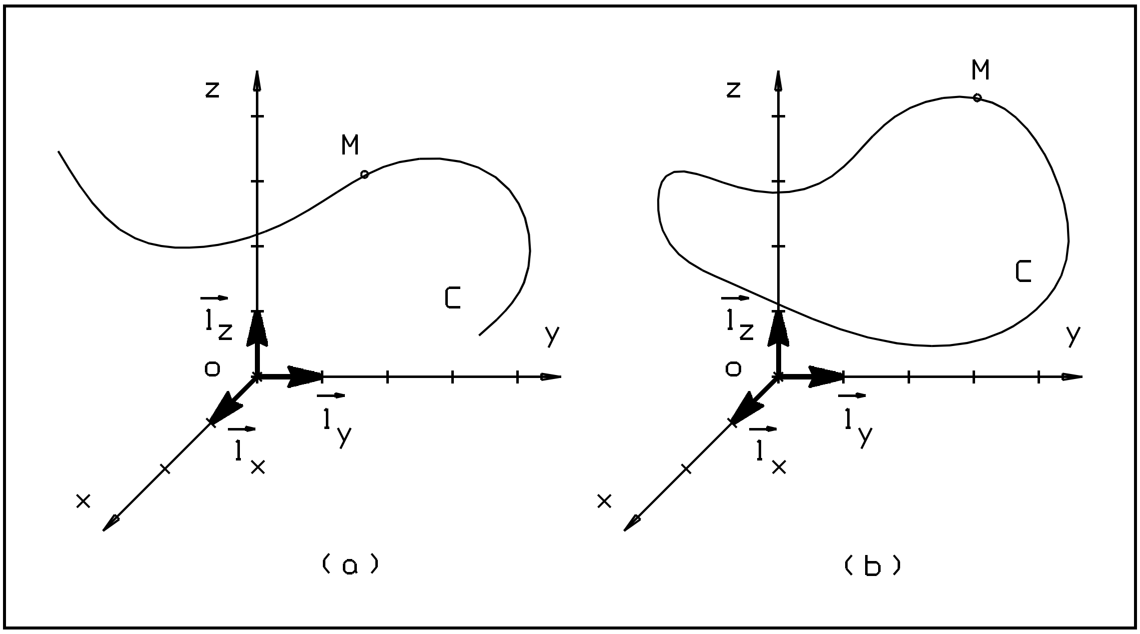

fig. 7.2. *- Trajectoire.*

En éliminant *t* entre les deux premières équations (***éq. 7.2.***), on obtient une relation (équations cartésiennes de la trajectoire obtenus à partir des équations paramétriques) :

$$F_1\left(x; y\right) = 0$$

qui est l'équation d'une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à Oz et dont la directrice est la courbe d'équation $F_1\left(x; y\right) = 0$ dans le plan Oxy. De même, en éliminant *t* entre $f_2(t)$ et $f_3(t)$, et entre $f_3(t)$ et $f_1(t)$, on obtient les équations :

$$F_2\left(y; z\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad F_3\left(z; x\right) = 0,$$

de deux autres surfaces cylindriques dont les génératrices sont respectivement parallèles aux axes Ox et Oy. Ces trois surfaces cylindriques se coupent suivant une courbe de l'espace qui est la trajectoire du point mobile M.

C) *Définition intrinsèque du mouvement*

Le mouvement d'un point M est parfaitement défini si on connaît :

- sa trajectoire C;
- la distance, mesurée sur C, séparant M_0 de M; on doit choisir un sens de parcours positif, indiqué par une flèche (***fig. 7.3.***). La distance $\overline{M_0 M}$, ***longueur de l'arc*** $\overline{M_0 M}$, est définie par : $\overline{M_0 M} = s = s(t)$ (en *m*).

On parlera souvent de "*distance parcourue*" en sommant les différents s_i .

Exemple :
En vacances on ne définit pas son itinéraire par ses coordonnées mais par une trajectoire et une distance parcourue.

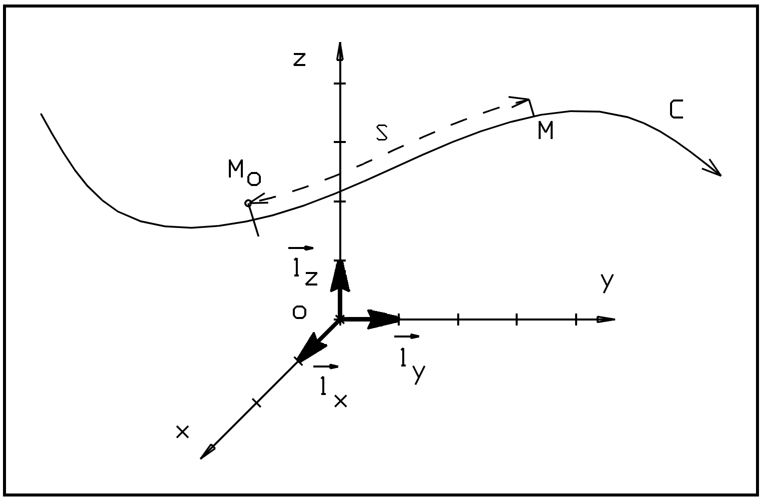

fig. *7.3.* **-** *Longueur d'arc.*

Remarque :
En mathématiques, nous avons aussi la notion ***d'abscisse curviligne λ***. C'est en fait la longueur d'arc munie d'un signe. L'abscisse curviligne est donc l'analogue, sur une courbe, de l'abscisse sur une droite orientée.

7.1.3. Vecteur vitesse

A) *Définition*

Soit le point M sur sa trajectoire *C* (***fig. 7.4.***) :

- au temps t en M (x; y; z)
- au temps t_1 en M_1 (x_1; y_1; z_1).

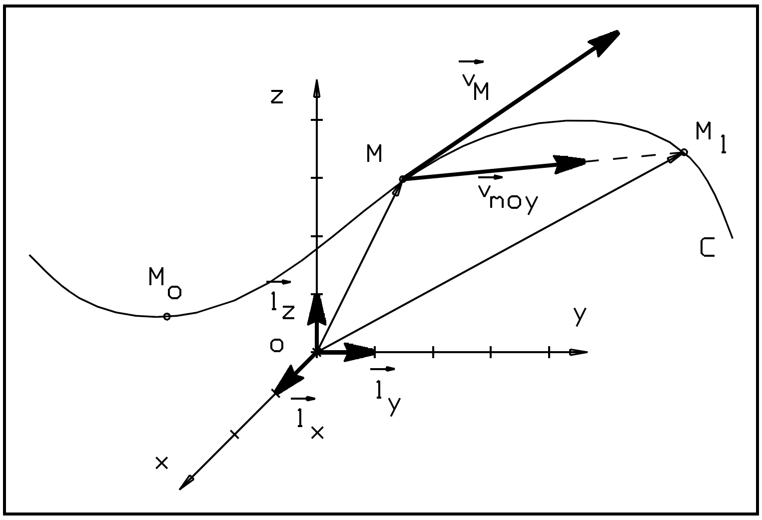

fig. 7.4. *- Vecteur vitesse.*

Par *définition*, on appelle **"*vitesse moyenne de M sur l'intervalle de temps* (t_1 *- t*)"**, le vecteur $\vec{v}_{moy}$:

$$\boxed{\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{t_1 - t} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM_1} - \vec{r}}{\Delta t}} \qquad [m/s]$$

$\vec{v}_{moy}$: est la vitesse d'un point qui irait de M à M_1 pendant le temps Δt, d'un mouvement rectiligne uniforme.

Ainsi la *vitesse moyenne du point M* est le vecteur $\vec{v}_{moy}$:

- son origine est le point M
- sa direction et son sens sont ceux du vecteur $\overrightarrow{MM_1}$
- son module vaut : $\left\| \vec{v}_{moy} \right\| = \dfrac{\left\| \overrightarrow{MM_1} \right\|}{\Delta t}$

La *vitesse moyenne* dépend uniquement du *déplacement net* et de *l'intervalle de temps*; le trajet réel parcouru entre-temps n'a pas d'importance.

Nous avons aussi la notion de "***vitesse scalaire moyenne***".

La ***vitesse scalaire moyenne*** pour un intervalle de temps fini est définie par *la distance parcourue par l'intervalle de temps*. C'est la notion "*traditionnelle*" de vitesse "*moyenne*".

$$\boxed{v_{scalaire\ moy} = \frac{arc\left(\overline{MM}_1\right)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

Puisqu'elle est définie en fonction de la distance, la *vitesse scalaire moyenne* est également un *scalaire positif* (il n'y a pas de symbole représentant la vitesse scalaire moyenne).

Application 7.1. Un oiseau volant vers l'est parcourt 100 *m* à 10 *m/s*. Il fait ensuite demi-tour et vole pendant 15 *s* à 20 *m/s*. Trouver :
a) sa vitesse scalaire moyenne;
b) sa vitesse moyenne.

Solution :

Système d'axes

Orientons l'axe des x vers l'est. La figure ci-contre représente un croquis du trajet parcouru.

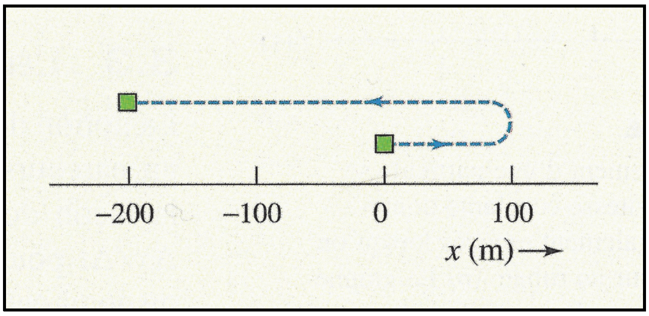

fig. 7.5. - *Application 7.1. résolution.*

Résolution

Pour trouver les valeurs demandées, il faut déterminer l'intervalle de temps total. La première partie du trajet a duré :

$$\Delta t_1 = \frac{espace}{vitesse} = \frac{100}{10} = 10\ s$$

Le temps total étant :

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 10 + 15 = 25\ s$$

L'oiseau parcourt 100 *m* vers l'est, ensuite $(20\ m/s)/(15\ s) = 300\ m$ vers l'ouest.

a) *Vitesse scalaire moyenne*

$$v_{scalaire\ moyenne} = \frac{distance\ parcourue}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{100 + 300}{25} = 16\ m/s$$

b) *Vitesse moyenne*

$$v_{moy} = \frac{déplacement}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{100 - 300}{25} = -\ 8\ m/s$$

v_{moy} est dirigé vers l'ouest.

$$\vec{v}_{moy} = -\ 8\ \vec{1}_x$$

On appelle ***"vitesse instantanée $\vec{v}_M$ de M à l'instant t"***, la limite de $\vec{v}_{moy}$ lorsque $\Delta t \to 0$:

$$\boxed{\vec{v}_M = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}_1 - \vec{r}}{t_1 - t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}}\quad [m/s]$$

Quand on fait tendre M_1 vers M (ce qui équivaut à $\Delta t \to 0$), la corde $\overline{MM_1}$ tend vers la tangente à la trajectoire au point M; simultanément, on a :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t_1 \to t} \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = \|\vec{v}_M\| \qquad \text{avec } \frac{\Delta s}{\Delta t} \geq 0 \text{ (toujours positif).}$$

Ainsi, la *vitesse* (instantanée) du point M est un *vecteur* $\vec{v}_M$:

- attaché au point M;
- de grandeur égale à : $\|\vec{v}_M\| = \dot{s}$;
- de direction tangente à la trajectoire;
- orienté dans le sens du mouvement.

Vectoriellement, on peut écrire :

$$\boxed{\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \|\vec{v}_M\| \, \vec{1}_t} \quad \textbf{\textit{(éq. 7.40.)}}$$

En effet, en normalisant $\vec{v}_M$, on obtient un vecteur :

- de grandeur *unitaire*;
- de direction *tangente* à la trajectoire;
- et orienté dans le *sens du mouvement*.

que l'on nomme $\vec{1}_t$.

<u>*Définition*</u> : $\boxed{\vec{1}_t = \frac{\vec{v}_M}{\|\vec{v}_M\|}}$

On peut aussi écrire $\vec{1}_t = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\vec{r}}{ds}$, ce qui montre que $\vec{1}_t$ est une notion intrinsèque à la courbe, contrairement à la vitesse qui dépend de la paramétrisation.

<u>*Conséquence*</u> : $\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \|\vec{v}_M\| \, \vec{1}_t$

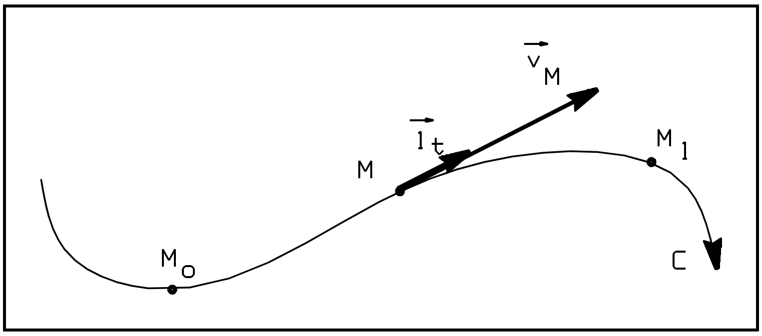

***fig. 7.6. -** Vecteur unitaire* $\vec{1}_t$.

B) *Expressions cartésienne et scalaire*

Les composantes (cartésiennes) de $\vec{v}_M$ sont données par :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v}_M &= \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\vec{1}_x + \dot{y}\,\vec{1}_y + \dot{z}\,\vec{1}_z \\ &= v_x\,\vec{1}_x + v_y\,\vec{1}_y + v_z\,\vec{1}_z\end{aligned}}$$

Remarque :

$\dfrac{d\left(x\,\vec{1}_x\right)}{dt} = \dot{x}\,\vec{1}_x + x\,\dot{\vec{1}}_x$ et $\dot{\vec{1}}_x = \vec{0}$ parce que nous sommes dans un repère *fixe* (les vecteurs unitaires sont constants en grandeur **et** direction.

Le module de $\vec{v}_M$ peut se calculer de deux façons différentes :

$$\boxed{\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

ou

$$\boxed{\left\|\vec{v}_M\right\| = \dot{s}}$$

tandis que les cosinus directeurs de $\vec{v}_M$ sont données par :

$$\cos\alpha_v = \frac{v_x}{\left\|\vec{v}_M\right\|}\ ;\ \cos\beta_v = \frac{v_y}{\left\|\vec{v}_M\right\|}\ ;\ \cos\gamma_v = \frac{v_z}{\left\|\vec{v}_M\right\|}\ .$$

C) *Distance parcourue*

La distance parcourue sur la trajectoire correspond à la longueur d'arc *s*, d'où :

$$ds = \left\|\vec{v}_M\right\| dt$$

$\left\|\vec{v}_M\right\|$ étant supposé constant pendant l'intervalle infiniment petit dt. Dès lors, on obtient, comme distance parcourue entre les instants t_1 et t_2 ($t_2 \geq t_1$), et pour autant que le sens de $\vec{v}_M$ ne change pas entre t_1 et t_2 :

$$\boxed{s_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \left\|\vec{v}_M\right\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\ dt} \quad \text{(en } m\text{)}$$

7.1.4. Vecteur accélération

A) *Définition*

Soit : $\vec{v}_M$ la vitesse à l'instant t

$\vec{v}_{M_1}$ la vitesse à l'instant t_1 (***fig.*** *7.7.*)

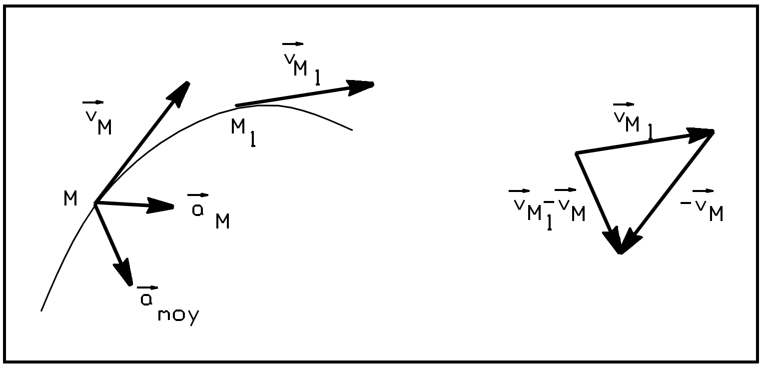

fig. *7.7. - Vecteur accélération.*

Par *définition*, on appelle **"*accélération moyenne de M sur l'intervalle de temps* (t_1 - t)"**, le vecteur $\vec{a}_{moy}$:

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{v}_{M_1} - \vec{v}_M}{t_1 - t} = \frac{\Delta\vec{v}_M}{\Delta t}$$

Le vecteur $\vec{a}_{moy}$ ***à la même direction*** que le vecteur $\Delta\vec{v}_M$.

On appelle ***"accélération instantanée $\vec{a}_M$ de M à l'instant t"***, la limite de $\vec{a}_{moy}$ lorsque $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a}_M = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{moy} = \lim_{t_1 \to t} \frac{v_{M_1} - v_M}{t_1 - t} = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

On notera indifféremment :

$$\boxed{\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \dot{\vec{v}}_M = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}}$$ (en m/s^2)

Ainsi, l'*accélération* (instantanée) de M est un *vecteur* :

- attaché au point M;
- si la trajectoire est curviligne, le vecteur $\vec{a}_M$ est nécessairement non nul et orienté vers l'intérieur (concavité) de la trajectoire;
- si la trajectoire est rectiligne, il est aligné suivant la droite support de la trajectoire.

Remarque :

$\|\vec{v}\|$ constant n'implique pas automatiquement que $\vec{a} = \vec{0}$. En effet, comme $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, $\vec{a}$ existe s'il y a variation de la grandeur de la vitesse **et/ou** s'il y a variation de la direction de la vitesse.

B) *Expressions cartésiennes*

Les composantes (cartésiennes) de $\vec{a}_M$ sont données par :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}_M = \overrightarrow{\ddot{OM}} &= \ddot{x}\,\vec{1}_x + \ddot{y}\,\vec{1}_y + \ddot{z}\,\vec{1}_z \\ &= a_x\,\vec{1}_x + a_y\,\vec{1}_y + a_z\,\vec{1}_z\end{aligned}}$$

$$\boxed{\|\vec{a}_M\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Les cosinus directeurs de $\vec{a}_M$ sont donnés par :

$$\cos\alpha_a = \frac{a_x}{\|\vec{a}_M\|}\ ;\ \cos\beta_a = \frac{a_y}{\|\vec{a}_M\|}\ ;\ \cos\gamma_a = \frac{a_z}{\|\vec{a}_M\|}.$$

C) *Hodographe*

Par un point P quelconque, on trace à chaque instant un vecteur $\overrightarrow{Pm}$ équipollent à $\vec{v}_M$ (***fig. 7.8.***).

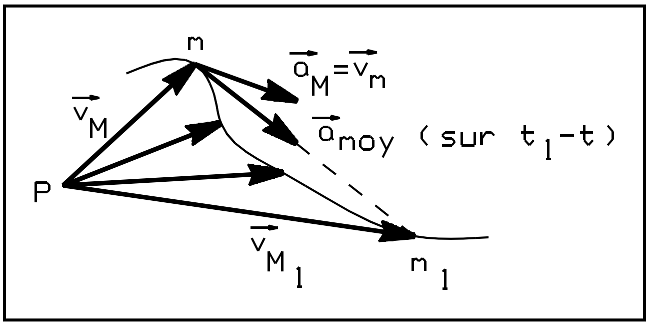

fig. 7.8. *- Hodographe.*

Le point mobile m décrit ***l'hodographe*** du mouvement de M. Or :

$$\vec{v}_m = \frac{d\,\overrightarrow{Pm}}{dt} = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \vec{a}_M$$

La vitesse de parcours de l'hodographe par l'extrémité du vecteur $\vec{v}_M$ est égale à l'accélération $\vec{a}_M$, qui ainsi devient tangente à la courbe décrite par mètre.

7.2. *Mouvement rectiligne*

7.2.1. Généralités

La trajectoire du point mobile est une droite; on choisira donc la droite trajectoire comme axe unique de coordonnées (après l'avoir orienté); le mouvement est défini par une seule coordonnée, par exemple $x = f_1(t)$ (équivalent à $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{1}_x$).

On trouve immédiatement (***fig.** 7.**9.***) :

$$\begin{cases} \vec{v}_M = \dot{x}\,\vec{1}_x \\ \vec{a}_M = \ddot{x}\,\vec{1}_x \end{cases}$$

La vitesse et l'accélération sont alignées avec l'axe Ox; on a que :

$$\begin{cases} \vec{v}_M = \vec{v}_x & \Rightarrow \quad v_x = \dot{x} \\ \vec{a}_M = \vec{a}_x & \Rightarrow \quad a_x = \ddot{x} \end{cases}$$

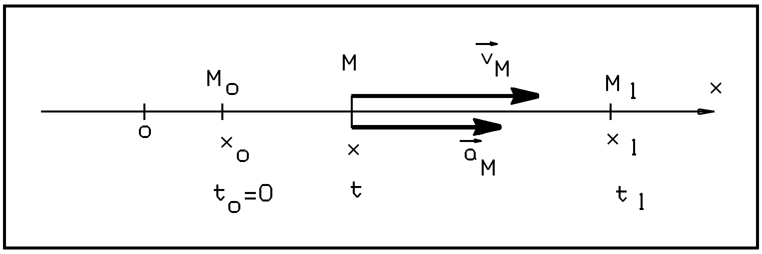

***fig.** 7.9. -* *Mouvement rectiligne.*

Dès lors, au lieu de travailler avec des vecteurs, on peut directement utiliser leurs composantes; si a_x et v_x sont de même signe, le mouvement est "***accéléré*** "; s'ils sont de signes contraires, le mouvement est "***décéléré*** "ou "***retardé*** ".

Classiquement, on représente le mouvement en traçant les graphes de x, v_x et a_x en fonction du temps t, et on obtient des courbes appelées respectivement : diagramme des espaces, diagramme des vitesses, diagramme des accélérations.

7.2.2. Mouvement rectiligne uniforme (M.R.U.)

Dans ce cas, la vitesse $v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} = v_0$ est une constante pour tout instant t; il vient dès lors immédiatement (condition initiale : $x_{t=0} = x_0$) :

$$\text{M.R.U.} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\begin{aligned} & v_x = v_0 \\ & a_x = \dot{v}_x = 0 \\ & x = \int v_x\,dt = v_0\,t + x_0 \end{aligned}}$$

La constante d'intégration fixe la position initiale du point mobile M (***fig.** 7.**10.***).

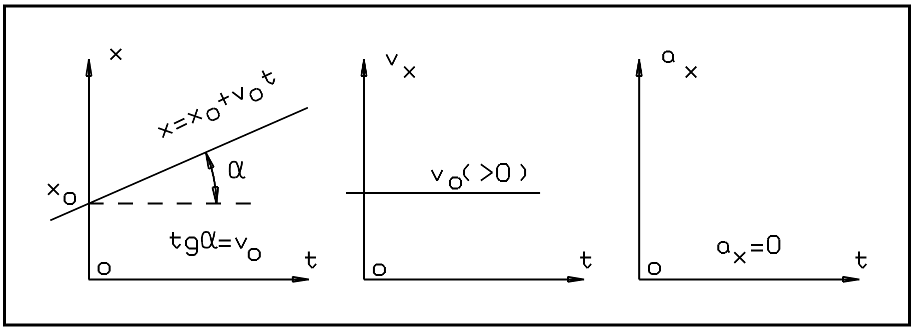

fig. 7.10. - *Mouvement rectiligne uniforme MRU.*

Application 7.2. Un véhicule M circule sur autoroute à la vitesse de 72 *km/h*. Il passe au niveau d'une borne kilométrique A à 10 heures. Un second véhicule N passe la même borne à 10 *h* 06 *min*; il roule à une vitesse de 90 *km/h*. Quand N rattrapera-t-il M ? combien de kilomètres au-delà de A ?

Solution :

Axe de référence

Soit Ox l'axe permettant de décrire le mouvement.

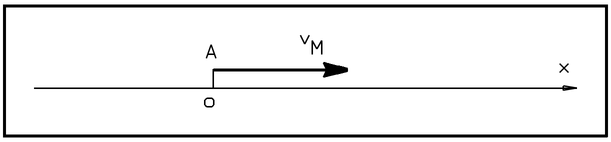

fig. 7.11. - *Application 7.2.*

Mise en équation

A est confondu avec l'origine de l'axe; l'instant origine $t_0 = 0$ est pris au moment où M passe en A. En prenant le mètre comme unité de longueur et la seconde comme unité de temps, le mouvement de M s'écrit :

$$x_M = v_M\, t + x_{M_0} = \frac{72}{3.6}\, t + 0 = 20\, t$$

Pour le mobile N , on écrira :

$$x_N = v_N\, t + x_{N_0} = \frac{90}{3.6}\, t + x_{N_0} = 25\, t + x_{N_0}$$

avec, en $t = 6 \times 60 = 360\, s \quad x_N = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{N_0} = -\,25 \times 360 = -\,9\,000\, m$

Point de rencontre

Quand N rattrapera M, on aura :

$$x_M = x_N \quad \Rightarrow \quad 20\, t = 25\, t - 9\,000$$

$$5\, t = 9\,000$$

$$t = 1800\, s = 30 \text{ min}$$

La rencontre aura lieu à 10 *h* 30 *min*, à une distance :

$x_M = 20 \times 1800 = 25 \times 1800 - 9\,000 = 36\,000\, m$ au-delà de A.

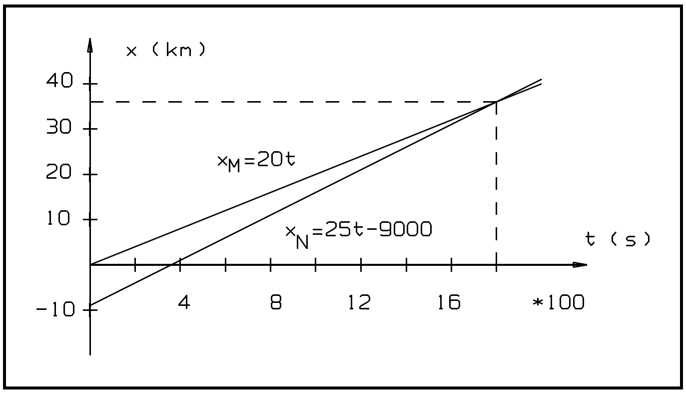

fig. 7.12. - Résolution graphique.

7.2.3. Mouvement rectiligne uniformément accéléré (M.R.U.A.)

C'est un mouvement pour lequel l'accélération $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = a_0$ est une constante pour tout instant *t*; on a dès lors (conditions initiales : $x_{t=0} = x_0$ et $v_{t=0} = v_0$) :

M.R.U.A. $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} & a_x = a_0 \\ & v_x = \int a_0 \, dt = a_0 \, t + v_0 \\ & x = \int v_x \, dt = \frac{a_0 \, t^2}{2} + v_0 \, t + x_0 \end{aligned}}$$

Dans l'expression de *x*, on constate que :

- le terme indépendant x_0 donne la position du mobile pour $t = 0$;
- le coefficient de *t* (soit v_0) donne la vitesse du mobile en $t = 0$;
- le coefficient de t^2 représente la moitié de l'accélération constante a_0 (***fig. 7.13.***).

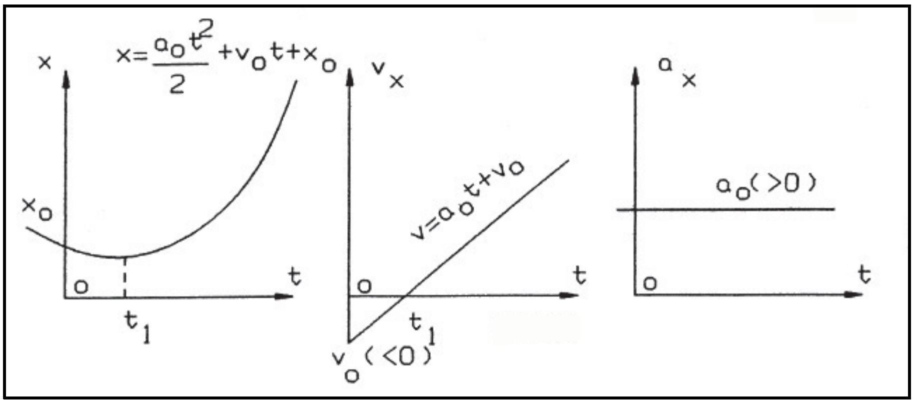

fig. 7.13. - Mouvement uniformément accéléré MRUA.

Application 7.3. D'un point A, on laisse tomber un corps M sans vitesse initiale et, en même temps, d'un point B situé plus bas, sur la même verticale (à la distance $\overline{AB} = 200\,m$), on lance un corps N verticalement, de bas en haut, avec une vitesse initiale v_{N_0}.

a) Que doit valoir v_{N_0} pour que la rencontre ait lieu au milieu de $\overline{AB}$?

b) Que doit valoir v_{N_0} pour que la rencontre ait lieu à l'instant où les mobiles sont animés de vitesses égales et de signes contraires ? Où et quand se fera la rencontre dans cette hypothèse ?

Solution :

Axe de référence

Soit Ox l'axe permettant de décrire le mouvement.

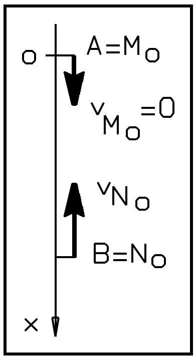

fig. 7.14. -
Application 7.3.

Mise en équation

A est confondu avec l'origine de l'axe. L'accélération de la pesanteur est dans le sens des x positifs; les mouvements de M et N s'écrivent :

$$(1)\quad x_M = \frac{g\,t^2}{2} + v_{M_0}\,t + x_{M_0} = \frac{g\,t^2}{2}$$

$$(2)\quad x_N = \frac{g\,t^2}{2} - v_{N_0}\,t + x_{N_0} = \frac{g\,t^2}{2} - v_{N_0}\,t + 200$$

a) *Recherche de la vitesse*

$$x_M = x_N = \frac{\overline{AB}}{2} = 100$$

$$(1)\quad \frac{g\,t^2}{2} = 100 \quad\Rightarrow\quad t = \sqrt{\frac{2\times 100}{9.81}} = 4.52\,s$$

$$(2)\quad \frac{g\,t^2}{2} - v_{N_0}\,t + 200 = 100 \quad\Rightarrow\quad v_{N_0} = \frac{-100+200+\dfrac{9.81\times(4.52)^2}{2}}{4.52} = 44.3\,m/s$$

Le signe + indique que la vitesse initiale de N est prise dans le sens pris au départ, soit vers le haut.

b) *Recherche de la vitesse*

En dérivant les équations du mouvement, on obtient :

$v_M = g\,t$ et $v_N = g\,t - v_{N_0}$

Point de rencontre : il faut que $x_M = x_N$ et $v_M = -\,v_N$

$$\text{et}\quad \begin{cases} g\,t = -\,g\,t + v_{N_0} \quad\Rightarrow\quad t = \dfrac{v_{N_0}}{2\,g} \\ \dfrac{g\,t^2}{2} = \dfrac{g\,t^2}{2} - v_{N_0}\,t + 200 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{v_{N_0}^2}{2\,g} = 200 \end{cases}$$

La vitesse initiale vaut dès lors : $v_{N_0} = \pm\sqrt{2\times 9.81\times 200} = +\,62.6\,m/s$

(seule la racine positive étant acceptable, voir a).

La rencontre a lieu après un temps : $t = \dfrac{v_{N_0}}{2\,g} = \dfrac{62.6}{2\times 9.81} = 3.2\,s$

La distance parcourue par M étant : $x_M = \dfrac{g\,t^2}{2} = 50\,m$

7.2.4. <u>Mouvement rectiligne apériodique</u>

Ce mouvement est ***défini*** par l'équation :

$\boxed{x = C\exp(-\alpha\, t)}$ avec : $C > 0$ et $\alpha > 0$

Pour $t = 0$, on a $x_0 = C$, point de départ du mobile.
En dérivant, on trouve :

$$v_x = -\,C\,\alpha\exp(-\,\alpha\, t)$$

avec : $v_{t=0} = -\,C\,\alpha$; le point se déplace vers les x négatifs, de plus en plus lentement.

Pour l'accélération, on a :

$$a_x = C\,\alpha^2\,\exp(-\,\alpha\, t) = \alpha^2\, x$$

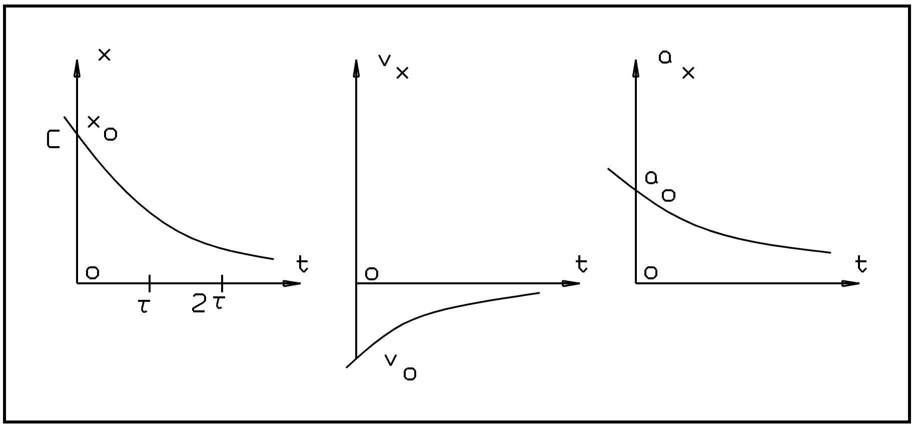

fig. 7.15. - Mouvement rectiligne apériodique.

L'accélération et la vitesse étant de signes contraires, le mouvement est décéléré. Après un temps $t = \infty$, le mobile se trouve en $x = 0$, avec $v_x = 0$ et $a_x = 0$ (***fig. 7.15.***).

On appelle, par définition, "*constante de temps τ*" *la valeur de t telle que la coordonnée x(t) devient* $e = 2.71$ *fois plus faible*, soit :

$$x(t + \tau) = \frac{x(t)}{2.71} = 0.37\; x(t)$$

Connaissant τ on peut construire l'exponentielle point par point. En effet, pour $t = \tau$, l'ordonnée est égale à 0.37 de l'ordonnée initiale; pour $t = 2\,\tau$, l'ordonnée est égale à 0.37 de l'ordonnée précédente, etc.

Remarque :
Le mouvement "*apériodique critique*" est ***défini*** par :

$$x = C\,t\,\exp(-\alpha\,t)$$

7.2.5. Mouvement rectiligne harmonique

Ce mouvement est ***défini*** par l'équation qui décrit un mouvement de va-et-vient entre les coordonnées A et −A de l'axe *Ox* (***fig.** 7.16.*); la position initiale vaut $x_0 = A \sin\varphi$.

$$x = A \sin(\omega\,t + \varphi) \quad \textit{(éq. 7.140.)}$$

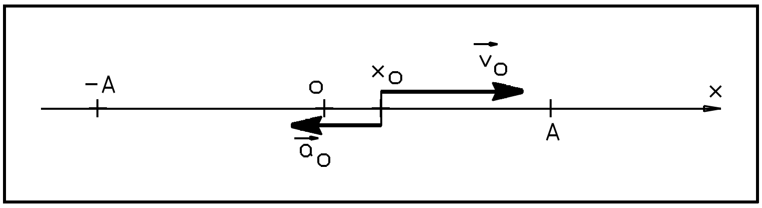

***fig.** 7.16. - Mouvement rectiligne harmonique.*

Les lois des vitesses et accélérations sont (***fig.** 7.17.*) :

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = A\,\omega \cos(\omega\,t + \varphi) = A\,\omega \sin\left(\omega\,t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ a_x &= \ddot{x} = -\,A\,\omega^2 \sin(\omega\,t + \varphi) = -\,\omega^2\,x \end{aligned} \quad \textit{(éq. 7.141.)}$$

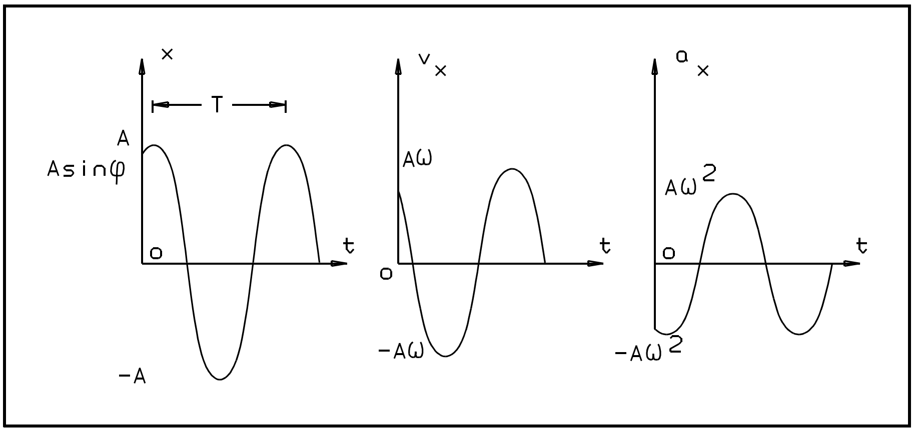

***fig.** 7.17. - Mouvement rectiligne harmonique : position, vitesse et accélération.*

- $v_x = 0$ lorsque $x = \pm\,A$;
- $|v_x|$ est maximum lorsque $x = 0$;
- $a_x = -\,\omega^2\,x$ étant toujours du signe contraire de x, le vecteur accélération est toujours dirigé vers l'origine 0. Ce qui indique que dans un mouvement sinusoïdal, l'accélération est toujours proportionnelle et opposée au déplacement;
- A est appelé l' ***"amplitude"*** de la vibration harmonique;
- φ est l' ***"angle de phase"***;
- on appelle ω ***"la pulsation"*** (en *rad/s*);
- Le mouvement est périodique : le mobile revient exactement dans sa configuration initiale

après un temps T appelé ***"période"*** :

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega}$$

- Le nombre de vibrations complètes par seconde est la ***"fréquence ν"*** :

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\,\pi}$$

- Autre conséquence, la grandeur oscillante harmonique x satisfait à l'équation :

$$\ddot{x} + \omega^2\; x = 0$$

qui est appelée "*équation différentielle des oscillations harmoniques*".

Remarque :
Le mouvement rectiligne harmonique ***amorti*** est ***défini*** par :

$$\boxed{x = A\,\exp(-\,\alpha\,t)\,\sin(\omega\,t + \varphi) \quad (\alpha > 0)}$$

C'est un mouvement harmonique simple dont l'amplitude, au lieu d'être constante, décroît exponentiellement avec le temps (***fig. 7.18.***).

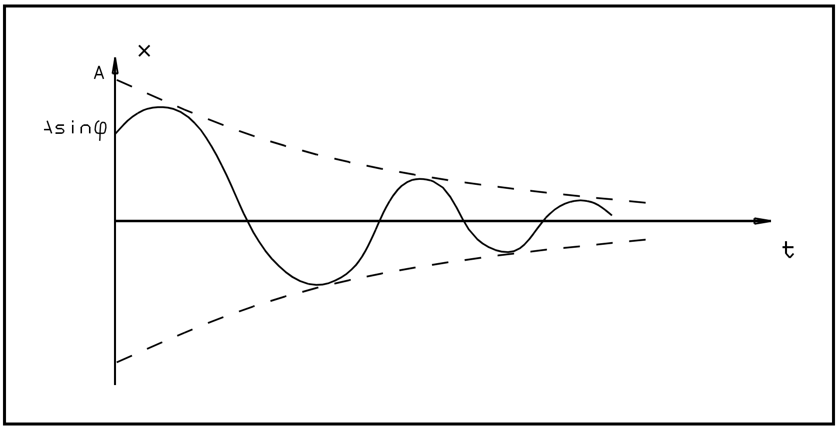

fig. 7.18. - *Mouvement rectiligne harmonique amorti.*

7.3. ***Mouvement plan***

7.3.1. Généralités

Soit Oxy le plan de la trajectoire de M (***fig.*** *7.19.*).

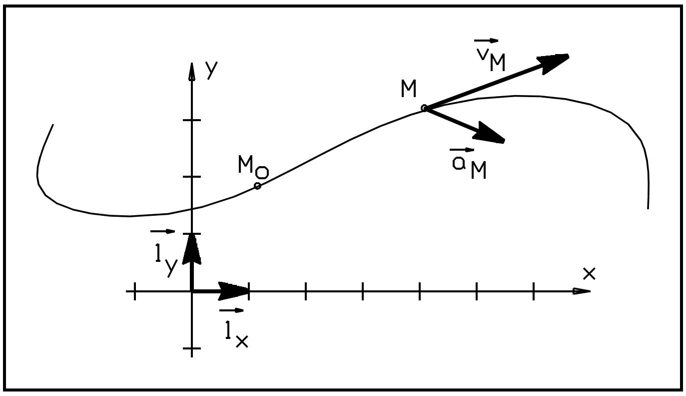

fig. 7.19. - *Mouvement plan.*

On sait que :

$$\vec{r} = x\,\vec{1}_x + y\,\vec{1}_y = f_1(t)\,\vec{1}_x + f_2(t)\,\vec{1}_y$$

$$\vec{v}_M = \dot{x}\,\vec{1}_x + \dot{y}\,\vec{1}_y = v_x\,\vec{1}_x + v_y\,\vec{1}_y$$

$$\vec{a}_M = \ddot{x}\,\vec{1}_x + \ddot{y}\,\vec{1}_y = a_x\,\vec{1}_x + a_y\,\vec{1}_y$$

Si M se trouve sur un tronçon ***curviligne*** de la trajectoire, on sait que :

- $\vec{v}_M$ est tangent à la trajectoire $\left(\vec{v}_M = \left\|\vec{v}_M\right\|\,\vec{1}_t\right)$
- $\vec{a}_M$ est ***non nul*** et dirigé vers la concavité de la courbe; on ne sait pas déduire directement la trajectoire de la direction de l'accélération.

En fait, un mouvement plan n'est que la combinaison, suivant deux directions perpendiculaires, de deux mouvements rectilignes simultanés; les considérations décrites au ***§ 7.2.*** sont donc strictement d'application pour un mouvement plan.

Application 7.4. Etudier la trajectoire d'un projectile lancé depuis la surface terrestre avec une vitesse initiale $\vec{v}$ inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Déterminer :
a) Equations du mouvement;
b) Equation de la trajectoire;
c) Hauteur maximale atteinte H;
d) Abscisse du point de chute x_{sol};
e) Distance (curviligne) parcourue s_{tot};
f) Vitesse lors de l'impact au sol v_{sol};
g) Hodographe.

Solution :

Choix du système d'axes

Choisissons le système d'axes Oxy pour faciliter les conditions initiales; dans le système proposé, on peut écrire, en $t = 0$:

$$\Rightarrow \quad x_0 = y_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_0 \left(v \cos\alpha, v \sin\alpha \right)$$

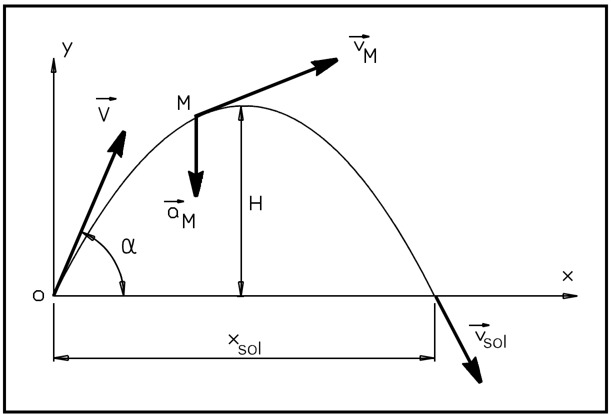

fig. 7.20. - Application 7.4.

Hypothèse sur la valeur de g

Si la trajectoire est petite par rapport aux dimensions de la terre, on peut considérer que $\vec{g}$ est constant :

$$\vec{a}_M = \ddot{\vec{r}} = - g\, \vec{1}_y = - 9.81\, \vec{1}_y$$

Projection suivant les axes (Ox et Oy)

On a ainsi, suivant Ox :

$$\left(\vec{1}_x\right) \quad \Rightarrow \quad a_x = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x = v_{0\,x} = v \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad x = \int v_x\, dt = \left(v \cos\alpha \right) t + x_0 \quad avec \quad x_0 = 0$$

et suivant Oy :

$$\left(\vec{1}_y\right) \quad \Rightarrow \quad a_y = - g \quad \Rightarrow \quad v_y = \int a_y\, dt = - g\, t + v_{y_0} = - g\, t + v \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad y = \int v_y\, dt = - \frac{g\, t^2}{2} + \left(v \sin\alpha \right) t + y_0 \quad avec \quad y_0 = 0$$

a) *Les équations du mouvement* combinent un M.R.U. avec un M.R.U.A. :

$$\begin{cases} x = \left(v \cos\alpha \right) t \\ y = - \dfrac{g\, t^2}{2} + \left(v \sin\alpha \right) t \end{cases}$$

b) *Equation de la trajectoire* : il faut éliminer t des équations paramétriques :

$$t = \frac{x}{v \cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad y = - \frac{g\, x^2}{2\, v^2 \cos^2 \alpha} + x \tan\alpha = x \left(\frac{- g\, x}{2\, v^2 \cos^2 \alpha} + \tan\alpha \right)$$

Racines :

$$x = 0 \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{(\tan\alpha)\, 2\, v^2 \cos^2\alpha}{g} = \frac{2 \sin\alpha \cos\alpha\, v^2}{g}$$

C'est l'équation d'une parabole ("*tir parabolique*").

c) *La hauteur maximale H* est atteinte lorsque $v_y = 0$

$$t_h = \frac{v \sin\alpha}{g} \quad \Rightarrow \quad H = y_h = \frac{v^2 \sin^2\alpha}{2\, g}$$

d) *Le point de chute* est caractérisé par $y_{sol} = 0$

$$t_{sol} = \frac{2\, v_{sol} \sin\alpha}{g} \quad \Rightarrow \quad x_{sol} = \frac{v_{sol}^2 \sin(2\,\alpha)}{g}$$

C'est la "*portée*" : x_{sol} est maximum si $\alpha = 45°$.

e) *Longueur d'arc* :

$$s_{tot} = \int_0^{t_{sol}} \left\| \vec{v}_M \right\| dt$$

$$= \int_0^{\frac{2\, v \sin\alpha}{g}} \sqrt{v^2 \cos^2\alpha + (v \sin\alpha - g\, t)^2}\; dt$$

(Difficile à calculer de manière générale)

f) *La vitesse lors de l'impact* au sol vaut :

$$v_{sol} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (v_{sol})_x = v \cos\alpha \\ (v_{sol})_y = -\, g\, t_s + v \sin\alpha = -\, v \sin\alpha \end{cases}$$

Cette vitesse a donc un module $\left\| \vec{v}_{sol} \right\| = \left\| \vec{v} \right\|$, et est inclinée d'un angle $-\alpha$ par rapport à l'horizontale.

g) *L'hodographe* est dégénéré en une droite verticale

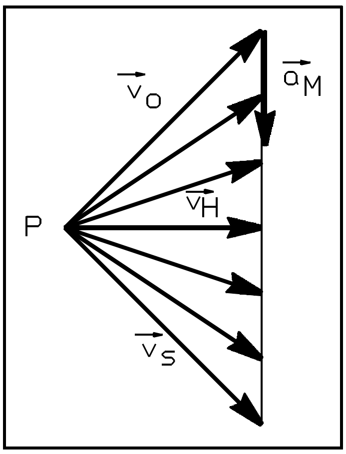

fig. 7.21. *- Hodographe.*

7.3.2. Accélérations normale et tangentielle. Trièdre de Frenet.

Pour un point M décrivant une trajectoire curviligne plane, dont l'accélération est $\vec{a}_M$ (***fig. 7.22.***) on peut envisager de décomposer $\vec{a}_M$ en une composante tangentielle $\vec{a}_{Mt}$ (parallèle au vecteur $\vec{1}_t$ en ***§ 7.1.3.A.***) appelée "***accélération tangentielle***", et une composante normale $\vec{a}_{Mn}$ (suivant $\vec{1}_n$, perpendiculaire à $\vec{1}_t$) appelée "***accélération normale***".

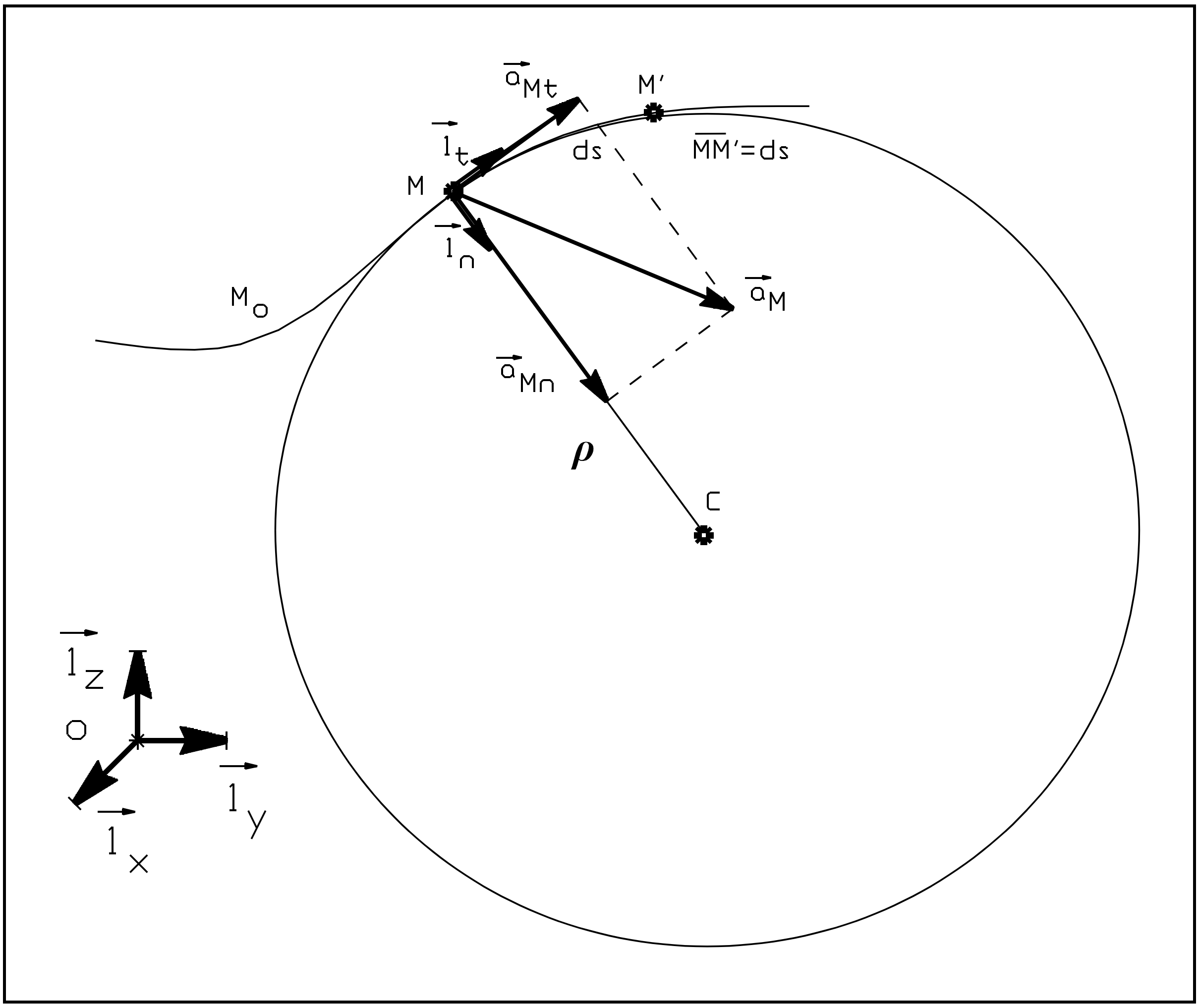

fig. 7.22. *- Trièdre de Frenet : accélération tangentielle et normale.*

Chacune de ces composantes a une signification physique bien précise : quand M se déplace, le module de sa vitesse $\vec{v}_M$ peut changer, et ce changement est relié à l'accélération tangentielle; la direction de la vitesse change également, et ce changement est relié à l'accélération normale. On sait, par ***§ 7.1.3.A.***, que :

$$\vec{v}_M = \frac{ds}{dt}\vec{1}_t = \|\vec{v}_M\|\,\vec{1}_t$$

dont on déduit l'accélération :

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\left(\|\vec{v}_M\|\,\vec{1}_t\right)}{dt} = \frac{d\|\vec{v}_M\|}{dt}\vec{1}_t + \|\vec{v}_M\|\frac{d\vec{1}_t}{dt}$$

$$\vec{a}_M = \frac{d\|\vec{v}_M\|}{dt}\,\vec{1}_t + \|\vec{v}_M\|\,\frac{d\vec{1}_t}{ds}\,\frac{ds}{dt}$$
$$= \frac{d\|\vec{v}_M\|}{dt}\,\vec{1}_t + \|\vec{v}_M\|^2\,\frac{d\vec{1}_t}{ds}$$

Déterminons $\frac{d\vec{1}_t}{ds}$:

Propriété : $\boxed{\frac{d\vec{1}_t}{ds} \perp \vec{1}_t}$

Comme la trajectoire est courbe, la direction de $\vec{1}_t$ varie le long de la courbe, ce qui donne une valeur non nulle à $\frac{d\vec{1}_t}{ds}$; or on sait que :

$$\|\vec{1}_t\|^2 = \vec{1}_t \bullet \vec{1}_t = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\|\vec{1}_t\|^2}{ds} = 0 = \frac{d\vec{1}_t}{ds} \bullet \vec{1}_t + \vec{1}_t \bullet \frac{d\vec{1}_t}{ds}$$
$$\Rightarrow \quad 2\left(\frac{d\vec{1}_t}{ds} \bullet \vec{1}_t\right) = 0$$

dès lors $\frac{d\vec{1}_t}{ds}$ est perpendiculaire à $\vec{1}_t$.

Définition : La direction de $\frac{d\vec{1}_t}{ds}$ est appelée *normale* et on définit le vecteur unitaire normal $\boxed{\vec{1}_n = \frac{\frac{d\vec{1}_t}{ds}}{\left\|\frac{d\vec{1}_t}{ds}\right\|}}$ qui, tout comme $\vec{1}_t$, est intrinsèque à la courbe.

Propriété : $\boxed{\vec{1}_n \text{ est toujours dirigé vers l'intérieur de la courbe.}}$

Le sens de $\vec{1}_n$ est déterminé par le sens de $d\vec{1}_t = \vec{1}_t{}' - \vec{1}_t$ (voir ***fig. 7.23.***) puisque $\Delta s > 0$ et $\left\|\frac{d\vec{1}_t}{ds}\right\| > 0$.

Définition : $\boxed{\kappa = \left\|\frac{d\vec{1}_t}{ds}\right\| = \frac{1}{\rho}}$

avec : κ : la courbure
ρ : le rayon de courbure

La courbure est définie à l'aide de s car est intrinsèque à la courbe.
Les normales à la courbe en M et en M' se coupent en un point C appelé ***centre de courbure*** dont la coordonnée est $\vec{OC} = \vec{OM} + \rho\,\vec{1}_n$; en appelant $\rho = \overline{MC}$ le ***rayon de courbure***.
Le cours de mathématique sera un excellent complément pour la compréhension de cette notion de courbure.

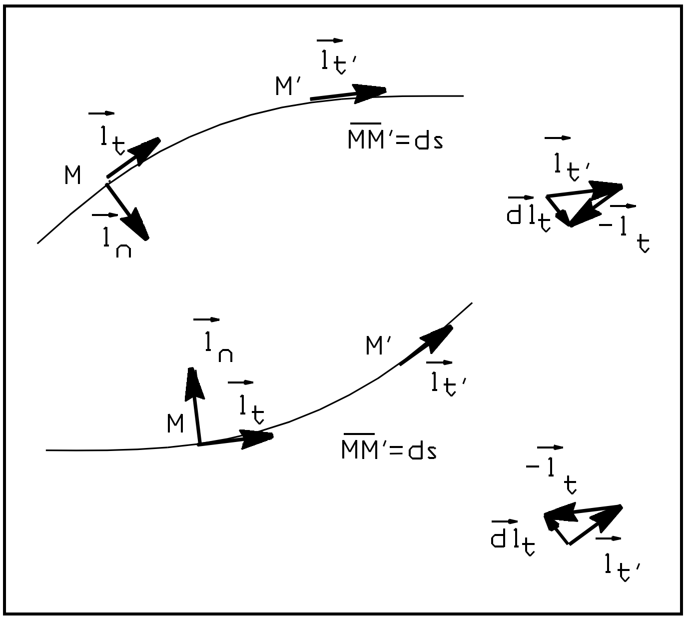

fig. 7.23. - *Courbure et direction du vecteur normal.*

Revenons à l'expression de l'accélération, comme :

$$\frac{d\vec{1}_t}{ds} = \left\|\frac{d\vec{1}_t}{ds}\right\| \vec{1}_n = \kappa\, \vec{1}_n$$

nous obtenons :

$$\boxed{\vec{a}_M = \frac{d\|\vec{v}_M\|}{dt}\,\vec{1}_t + \|\vec{v}_M\|^2\,\kappa\,\vec{1}_n}\;\textbf{\textit{(éq. 7.203.)}}$$

Que l'on peut aussi écrire sous la forme :

$$\boxed{\vec{a}_M = \frac{d\|\vec{v}_M\|}{dt}\,\vec{1}_t + \frac{\|\vec{v}_M\|^2}{\rho}\,\vec{1}_n = \vec{a}_{M_t} + \vec{a}_{M_n}}\;\textbf{\textit{(éq. 7.204.)}}$$

et

$$\boxed{\|\vec{a}_M\| = \sqrt{\left(\frac{d\|\vec{v}_M\|}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\|\vec{v}_M\|^2}{\rho}\right)^2} = \sqrt{\ddot{s}^2 + \frac{\dot{s}^4}{\rho^2}}}$$

<u>Remarques</u> :

1) Si le mouvement est rectiligne, on a $\frac{d\vec{1}_t}{ds} = 0$, donc $\kappa = 0$, $\rho = \infty$ et $\|\vec{a}_{M_n}\| = 0$; l'accélération $\vec{a}_M$ se réduit à sa seule composante $\vec{a}_{M\,t}$, sur la droite support de la trajectoire.
2) $\|\vec{a}_M\| \neq \ddot{s}$, par contre : $\|\vec{a}_{\tan}\| = \ddot{s}$
3) Le terme $\vec{a}_{M\,t}$ correspond bien à la dérivée par rapport au temps de la grandeur du vecteur vitesse; le terme $\vec{a}_{M\,n}$ est normal à la courbe, et est associé au changement de direction, car il correspond à $\frac{d\vec{1}_t}{dt}$.

A chaque point d'une trajectoire curviligne on peut associer un ***"trièdre de Frenet"*** [1] composé de $\vec{1}_t$, $\vec{1}_n$ et $\vec{1}_b$ (avec $\vec{1}_b = \vec{1}_t \times \vec{1}_n$).

Ce trièdre de Frenet est très largement utilisé en mathématiques pour définir les notions de plan et de cercle osculateurs, courbure, torsion ... au point M de la courbe donnée. On peut notamment démontrer que le rayon de courbure d'une courbe plane donnée par les équations $x = f_1(t)$ et $y = f_2(t)$ vaut :

$$\boxed{\rho = \frac{v_M^2}{\left\|\vec{a}_{M_n}\right\|} = \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}{\left|\dot{x}\,\ddot{y} - \dot{y}\,\ddot{x}\right|} = \frac{\left\|\vec{v}_M\right\|^3}{\left|v_x\,a_y - v_y\,a_x\right|}}$$

La théorie, avec démonstration, sera vue dans le cours de mathématique.

---

[1] *Frenet Jean-Frédéric (1816 [Périgueux] - 1900 [Périgueux]) : mathématicien, astronome et météorologue français.*

Application 7.6. Une roue de rayon $r = 0.4\ m$ roule sans glisser sur un rail. Un point M de la périphérie de la roue se trouve, à l'instant $t_0 = 0$, confondue avec l'origine du système d'axes. Les équations du mouvement de M sont données par :

$$\left.\begin{aligned} x &= 0.4\left(2\,t - \sin(2\,t)\right) \\ y &= 0.4\left(1 - \cos(2\,t)\right) \end{aligned}\right\rangle \text{ cycloïde.}$$

Déduire les lois de vitesse et accélération de M; tracer l'hodographe des vitesses de M. Pour $t = 1\ s$, calculer les valeurs de $\vec{v}_M$, $\vec{a}_M$, $\left\|\vec{a}_{M\,t}\right\|$ et $\left\|\vec{a}_{M\,n}\right\|$ ainsi que la distance parcourue par M et le rayon de courbure de la trajectoire à cet instant précis.

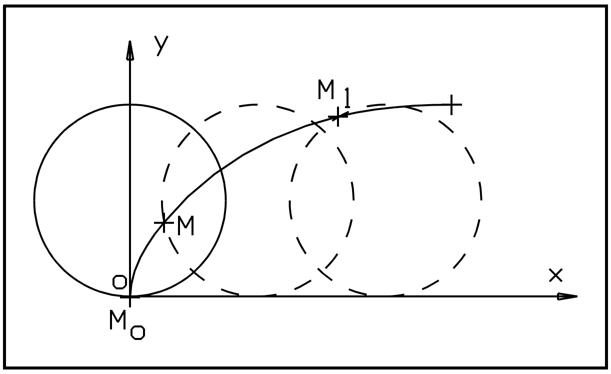

fig. 7.24. - Application 7.6.

Solution :

Les composantes cartésiennes de la vitesse sont :

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = 0.8\left(1 - \cos(2\,t)\right) \\ v_y &= \dot{y} = 0.8\sin(2\,t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \vec{v}_M = 0.8\left(1 - \cos(2\,t)\right)\vec{1}_x + 0.8\sin(2\,t)\,\vec{1}_y$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \left\|\vec{v}_M\right\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} &= 0.8\sqrt{\left(1 - \cos(2\,t)\right)^2 + \left(\sin(2\,t)\right)^2} \\ &= 0.8\sqrt{2 - 2\cos(2\,t)} = 0.8\sqrt{4\sin^2 t} \\ &= \left|1.6\sin t\right|\ m/s \end{aligned}$$

Les composantes cartésiennes de l'accélération sont :

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} = 1.6\sin(2\,t) \\ a_y &= \ddot{y} = 1.6\cos(2\,t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \vec{a}_M = 1.6\sin(2\,t)\,\vec{1}_x + 1.6\cos(2\,t)\,\vec{1}_y$$

$$\Rightarrow \quad \left\|\vec{a}_M\right\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 1.6\ m/s^2$$

Les composantes radiales et tangentielles de $\vec{a}_M$ *valent* :

$$\text{et} \quad \begin{cases} \left\|\vec{a}_{M\,t}\right\| = \left|\dfrac{d\left\|\vec{v}_M\right\|}{dt}\right| = \left|1.6\cos t\right| \\[2ex] \left\|\vec{a}_{M\,n}\right\| = \dfrac{\left\|\vec{v}_M\right\|^2}{\rho} \quad \textit{avec} \quad \rho = \dfrac{\left\|\vec{v}_M\right\|^3}{\left|v_x\,a_y - v_y\,a_x\right|} \end{cases}$$

$$\rho = \frac{\left|1.6\sin t\right|^3}{\left|1.6\times 0.8\times\left(1 - \cos(2\,t)\right)\times\cos(2\,t) - 1.6\times 0.8\times\sin^2(2\,t)\right|} = \left|1.6\sin t\right|$$

et ainsi :

$$\left\|\vec{a}_{M\,n}\right\| = \left|1.6\sin t\right|$$

on retrouve bien sûr la grandeur :

$$\left\|\vec{a}_M\right\| = 1.6\; m/s^2$$

Pour le calcul de l'accélération normale $a_{M\,n}$ on pourrait aussi utiliser la méthode suivante :

$$\left\|\vec{a}_{M_n}\right\| = \sqrt{a_M^2 - a_{M_t}^2} = \sqrt{1.6^2 - \left(1.6\cos t\right)^2} = \left|1.6\sin t\right|$$

et en déduire le rayon de courbure :

$$\rho = \frac{\left\|\vec{v}_M\right\|^2}{\left\|\vec{a}_{M_n}\right\|} = \frac{\left(1.6\sin t\right)^2}{\left|1.6\sin t\right|} = \left|1.6\sin t\right|$$

méthode qui permet de ne pas passer par la formule du rayon de courbure.

En $t = 1\,s$, *on trouve* :

$\vec{v}_M = 1.133\,\vec{1}_x + 0.727\,\vec{1}_y$ et $\left\|\vec{v}_M\right\| = 1.346\; m/s$

$\vec{a}_M = 1.455\,\vec{1}_x - 0.667\,\vec{1}_y$ et $\left\|\vec{a}_M\right\| = 1.6\; m/s^2$

$\left\|\vec{a}_{M\,t}\right\| = 0.864\; m/s^2$; $\left\|\vec{a}_{M\,n}\right\| = 1.346\; m/s^2$; $\rho = 1.346\; m$.

Hodographe

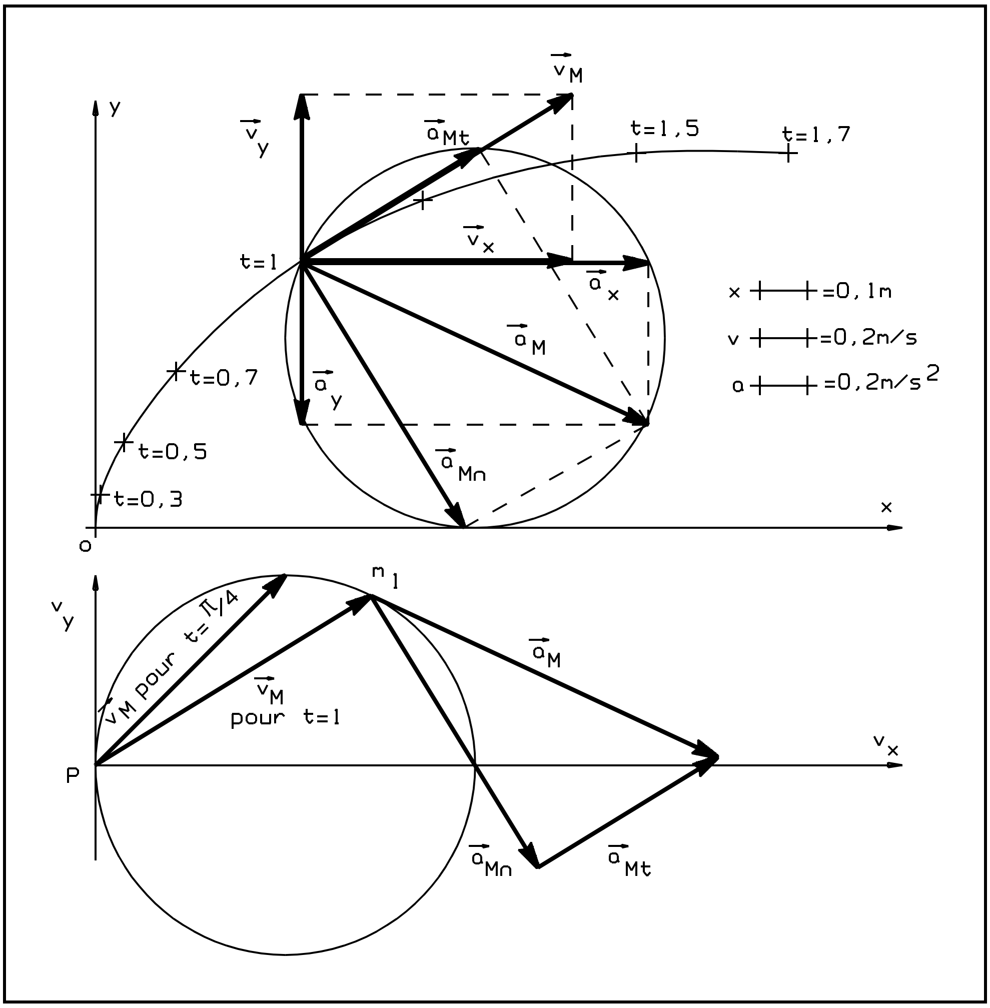

***fig. 7.25. -** Hodographe.*

Pour tracer l'hodographe, il faut trouver le lieu des extrémités de tous les vecteurs vitesses, rapportés à une même origine P; éliminons t entre x et y :

$$\left.\begin{array}{l} \cos(2\,t) = \dfrac{0.8 - v_x}{0.8} \\ \sin(2\,t) = \dfrac{v_y}{0.8} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (v_x - 0.8)^2 + v_y^2 = 0.8^2$$

ce qui est l'équation d'un cercle de rayon 0.8 et de centre (0.8; 0).

Pour trouver la distance parcourue par M entre $t_0 = 0$ et $t = 1$, il faut calculer :

$$s_{0-1} = \int_0^1 \|\vec{v}_M\|\,dt = \int_0^1 |1.6\sin t|\,dt = \left[-1.6\cos t\right]_0^1 = 0.736\,m$$

7.3.3. Mouvement circulaire : étude générale

A) *Description*

Il s'agit d'un cas particulier très important des mouvements curvilignes plans. La trajectoire est un cercle de rayon r et de centre O (***fig. 7.26.***).

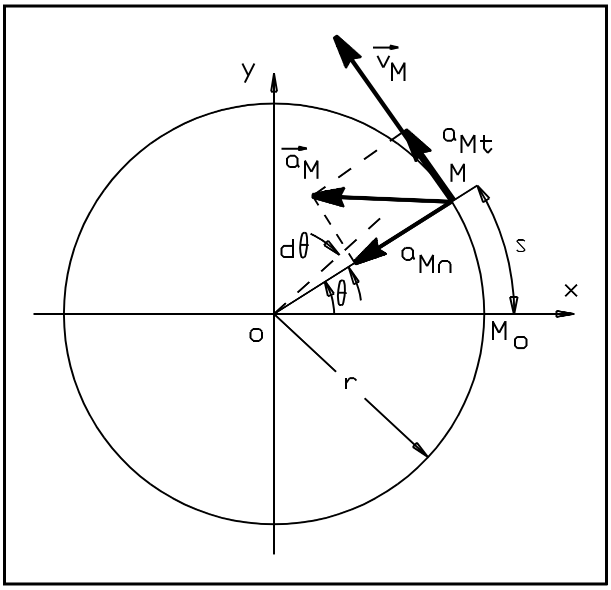

fig. 7.26. *- Mouvement circulaire.*

Choisissons un système d'axes Oxy centré en O. Considérons un mouvement circulaire antihorlogique.

L'équation de la trajectoire est :

$$x^2 + y^2 = r^2\,.$$

La loi du mouvement s'exprime par :

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \text{ avec } \theta = f(t)\,[rad] \text{ et } r = cst$$

correspondant à l'expression vectorielle :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\cos\theta\,\vec{1}_x + r\sin\theta\,\vec{1}_y}$$

On obtient immédiatement :

- *L'expression de la vitesse*

$$\boxed{\vec{v}_M = \overset{\bullet}{\overrightarrow{OM}} = -r\,\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{1}_x + r\,\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{1}_y}$$

$$\|\vec{v}_M\| = \sqrt{\left(r\,\dot{\theta}\sin\theta\right)^2 + \left(r\,\dot{\theta}\cos\theta\right)^2} = \sqrt{r^2\ \dot{\theta}^2} = r\left|\dot{\theta}\right| = r\,\dot{\theta}$$

puisque $\dot{\theta}$ est positif (sens antihorlogique).

<u>Remarque</u> :
La longueur d'arc, mesurée à partir de M_0 correspondant à $\theta_0 = 0$, vaut : $s = \theta\,r$ avec $\theta > 0$. Et donc la norme de la vitesse $\|\vec{v}_M\|$ s'obtient également par : $\|\vec{v}_M\| = \dot{s} = r\,\dot{\theta}$.

- *L'expression de l'accélération*

$$\boxed{\vec{a}_M = \dot{\vec{v}}_M = \left(-r\,\dot{\theta}^2\cos\theta - r\,\ddot{\theta}\sin\theta\right)\vec{1}_x + \left(-r\,\dot{\theta}^2\sin\theta + r\,\ddot{\theta}\cos\theta\right)\vec{1}_y}$$

$$\|\vec{a}_M\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \ldots = r\sqrt{\dot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2}$$

$$\begin{cases} a_{M_t} = \dfrac{d\|\vec{v}_M\|}{dt} = r\,\ddot{\theta} \\ a_{M_n} = \dfrac{\|\vec{v}_M\|^2}{\rho} = \dfrac{r^2\ \dot{\theta}^2}{r} = r\,\dot{\theta}^2 \quad \left(car\ \rho = c^{ste} = r\ dans\ ce\ cas-ci\right) \end{cases}$$

On appellera :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \omega = \dot{\theta} & la\ vitesse\ angulaire\ en\ rad/s\ ou\ s^{-1} \\ \varepsilon = \ddot{\theta} & l'accélération\ angulaire\ en\ rad/s^2\ ou\ s^{-2} \end{array}}$$

et on obtient finalement les expressions scalaires :

$$\boxed{\begin{array}{l} v_M = \omega\,r \\ \left.\begin{array}{l} a_{M\,t} = \varepsilon\,r \\ a_{M\,n} = \omega^2\,r = \dfrac{v_M^2}{r} \end{array}\right\} \quad avec \quad \|\vec{a}_M\| = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \end{array}}$$

B) *Expressions vectorielles*

La forme $v_M = \omega \, r$ n'indique pas intrinsèquement la direction et le sens du vecteur $\vec{v}_M$, sachant que $\dot{\theta}$ peut effectivement être positif ou négatif.

On définit le ***"vecteur vitesse angulaire*** $\vec{\omega}$ ***"*** comme un vecteur, localisé en O, perpendiculaire au plan du mouvement (***fig.*** *7.27.*), d'expression :

$$\boxed{\vec{\omega} = \omega \, \vec{1}_z = \dot{\theta} \, \vec{1}_z} \quad \textbf{\textit{(éq. 7.269.)}}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}} \quad \textbf{\textit{(éq. 7.270.)}}$$

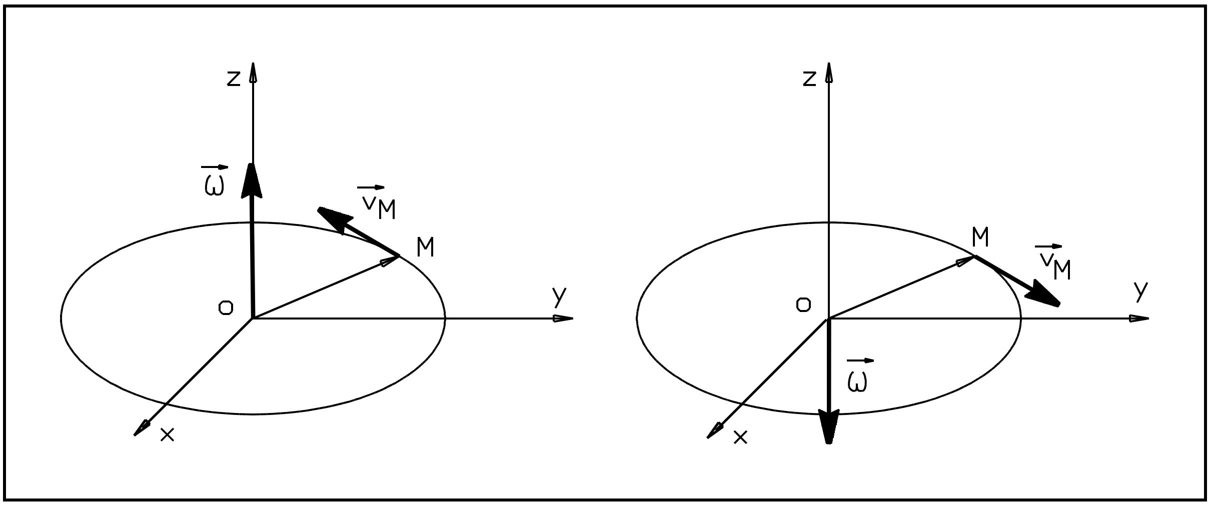

fig. *7.27.* **-** *Vitesse angulaire.*

On constate que $\vec{\omega}$ est placé sur l'axe de rotation autour duquel se fait le mouvement.

En dérivant cette expression vectorielle, on trouve :

$$\vec{a}_M = \dot{\vec{v}}_M = \frac{d\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)}{dt} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$$

avec, par définition :

$$\dot{\vec{\omega}} = \vec{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \dot{\vec{r}} = \vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\boxed{\vec{a}_M = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)} \quad \textbf{\textit{(éq. 7.275.)}}$$

ou encore, en développant le double produit vectoriel (voir ***§ 1.4.4.***) :

$$\vec{a}_M = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \left(\left(\underbrace{\vec{\omega} \bullet \vec{r}}_{\perp \Rightarrow \vec{0}} \right) \vec{\omega} - \left(\vec{\omega} \bullet \vec{\omega} \right) \vec{r} \right) = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \omega^2 \, \vec{r}$$

et on retrouve bien vectoriellement, des expressions en accord avec les grandeurs déduites en **A)** (***fig. 7.28.***) :

$$\vec{a}_{M\,t} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \qquad \text{et} \qquad \vec{a}_{M\,n} = -\,\omega^2\,\vec{r}$$

Le terme $\vec{a}_{M\,n}$ est appelé ***"accélération centripète"***.

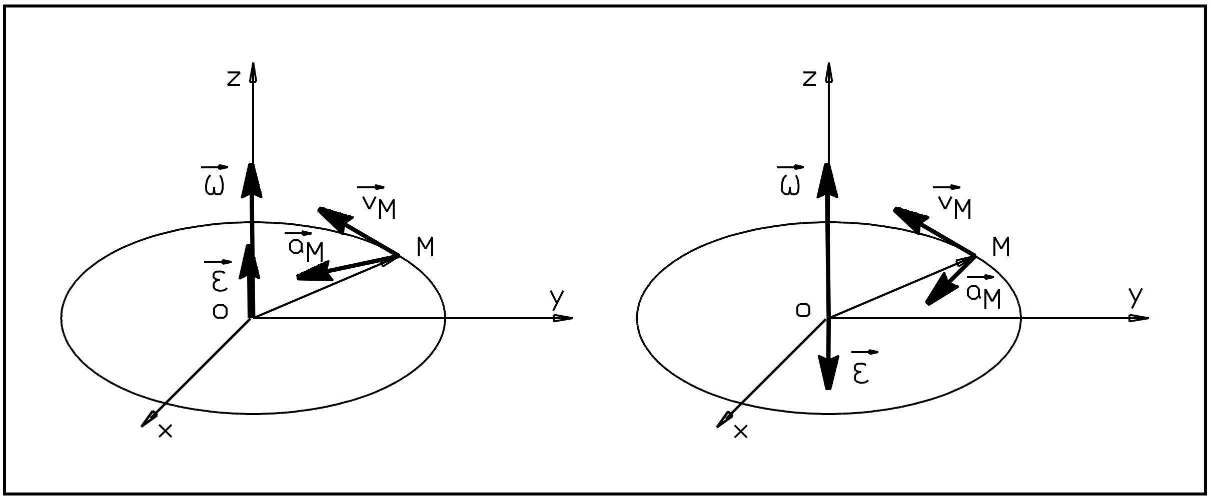

fig. 7.28. - *Vitesses et accélérations.*

Le vecteur $\vec{\varepsilon}$ représente le ***"vecteur accélération angulaire"***, également perpendiculaire au plan de la trajectoire, et appliqué en O. On voit immédiatement que $\vec{\omega}$ **et** $\vec{\varepsilon}$ de *même sens* signifie un mouvement circulaire accéléré, et que $\vec{\omega}$ **et** $\vec{\varepsilon}$ de *sens contraires*, un mouvement circulaire retardé.

Dans le *trièdre de Frenet* ($\vec{1}_t$, $\vec{1}_n$, $\vec{1}_b$) nous avons :

$$\boxed{\vec{OM} = \vec{r} = -\,r\,\vec{1}_n} \textit{(éq. 7.288.)}$$

Sachant que pour un mouvement circulaire $\rho = r = cst$, que $\omega = \dot{\theta}$ et que (voir ***§ 7.3.2.***) :

$$\dot{\vec{1}}_t = \frac{d\vec{1}_t}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \left(\left\|\frac{d\vec{1}_t}{ds}\right\|\vec{1}_n\right)\left(\left\|\vec{v}_M\right\|\right) = \frac{\left\|\vec{v}_M\right\|}{\rho}\,\vec{1}_n = \omega\,\vec{1}_n = \vec{\omega}\times\vec{1}_t$$

et par analogie :

$$\dot{\vec{1}}_n = \vec{\omega}\times\vec{1}_n = -\,\omega\,\vec{1}_t$$

en résumé :

$$\boxed{\begin{cases}\dot{\vec{1}}_t = \vec{\omega}\times\vec{1}_t = \omega\,\vec{1}_n = \dot{\theta}\,\vec{1}_n\\ \dot{\vec{1}}_n = \vec{\omega}\times\vec{1}_n = -\,\omega\,\vec{1}_t = -\,\dot{\theta}\,\vec{1}_t\end{cases}} \textit{(éq. 7.293.)}$$

d'où, l'expression de la vitesse devient :

$$\vec{v}_M = \dot{\vec{r}} = 0\,\vec{1}_n + (-\,r)\,\dot{\vec{1}}_n = 0 + r\,\dot{\theta}\,\vec{1}_t$$

$$\boxed{\vec{v}_M = r\,\dot{\theta}\,\vec{1}_t} \textit{(éq. 7.295.)}$$

et celle de l'accélération :

$$\vec{a}_M = \dot{\vec{v}}_M = \dot{r}\left(\dot{\theta}\,\vec{1}_t\right) + \left(r\left(\ddot{\theta}\,\vec{1}_t\right) + r\left(\dot{\theta}\,\dot{\vec{1}}_t\right)\right)$$

$$= 0 + r\,\ddot{\theta}\,\vec{1}_t + r\,\dot{\theta}^2\,\vec{1}_n$$

$$\boxed{\vec{a}_M = \dot{\vec{v}}_M = r\,\ddot{\theta}\,\vec{1}_t + r\,\dot{\theta}^2\,\vec{1}_n} \quad \textbf{\textit{(éq. 7.297.)}}$$

7.3.4. Mouvement circulaire uniforme (M.C.U.)

Dans ce cas le module $\left\|\vec{v}_M\right\|$ est constant pour tout instant *t*; il vient donc immédiatement que la vitesse angulaire elle-même est une constante :

$$\text{M.C.U.} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{ll} \omega = \dfrac{v_M}{r} = \omega_0 & [rad/s] \\ \varepsilon = \dot{\omega} = 0 & [rad/s^2] \\ \theta = \int \omega\,dt = \omega_0\,t + \theta_0 & [rad] \end{array}}$$

La constante d'intégration θ_0 fixant la position du point M_0 , à l'instant $t = 0$.

On appelle **"*période* T"** la durée d'un tour; on a :

$$v_M = \frac{2\,\pi\,r}{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_M}{r} = \frac{2\,\pi}{\mathrm{T}}$$

Le nombre de tours par unité de temps est la ***"fréquence ν"*** :

$$\nu = \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{\omega}{2\,\pi}$$

Application 7.7. Une barre droite $\overline{OA}$, passant par un point fixe O, tourne autour de ce point à la vitesse constante de $n = 10\ tr/\min$. On considère, dans le plan, un point B fixe situé à 5 cm de O et on abaisse la perpendiculaire $\overline{BM}$ sur $\overline{OA}$.
Déterminer la trajectoire, et les lois de vitesse et d'accélération du point M situé sur $\overline{OA}$.

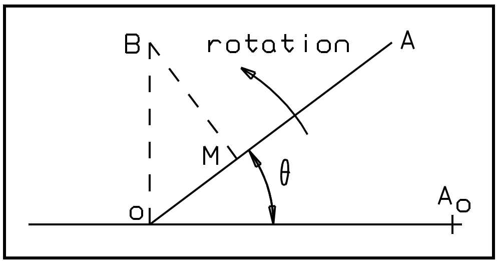

fig. 7.29. *- Application 7.7.*

Solution :
La vitesse angulaire ω_b de la barre vaut :

$$\omega_b = \frac{2\,\pi\,n}{60} = \frac{\pi}{3} = 1.047\ rad/s$$

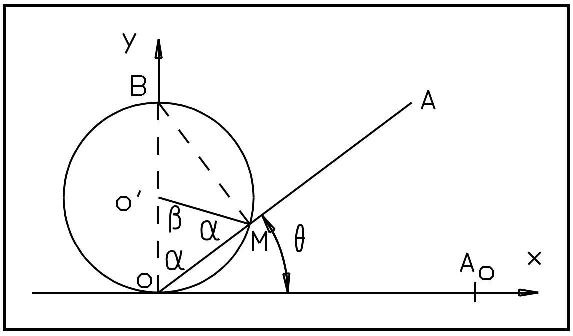

fig. 7.30. *- Résolution.*

Deux approches du problème sont possibles :

1) *Approche "géométrique"* :
Recherche de la trajectoire

L'angle $O\hat{M}B$ étant droit, et les points O et B étant fixes, M décrit la circonférence de centre O', milieu de $\overline{OB}$.

Ainsi $\left\|\overrightarrow{O'M}\right\| = r = 0.025\,m$.

L'équation de la trajectoire de M étant alors :

$$x^2 + (y - 0.025)^2 = 0.025^2$$

Recherche des relations trigonométriques

Dans le triangle isocèle $\overline{O'OM}$, on a :

$$\beta = \pi - 2\,\alpha = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2\,\theta$$

or on sait que :

$$\theta = \omega_b\ t + \theta_0 \text{ avec } \theta_0 = 0$$

et donc :

$$\beta = 2\,\theta = 2\,\omega_b\ t$$

Dès lors, le point M tourne autour de O', suivant un M.C.U. de rayon 0.025 m, à la vitesse angulaire ω_M :

$$\omega_M = \dot{\beta} = 2\,\omega_b = \frac{2\,\pi}{3}$$, l'accélération angulaire étant nulle;

La vitesse de M autour de O' vaut :

$$v_M = \omega_M\ \overline{O'M} = \frac{2\,\pi}{3} \times 0.025 = 0.052\ m/s$$

L'accélération quant à elle vaut :

$$a_{M\,t} = \varepsilon_M\ \overline{O'M} = 0$$

$$a_{M\,n} = \omega_M^2\ \overline{O'M} = \left(\frac{2\,\pi}{3}\right)^2 \times 0.025 = 0.110\, m/s^2$$

2) *Approche "vectorielle"* :
Vectoriellement, on pourrait écrire :

Pour la position :

$$\vec{r} = \|\vec{r}\|\ \vec{1}_r \qquad \text{avec :} \quad \vec{1}_r = \cos\theta\ \vec{1}_x + \sin\theta\ \vec{1}_y$$

et en écrivant la projection de $\overrightarrow{OB}$ sur $\overrightarrow{OM}$, on obtient :

$$\|\vec{r}\| = \overrightarrow{OB} \bullet \vec{1}_r = \left(0.05\ \vec{1}_y\right) \bullet \left(\cos\theta\ \vec{1}_x + \sin\theta\ \vec{1}_y\right) = 0.05 \sin\theta$$

D'où :

$$\vec{r} = 0.05 \cos\theta \sin\theta\ \vec{1}_x + 0.05 \sin^2\theta\ \vec{1}_y$$

$$= \frac{0.05}{2} \sin(2\,\theta)\ \vec{1}_x + \left(\frac{0.05}{2} - \frac{0.05}{2}\cos(2\,\theta)\right) \vec{1}_y$$

(équation paramétrique d'un cercle de centre O' (0; $\frac{0.05}{2}$) et de rayon : $\frac{0.05}{2}$)

Pour la vitesse :

Sachant que $\theta = \omega_b\ t \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \omega_b = \frac{\pi}{3}$, on a :

$$\vec{v}_M = \dot{\overrightarrow{OM}} = 0.05\,\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{2\,\pi}{3}\,t\right)\vec{1}_x + 0.05\,\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{2\,\pi}{3}\,t\right)\vec{1}_y$$

$$\Rightarrow \quad \|\vec{v}_M\| = \frac{0.05\,\pi}{3} = 0.052\, m/s$$

Pour l'accélération :

$$\vec{a}_M = \dot{\vec{v}}_M = -\,0.05\,\frac{2\,\pi^2}{9}\sin\left(\frac{2\,\pi}{3}\,t\right)\vec{1}_x + 0.05\,\frac{2\,\pi^2}{9}\cos\left(\frac{2\,\pi}{3}\,t\right)\vec{1}_y$$

$$\Rightarrow \quad \|\vec{a}_M\| = 0.05\,\frac{2\,\pi^2}{9} = 0.110\, m/s^2$$

7.3.5. Mouvement circulaire uniformément accéléré (M.C.U.A.)

Pour ce mouvement l'accélération tangentielle a_{M_t} est constante; l'accélération angulaire ε est donc elle-même une constante $\in \mathbb{R}$:

$$\text{M.C.U.A.} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{ll} \varepsilon = \dfrac{a_{M_t}}{r} = \varepsilon_0 & \left[rad/s^2\right] \\ \omega = \int \varepsilon \, dt = \varepsilon_0 \, t + \omega_0 & \left[rad/s\right] \\ \theta = \int \omega \, dt = \dfrac{\varepsilon_0 \, t^2}{2} + \omega_0 \, t + \theta_0 & \left[rad\right] \end{array}}$$

Si la vitesse angulaire croît, le mouvement est uniformément accéléré; si la vitesse angulaire décroît, le mouvement est uniformément retardé (ou décéléré).

Attention, le fait que l'accélération tangentielle soit constante n'entraîne pas que l'accélération normale le soit; celle-ci vaut :

$$a_{M\,n} = \omega^2 \, r = \left(\varepsilon_0 \, t + \omega_0\right)^2 \, r$$

Application 7.8. Un train commence à parcourir d'un M.C.U.A. une courbe circulaire de rayon $r = 800\,m$ et, après avoir franchi une distance de 600 *m*, acquiert la vitesse de 54 *km/h*. Calculer la vitesse et l'accélération du train à mi-chemin du trajet parcouru.

Solution :

Mise en équation de la position

$$600 = s = \theta \, r = \left(\frac{\varepsilon_0 \, t^2}{2} + \omega_0 \, t + \theta_0\right) r = \frac{\varepsilon_0 \, t^2}{2} \, r$$

Si on choisit l'instant initial et la position de départ tels que $\omega_0 = 0$ et $\theta_0 = 0$.

Mise en équation de la vitesse

$$v_M = \frac{54\,km/h}{3.6} = 15\,m/s = \omega \, r = \left(\varepsilon_0 \, t + \omega_0\right) r = \varepsilon_0 \, t \, r$$

En combinant les 2 équations, on obtient, pour le trajet complet :

$$600 = \left(\varepsilon_0 \, t \, r\right) \frac{t}{2} = 15 \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad t = 80\,s$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_0 = \frac{v_M}{t \, r} = \frac{15}{80 \times 800} = 2.34\,10^{-4} \; rad/s^2$$

A mi-chemin, on a :

$$300 = \frac{\varepsilon_0 \, t^2}{2} \, r \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \times 300}{\varepsilon_0 \, r}} = \sqrt{\frac{2 \times 300}{2.34\,10^{-4} \times 800}} = 56.6\,s$$

et ainsi :

$$v_M = \varepsilon_0 \; t \; r = 10.6 \; m/s = 38.2 \; km/h$$

$$a_{M\,t} = \; \varepsilon_0 \; r = 0.19 \; m/s^2 \; ; \; a_{M\,n} = \omega^2 \; r = \left(\varepsilon_0 \; t\right)^2 \; r = 0.14 \; m/s^2$$

d'où :

$$\left\|\vec{a}_M\right\| = 0.24 \; m/s^2$$

Résolution en MRUA

Remarquons que ce problème aurait pu être résolu tout aussi facilement par les équations du MRUA.

Dans ce cas prenons la longueur d'arc s et mettons en équation :

$$\begin{cases} s = \dfrac{a\,t^2}{2} + v_0 \; t + s_0 \\ v = a\;t + v_0 \end{cases}$$

Avec en $t = 0$:

$$s_0 = 0 \,,\; v_0 = 0 \;\text{ et }\; a = a_t$$

d'où :

$$a_t = \frac{v}{t} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{v\,t}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2\,s}{v} = \frac{2 \times 600}{54\,000/3\,600} = 80 \; s$$

$$a_t = \frac{54\,000/3\,600}{80} = 0.1875 \; m/s^2$$

A mi-chemin :

$$s = 300 \; m \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2\,s}{a_t}} = \sqrt{\frac{2 \times 300}{0.1875}} = 56.6 \; s$$

$$v = a_t \; t = 0.1875 \times 56.6 = 10.6 \; m/s$$

7.3.6. Vitesse et accélération en coordonnées polaires

Considérons un arc de trajectoire plane et le vecteur vitesse au point M (***fig. 7.32.***). Il faut décomposer $\vec{v}_M$ en coordonnées polaires, en une composante ***"radiale"*** v_r et ***"transversale"*** v_θ. Les axes $\left\{\vec{1}_r\,;\,\vec{1}_\theta\right\}$ étant orienté de telle manière que le système d'axes soit d'orientation directe. Le même type de décomposition doit être fait pour $\vec{a}_M$, en une composante radiale a_r et une composante transversale a_θ.

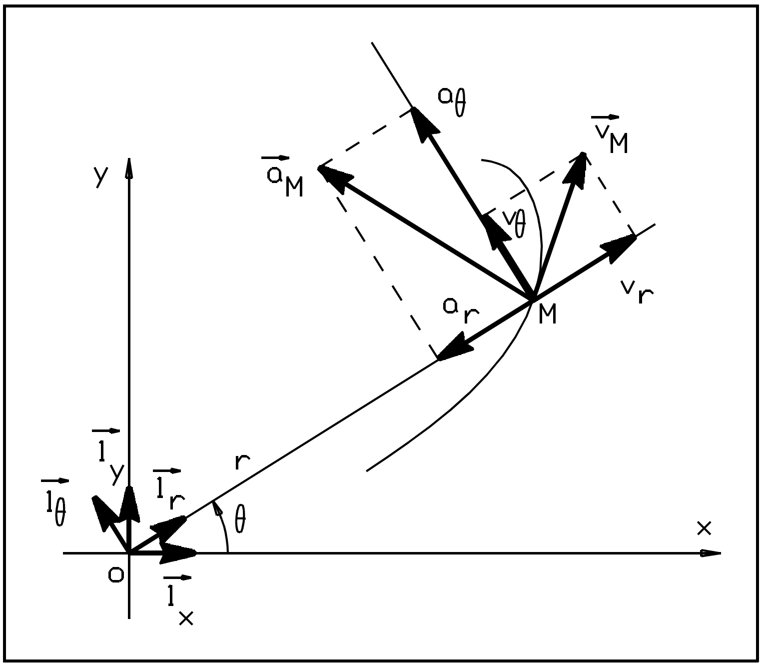

fig. 7.32. - *Cinématique en coordonnées polaires.*

avec : $r = f_1(t)$ et $\theta = f_2(t)$.

Remarque :

$\left\{\vec{1}_r\,;\,\vec{1}_\theta\right\} \neq \left\{\vec{1}_t\,;\,\vec{1}_n\right\}$ (!)

Sachant qu'en projetant $\vec{r}$, $\vec{v}_M$ et $\vec{a}_M$ sur les axes $\left\{\vec{1}_r\,;\,\vec{1}_\theta\right\}$ définit comme :

$$\begin{cases} \vec{1}_r = \cos\theta\,\vec{1}_x + \sin\theta\,\vec{1}_y \\ \vec{1}_\theta = \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)\vec{1}_x + \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)\vec{1}_y \\ \quad = -\sin\theta\,\vec{1}_x + \cos\theta\,\vec{1}_y \end{cases}$$

on obtient :

$$\vec{r} = r\,\vec{1}_r$$

$$\vec{v}_M = v_r\,\vec{1}_r + v_\theta\,\vec{1}_\theta$$

$$\vec{a}_M = a_r\,\vec{1}_r + a_\theta\,\vec{1}_\theta$$

.

Si on se rappelle ce qui a été vu précédemment *§ 7.3.3.B.* (*éq.7.292.*) on peut par analogie trouver directement :

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\vec{1}}_r = \vec{\omega} \times \vec{1}_r = \omega \, \vec{1}_\theta \\ \dot{\vec{1}}_\theta = \vec{\omega} \times \vec{1}_\theta = -\, \omega \, \vec{1}_r \end{cases}} \quad \textbf{\textit{(éq. 7.360.)}}$$

d'où :

1) la vitesse de M $\vec{v}_M$:

$$\vec{v}_M = \dot{\overrightarrow{OM}} = \frac{d\left(r\,\vec{1}_r\right)}{dt} = \dot{r}\,\vec{1}_r + r\,\dot{\vec{1}}_r = \dot{r}\,\vec{1}_r + r\,\omega\,\vec{1}_\theta$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_r &= \dot{r} \\ v_\theta &= \omega\, r \end{aligned}} \quad \textbf{\textit{(éq. 7.363.)}} \qquad \Rightarrow \qquad \left\|\vec{v}_M\right\| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

2) l'accélération de M $\vec{a}_M$:

$$\vec{a}_M = \dot{\vec{v}}_M = \frac{d\left(\dot{r}\,\vec{1}_r + r\,\omega\,\vec{1}_\theta\right)}{dt} = \left(\ddot{r}\,\vec{1}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{1}}_r\right) + \left(\dot{r}\,\omega\,\vec{1}_\theta + r\left(\dot{\omega}\,\vec{1}_\theta + \omega\,\dot{\vec{1}}_\theta\right)\right)$$

$$= \left(\ddot{r} - \omega^2\, r\right)\vec{1}_r + \left(2\,\dot{r}\,\omega + r\,\dot{\omega}\right)\vec{1}_\theta$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - \omega^2\, r \\ a_\theta &= \varepsilon\, r + 2\,\dot{r}\,\omega \end{aligned}} \quad \textbf{\textit{(éq. 7.367.)}} \qquad \Rightarrow \qquad \left\|\vec{a}_M\right\| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

<u>*Remarque*</u> :

Les formules établies en *§ 7.3.3.A.* pour le mouvement circulaire découlent directement des expressions ci-dessus, en effet r étant constant (rayon du cercle) nous avons : $\dot{r} = \ddot{r} = 0$.

Et on trouve, <u>***uniquement dans ce cas particulier du cercle***</u> :

$$v_\theta = \omega\, r = v$$

$$\begin{cases} a_r = -\,\omega^2\, r = a_n \\ a_\theta = \varepsilon\, r = a_{tg} \end{cases}$$

Application 7.9. Résoudre l'application _7.7._ en utilisant les coordonnées polaires.

Solution :

Recherche des coordonnées (r, θ) :

Dans le triangle rectangle $\overline{OBM}$, il vient directement (voir données numériques) :

$$\begin{cases} \theta = \omega_b \; t = \dfrac{\pi}{3} t \\ r = \overline{OM} = \overline{OB} \sin\theta \\ \qquad = 0.05 \sin\left(\dfrac{\pi}{3} t\right) \end{cases}$$

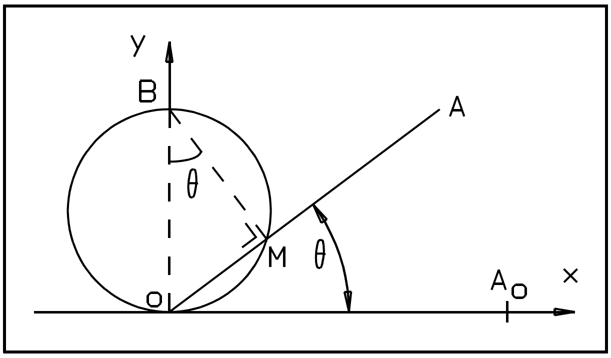

fig. 7.33. - Application 7.9.

Remarque :

La relation $r = \overline{OB} \sin\theta$ n'est valable que parce que dans notre application $\theta \in [0, \pi]$.

Recherche des vitesses :

$$v_r = \dot{r} = 0.05 \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3} t\right)$$

$$v_\theta = \omega \, r = \frac{\pi}{3} 0.05 \sin\left(\frac{\pi}{3} t\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left\| \vec{v}_M \right\| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = 0.05 \frac{\pi}{3} = 0.052 \; m/s$$

Recherche des accélérations :

$$a_r = \ddot{r} - \omega^2 \, r = -\, 0.05 \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{3} t\right) - \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 0.05 \sin\left(\frac{\pi}{3} t\right)$$

$$= -\, 0.1 \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{3} t\right)$$

$$a_\theta = \varepsilon \, r + 2 \, \omega \, \dot{r} = 0 + 2 \frac{\pi}{3} 0.05 \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3} t\right)$$

$$= 0.1 \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} t\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left\| \vec{a}_M \right\| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = 0.1 \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = 0.110 \; m/s^2$$

ce qui confirme bien les résultats trouvés précédemment.

7.4. ***Mouvements dans l'espace***

Ce mouvement est défini par trois équations :

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}$$

Il peut être considéré comme la combinaison de trois mouvements rectilignes simultanés (ou comme la combinaison d'un mouvement plan avec un mouvement rectiligne suivant une perpendiculaire au plan ...).

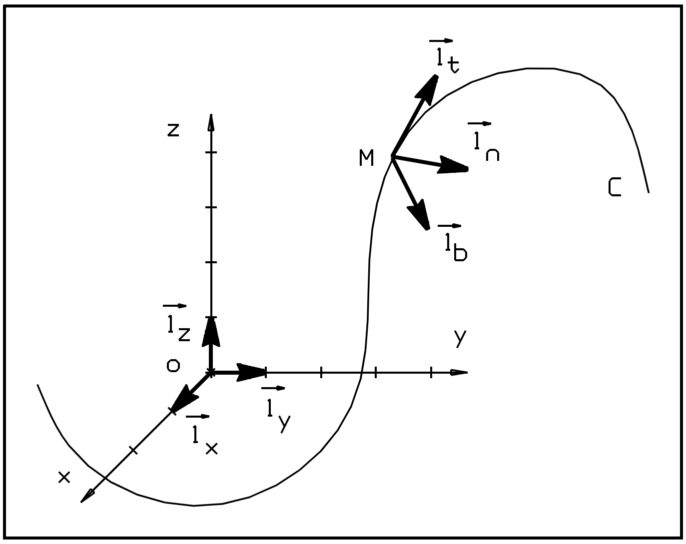

fig. 7.34. *- Cinématique 3D.*

Comme pour les mouvements plans, en chaque point M de la trajectoire, on peut tracer le trièdre de Frenet (***fig. 7.34.***); les vecteurs $\vec{1}_t$ et $\vec{1}_n$ appartiennent au plan osculateur de la courbe, en M, et $\vec{1}_b = \vec{1}_t \times \vec{1}_n$. La décomposition de l'accélération suivant $\|\vec{a}_{M\,t}\|$ (le long de $\vec{1}_t$) et $\|\vec{a}_{M\,n}\|$ (le long de $\vec{1}_n$) est toujours valable. La recherche de $\vec{v}_M$ et $\vec{a}_M$ peut également se faire dans des systèmes d'axes autres que cartésiens (par exemple cylindriques, ou encore sphériques ...).

Application 7.10. Etudier le mouvement hélicoïdal, décrit par :

$$x = r_c \cos(\omega t)\ ;\ y = r_c \sin(\omega t)\ ;\ z = k\, t\ .$$

On demande de trouver :

a) la trajectoire;
b) la loi des vitesses;
c) la loi des accélérations;
d) l'expression de la distance parcourue;
e) le rayon de courbure.

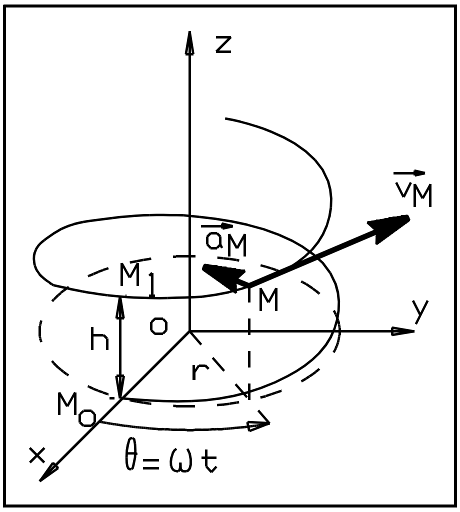

fig. 7.35. - Application 7.10.

Solution :

a) *Recherche de la trajectoire*

La trajectoire est bien située sur un cylindre de révolution, d'axe Oz , puisque $x^2 + y^2 = r_c^2$.

Si on tire *t* de la dernière équation et si on substitue sa valeur dans la première, on trouve :

$$x = r_c \cos\left(\frac{\omega z}{k}\right)$$

La trajectoire du point sera donc une spirale à rayon constant.

Recherche du pas de l'hélice h

En $t = 0$, le mobile se trouve en M_0 (r_c; 0; 0).

En $t_1 = \dfrac{\theta}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\omega}$, on a M_1 (r_c; 0; $\dfrac{k\, 2\pi}{\omega}$).

Le "*pas*" de l'hélice est la différence entre les cotes de M_0 et M_1 :

$$h = z_1 - z_0 = \frac{k\, 2\pi}{\omega}$$

b) *Recherche de la vitesse*

On obtient immédiatement :

$$\vec{v}_M = -\, r_c\, \omega \sin(\omega t)\, \vec{1}_x + r_c\, \omega \cos(\omega t)\, \vec{1}_y + k\, \vec{1}_z$$

$$\left\|\vec{v}_M\right\| = \sqrt{r_c^2\, \omega^2 + k^2} = constant$$

c) *Recherche de l'accélération*

$$\vec{a}_M = -\, r_c\, \omega^2 \cos(\omega t)\, \vec{1}_x - r_c\, \omega^2 \sin(\omega t)\, \vec{1}_y$$

$$\left\|\vec{a}_M\right\| = \omega^2\, r_c = constant$$

$\left\|\vec{a}_M\right\|$ est dirigé vers Oz , dans un plan horizontal.

d) *La longueur parcourue sur la trajectoire*, après un temps t_1, vaut :

$$s_{o,t_1} = \int_0^{t_1} \left\|\vec{v}_M\right\| dt = t_1 \sqrt{r_c^2\, \omega + k^2}$$

e) *Recherche du rayon de courbure*

Pour $\vec{a}_M$, on peut encore écrire :

$$\left\|\vec{a}_{M\,t}\right\| = \frac{d\left\|\vec{v}_M\right\|}{dt} = 0 \quad \text{et donc} \quad \left\|\vec{a}_M\right\| = \left\|\vec{a}_{M_n}\right\| = \frac{\left\|\vec{v}_M\right\|^2}{\rho}$$

et en conséquence le rayon de courbure vaut :

$$\rho = \frac{r_c^2\ \omega^2 + k^2}{\omega^2\ r_c}$$

en particulier,

si : $k = 0$ $\Rightarrow$ $\rho = r_c$

si : $k = \infty$ ou $r_c = 0$ $\Rightarrow$ $\rho = \infty$

L'étude du mouvement aurait également pu se faire en coordonnées cylindriques, avec :

$$\begin{cases} r = r_c \\ \theta = \omega\, t \\ z = k\, t \end{cases}$$

d'où :

$v_r = \dot{r} = 0$; $v_\theta = \omega\, r = \omega\, r_c$; $v_z = \dot{z} = k$

$$\left\|\vec{v}_M\right\| = \sqrt{\omega^2\ r_c^2 + k^2}$$

$a_r = \ddot{r} - \omega^2\ r = -\,\omega^2\ r_c$; $a_\theta = \varepsilon\, r + 2\,\omega\,\dot{r} = 0$ $a_z = \ddot{z} = 0$

$$\left\|\vec{a}_M\right\| = \omega^2\ r_c$$
