CHAPITRE 7-8. RAPPEL DE CINÉMATIQUE

7-8.1. *Référentiel*

La notion de mouvement est intrinsèquement liée à celle de référentiel. Un objet, immobile pour un passager assis dans un avion, apparaît en mouvement pour un observateur sur la terre.

On appelle référentiel $\Re$ un ensemble de *n* points ($n \geq 4$) non coplanaires immobiles les uns par rapport aux autres, par rapport auxquels on étudie le mouvement d'un système. Par extension, on appelle aussi référentiel l'ensemble de tous les points immobiles par rapport aux *n* points considérés. L'observateur est supposé immobile par rapport à $\Re$.

Le choix du référentiel est entièrement arbitraire. Dans la pratique on choisira le référentiel par rapport auquel la description du mouvement et les lois de la physique sont les plus simples. Les référentiels les plus souvent utilisés sont les suivants :

- Référentiel défini par le laboratoire appelé référentiel terrestre;
- Référentiel géocentrique défini par le centre de la Terre et trois étoiles très éloignées, dites "*fixes*";
- Référentiel de Képler [(1)] , défini par le centre du Soleil et trois étoiles fixes;
- Référentiel de Copernic [(2)] , défini par le centre de masse du système solaire et trois étoiles fixes;
- Référentiel du centre de masse.

7-8.2. *Système de coordonnées*

On appelle "*système de coordonnées*" à l'instant *t* toute paramétrisation des points du référentiel au moyen de trois nombres réels (x, y, z).

a) *Coordonnées cartésiennes*

Le système d'axes cartésiens direct Oxyz est défini par son origine O et trois axes orthogonaux x, y, z orientés de façon directe.

Dans la direction *i*, on définit le vecteur unitaire $\vec{1}_i$.

On associe à tout point M, un vecteur position $\vec{OM} = \vec{r}$.

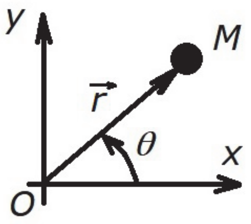
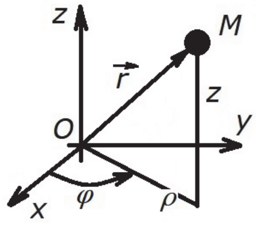
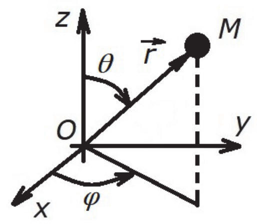
b) *Coordonnées curvilignes*

Suivant la nature du problème, en particulier quand il y a des symétries, il est possible de simplifier les calculs en introduisant d'autres systèmes de coordonnées dites coordonnées "*curvilignes*". Les coordonnées curvilignes les plus souvent utilisées sont les coordonnées polaires (dans le plan), cylindriques et sphériques.

---

(1) *Kepler (ou Keppler) Johannes (1571 [Weil der Stadt - Bade-Wurtemberg] - 1630 [Ratisbonne - Bavière]) : astronome.*

(2) *Nicolas Copernic (1473 [Torun] - 1543 [Frombork]) : chanoine, médecin et astronome polonais.*

<table>
<tr><td>Coordonnées polaires</td><td>Coordonnées cylindriques</td><td>Coordonnées sphériques</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$M \equiv (r, \theta)$ $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = 0 \end{cases}$</td><td>$M \equiv (\rho, \varphi, z)$ $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$</td><td>$M \equiv (r, \theta, \varphi)$ $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$</td></tr>
</table>

7-8.3. ***Trajectoire d'une particule***

La trajectoire est la courbe fixée dans le référentiel $\Re$ définie par l'ensemble des extrémités des vecteurs positions $\vec{r}(t)$.

Ayant introduit un système d'axes cartésiens, il y a plusieurs manières de décrire la trajectoire :

1) En exprimant les deux coordonnées en fonction de la troisième :

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

C'est l'équation intrinsèque de la trajectoire.

2) En exprimant les trois coordonnées en fonction d'un paramètre :

$$\begin{cases} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \\ z = z(\lambda) \end{cases}$$

On parle alors d'équation paramétrique de la trajectoire et l'on écrit simplement :
$\vec{r} = \vec{r}(\lambda)$

Comme paramètre on utilise souvent la ***longueur de l'arc*** $\overline{M_0 M}$, est définie par : $\overline{M_0 M} = s = s(t)$ (en *m*).

3) La trajectoire peut aussi être paramétrisée par le temps :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{ou :} \quad \vec{r} = \vec{r}(t)$$

7-8.4. ***Description du mouvement d'un point matériel***

7-8.4.1. Vecteur vitesse

Afin de simplifier l'étude du mouvement, on peut envisager de décomposer le mouvement d'un point en deux mouvements plus simples et d'étude plus facile grâce à l'introduction d'un repère particulier lié au système.

Le mouvement du point M par rapport à un repère fixe Oxyz est obtenu par la superposition du mouvement du point par rapport au repère particulier $O_1x_1y_1z_1$ et du mouvement de celui-ci par rapport au repère fixe.

Soit M, point mobile dans $O_1x_1y_1z_1$ trièdre lui-même en mouvement par rapport à Oxyz (***fig. 7-8.4.***)

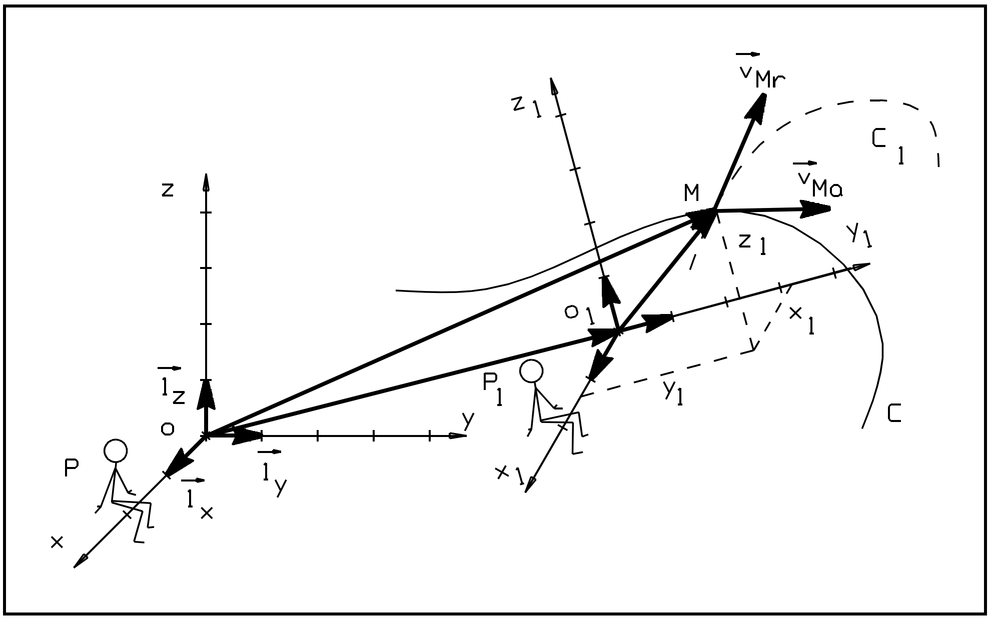


fig. 7-8.4. *- Vecteur vitesse.*

Par définition, on a :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$
$$= \overrightarrow{OO_1} + \left(x_1\,\vec{1}_{x_1} + y_1\,\vec{1}_{y_1} + z_1\,\vec{1}_{z_1}\right)$$

$$\underbrace{\vec{v}_{M\,a}}_{\substack{vitesse\\ absolue}} = \dot{\vec{r}} = \underbrace{\dot{\overrightarrow{OO_1}} + \left(x_1\,\dot{\vec{1}}_{x_1} + y_1\,\dot{\vec{1}}_{y_1} + z_1\,\dot{\vec{1}}_{z_1}\right)}_{vitesse\ d'entrainement} + \underbrace{\left(\dot{x}_1\,\vec{1}_{x_1} + \dot{y}_1\,\vec{1}_{y_1} + \dot{z}_1\,\vec{1}_{z_1}\right)}_{vitesse\ relative}$$

<u>*Vitesse d'entraînement*</u> : correspond à la vitesse du point, immobile par rapport au système d'axe mobile $O_1x_1y_1z_1$, par rapport au repère fixe Oxyz

<u>*Vitesse relative*</u> : correspondant à la vitesse telle qu'elle serait observée sur C_1 par un spectateur fixé dans $O_1x_1y_1z_1$.

Dans l'écriture de la vitesse d'entraînement interviennent les vecteurs $\dot{\vec{1}}_{x_1}$, $\dot{\vec{1}}_{y_1}$ et $\dot{\vec{1}}_{z_1}$ traduisant le fait que $O_1\, x_1 y_1 z_1$ est un trièdre mobile dont l'orientation change (système d'axes tournant).

<u>Rappel</u> :

$$\left\| \vec{1}_t \right\|^2 = \vec{1}_t \bullet \vec{1}_t = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\left\| \vec{1}_t \right\|^2}{dt} = 0 = \frac{d\vec{1}_t}{dt} \bullet \vec{1}_t + \vec{1}_t \bullet \frac{d\vec{1}_t}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad 2\left(\frac{d\vec{1}_t}{dt} \bullet \vec{1}_t \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{1}}_t \perp \vec{1}_t$$

Par analogies avec les équations ***éq. 7.292*** et ***éq. 7.359***, on recherche un vecteur $\vec{\omega}_P\left(\omega_{P\,x}, \omega_{P\,y}, \omega_{P\,z}\right)$ tel que :

$$\begin{cases} \dot{\vec{1}}_{x_1} = \vec{\omega}_P \times \vec{1}_{x_1} \\ \dot{\vec{1}}_{y_1} = \vec{\omega}_P \times \vec{1}_{y_1} \\ \dot{\vec{1}}_{z_1} = \vec{\omega}_P \times \vec{1}_{z_1} \end{cases}$$

Concentrons-nous sur la première équation :

$$\dot{\vec{1}}_{x_1} = \vec{\omega}_P \times \vec{1}_{x_1} = \omega_{P\,z}\ \vec{1}_{y_1} - \omega_{P\,y}\ \vec{1}_{z_1}$$

Cette expression a du sens puisque $\dot{\vec{1}}_{x_1}$ est perpendiculaire à $\vec{1}_{x_1}$, donc $\dot{\vec{1}}_{x_1}$ est une combinaison linéaire de $\vec{1}_{y_1}$ et $\vec{1}_{z_1}$. On voit que $\omega_{P\,z}$ est la composante de $\dot{\vec{1}}_{x_1}$ selon $\vec{1}_{y_1}$, ce qui s'écrit :

$$\omega_{P\,z} = \dot{\vec{1}}_{x_1} \bullet \vec{1}_{y_1}$$

De manière analogue, on définit :

$$\omega_{P\,x} = \dot{\vec{1}}_{y_1} \bullet \vec{1}_{z_1}$$
$$\omega_{P\,y} = \dot{\vec{1}}_{z_1} \bullet \vec{1}_{x_1}$$

Le vecteur $\vec{\omega}_P$ ainsi défini s'appelle "*Vecteur de Poisson*". Il nous permet de simplifier l'écriture :

$$\begin{aligned} x_1\ \dot{\vec{1}}_{x_1} + y_1\ \dot{\vec{1}}_{y_1} + z_1\ \dot{\vec{1}}_{z_1} &= x_1\left(\vec{\omega}_P \times \vec{1}_{x_1}\right) + y_1\left(\vec{\omega}_P \times \vec{1}_{y_1}\right) + z_1\left(\vec{\omega}_P \times \vec{1}_{z_1}\right) \\ &= \vec{\omega}_P \times \left(x_1\ \vec{1}_{x_1} + y_1\ \vec{1}_{y_1} + z_1\ \vec{1}_{z_1}\right) \\ &= \vec{\omega}_P \times \overrightarrow{O_1 M} \end{aligned}$$

Dès lors l'écriture de la vitesse absolue devient :

$$\boxed{\vec{v}_{M\,a} = \underbrace{\vec{v}_{O_1} + \vec{\omega}_P \times \overrightarrow{O_1 M}}_{\substack{\vec{v}_{M\,e} \\ vitesse\ d'entra\hat{i}nement}} + \underbrace{\left(\dot{x}_1\ \vec{1}_{x_1} + \dot{y}_1\ \vec{1}_{y_1} + \dot{z}_1\ \vec{1}_{z_1}\right)}_{\substack{\vec{v}_{M\,r} \\ vitesse\ relative}}}$$

On peut également démontrer que :

Le vecteur de Poisson $\vec{\omega}_P$ est le vecteur vitesse angulaire de rotation du trièdre mobile par rapport au trièdre fixe.

Cette affirmation ne sera ***pas démontrée*** ici.

<u>Application 7-8.1.</u> Déterminons le vecteur de Poisson de la base mobile ($\vec{1}_r$; $\vec{1}_\theta$; $\vec{1}_\varphi$) positionné sur un point M à la surface de la terre.

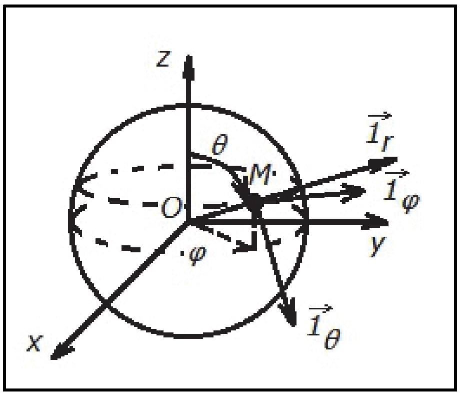


fig. 7-8.5. *- Application 7-8.1.*

Solution :
Cela revient à chercher l'expression du vecteur de Poisson d'un système d'axes en coordonnées sphériques.

Positionnement des repères

Soit :
- Oxyz positionné au centre de la terre;
- rθφ en M avec $\vec{1}_r$ passant par le centre O.

Vecteur de Poisson

Le vecteur de Poisson s'exprime par :

$$\vec{\omega}_P = \omega_{P\,r}\,\vec{1}_r + \omega_{P\,\theta}\,\vec{1}_\theta + \omega_{P\,\varphi}\,\vec{1}_\varphi$$

Recherchons chaque terme :

- $\vec{1}_r = \sin\theta\,\vec{1}_u + \cos\theta\,\vec{1}_z$

  avec : $\vec{1}_u = \cos\varphi\,\vec{1}_x + \sin\varphi\,\vec{1}_y$

  $\vec{1}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{1}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{1}_y + \cos\theta\,\vec{1}_z$
- $\vec{1}_\theta = \cos\theta\,\vec{1}_u - \sin\theta\,\vec{1}_z$

  $\vec{1}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{1}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{1}_y - \sin\theta\,\vec{1}_z$
- $\vec{1}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{1}_x + \cos\varphi\,\vec{1}_y$

Les trois composantes ($\omega_{P\,r}$; $\omega_{P\,\theta}$; $\omega_{P\,\varphi}$) peuvent être déterminées en vérifiant les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \omega_{P\,r} = \dot{\vec{1}}_\theta \bullet \vec{1}_\varphi \\ \omega_{P\,\theta} = \dot{\vec{1}}_\varphi \bullet \vec{1}_r \\ \omega_{P\,\varphi} = \dot{\vec{1}}_r \bullet \vec{1}_\theta \end{cases}$$

D'où :

- $$\begin{cases} \dot{\vec{1}}_r = \left(\cos\theta\,\dot{\theta}\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi\,\dot{\varphi}\right)\vec{1}_x + \left(\cos\theta\,\dot{\theta}\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right)\vec{1}_y \\ \qquad + \left(-\sin\theta\,\dot{\theta}\right)\vec{1}_z \end{cases}$$

$$\blacktriangleright \begin{cases} \dot{\vec{1}}_\theta = \left(-\sin\theta\,\dot\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\,\dot\varphi\right)\vec{1}_x + \left(-\sin\theta\,\dot\theta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\,\dot\varphi\right)\vec{1}_y \\ \qquad + \left(-\cos\theta\,\dot\theta\right)\vec{1}_z \end{cases}$$

$$\blacktriangleright \left\{ \dot{\vec{1}}_\varphi = \left(-\cos\varphi\,\dot\varphi\right)\vec{1}_x + \left(-\sin\varphi\,\dot\varphi\right)\vec{1}_y \right.$$

$$\begin{cases} \omega_{P\,r} = \dot{\vec{1}}_\theta \bullet \vec{1}_\varphi = \dot\varphi\cos\theta \\ \omega_{P\,\theta} = \dot{\vec{1}}_\varphi \bullet \vec{1}_r = -\dot\varphi\sin\theta \\ \omega_{P\,\varphi} = \dot{\vec{1}}_r \bullet \vec{1}_\theta = \dot\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \vec\omega_P &= \dot\varphi\cos\theta\,\vec{1}_r - \dot\varphi\sin\theta\,\vec{1}_\theta + \dot\theta\,\vec{1}_\varphi \\ &= \dot\varphi\left(\cos\theta\,\vec{1}_r - \sin\theta\,\vec{1}_\theta\right) + \dot\theta\,\vec{1}_\varphi \\ &= \dot\varphi\,\vec{1}_z + \dot\theta\,\vec{1}_\varphi \end{aligned}$$

Cette dernière expression nous permet de constater que le vecteur de Poisson $\vec\omega_P$ apparaît comme la somme du vecteur $\dot\varphi\,\vec{1}_z$ exprimant la vitesse de rotation de la base mobile autour de $\vec{1}_z$ et du vecteur $\dot\theta\,\vec{1}_\varphi$ exprimant la vitesse de rotation de la base mobile autour de $\vec{1}_\varphi$. Cette somme exprime bien la vitesse angulaire de la base mobile dans le repère fixe.

7-8.4.2. <u>Vecteur accélération</u>

Contrairement à ce qu'on pourrait croire, l'accélération absolue $\vec{a}_{M\,a}$ ne va pas être "*simplement*" la somme d'une accélération relative $\vec{a}_{M\,r}$ et d'une accélération d'entraînement $\vec{a}_{M\,e}$. En effet, en dérivant la vitesse absolue $\vec{v}_{M\,a}$, on trouve :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{M\,a} &= \frac{d\vec{v}_{M_a}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_{O_1} + \vec\omega_P \times \overrightarrow{O_1M} + \left(\dot{x}_1\,\vec{1}_{x_1} + \dot{y}_1\,\vec{1}_{y_1} + \dot{z}_1\,\vec{1}_{z_1}\right)\right) \\ &= \vec{a}_{O_1} + \left(\dot{\vec\omega}_P \times \overrightarrow{O_1M} + \vec\omega_P \times \dot{\overrightarrow{O_1M}}\right) + \left(\ddot{x}_1\,\vec{1}_{x_1} + \ddot{y}_1\,\vec{1}_{y_1} + \ddot{z}_1\,\vec{1}_{z_1}\right) \\ &\quad + \left(\dot{x}_1\,\dot{\vec{1}}_{x_1} + \dot{y}_1\,\dot{\vec{1}}_{y_1} + \dot{z}_1\,\dot{\vec{1}}_{z_1}\right) \end{aligned}$$

Or, par ***§ 8.2.1.*** et ***§ 8.2.2.***, on sait que :

$$\dot{\overrightarrow{O_1M}} = \vec\omega_P \times \overrightarrow{O_1M} + \vec{v}_{M\,r}$$

et que : $$\left.\begin{cases} \dot{\vec{1}}_{x_1} = \vec\omega_P \times \vec{1}_{x_1} \\ \dot{\vec{1}}_{y_1} = \vec\omega_P \times \vec{1}_{y_1} \\ \dot{\vec{1}}_{z_1} = \vec\omega_P \times \vec{1}_{z_1} \end{cases}\right\rangle \Rightarrow \quad \dot{x}_1\,\dot{\vec{1}}_{x_1} + \dot{y}_1\,\dot{\vec{1}}_{y_1} + \dot{z}_1\,\dot{\vec{1}}_{z_1} = \vec\omega_P \times \vec{v}_{M\,r}$$

de plus, posons $\dot{\vec{\omega}}_P = \vec{\varepsilon}_P$: l'écriture de $\vec{a}_{M\,a}$ devient :

$$\vec{a}_{M\,a} = \vec{a}_{O_1} + \vec{\varepsilon}_P \times \overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega}_P \times \left(\vec{\omega}_P \times \overrightarrow{O_1M} \right) + \vec{\omega}_P \times \vec{v}_{M\,r}$$

$$+ \left(\ddot{x}_1\, \vec{1}_{x_1} + \ddot{y}_1\, \vec{1}_{y_1} + \ddot{z}_1\, \vec{1}_{z_1} \right) + \vec{\omega}_P \times \vec{v}_{M\,r}$$

$$\boxed{\vec{a}_{M\,a} = \underbrace{\vec{a}_{O_1} + \vec{\varepsilon}_P \times \overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega}_P \times \left(\vec{\omega}_P \times \overrightarrow{O_1M} \right)}_{\substack{\vec{a}_{M\,e} \\ accélération\ d'entraînement}} + \underbrace{\left(\ddot{x}_1\, \vec{1}_{x_1} + \ddot{y}_1\, \vec{1}_{y_1} + \ddot{z}_1\, \vec{1}_{z_1} \right)}_{\substack{\vec{a}_{M\,r} \\ accélération\ relative}} + \underbrace{2\, \vec{\omega}_P \times \vec{v}_{M\,r}}_{\substack{\vec{a}_{M\,Cor} \\ accélération\ de\ Coriolis}}}$$

- *L'accélération d'entraînement* est l'accélération du point M considéré comme fixe dans le trièdre mobile.
- *L'accélération relative* est l'accélération du point M par rapport au trièdre mobile.

Mais l'accélération absolue ne se réduit pas aux seuls termes $\vec{a}_{M\,e}$ et $\vec{a}_{M\,r}$ comme le montre la formule ci-avant; il intervient un troisième terme, $\vec{a}_{M\,Cor}$, dite "*accélération complémentaire ou de Coriolis* (3) ".

Application 7-8.2. Déterminer l'accélération du point M ayant pour coordonnées cylindriques (ρ; θ; ρz) dans le repère mobile Orφz dont la vitesse de rotation est $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\, \vec{1}_z$.

Solution :

Choix des repères

Le repère mobile $\left\{ \vec{1}_\rho ; \vec{1}_\varphi ; \vec{1}_z \right\}$ tourne à la vitesse $\dot{\varphi}$ autour de l'axe Oz.

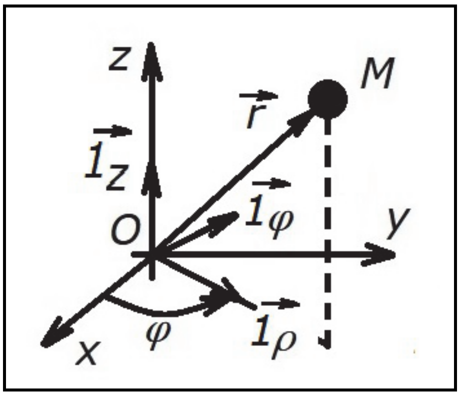


fig. 7-8.6. - *Application 7-8.2.*

Calcul de l'accélération :

$$\vec{a}_{M\,a} = \vec{a}_{O_1} + \vec{\varepsilon}_P \times \overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega}_P \times \left(\vec{\omega}_P \times \overrightarrow{O_1M} \right)$$

$$+ \vec{a}_{M\,r} + 2\, \vec{\omega}_P \times \vec{v}_{M\,r}$$

- $\vec{a}_{O_1} = \vec{0}$
- $\vec{\omega}_P = \dot{\varphi}\, \vec{1}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{\varepsilon}_P = \ddot{\varphi}\, \vec{1}_z$
- $\overrightarrow{O_1M} = \rho\, \vec{1}_\rho + z\, \vec{1}_z$

---

(3) *Coriolis Gaspard-Gustave (1792 [Paris] - 1843 [Paris]) : mathématicien et ingénieur français.*

- $v_{M\,r} = \dot{\rho}\,\vec{1}_\rho + \dot{z}\,\vec{1}_z$
- $\vec{a}_{M\,r} = \ddot{\rho}\,\vec{1}_\rho + \ddot{z}\,\vec{1}_z$

$$\vec{a}_{M\,a} = \left(\vec{0} + \rho\,\ddot{\varphi}\,\vec{1}_\varphi - \rho\,\dot{\varphi}^2\,\vec{1}_\rho\right) + \left(\ddot{\rho}\,\vec{1}_\rho + \ddot{z}\,\vec{1}_z\right) + \left(2\,\rho\,\dot{\varphi}\,\vec{1}_\varphi\right)$$

$$= \left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{1}_\rho + \left(\rho\,\ddot{\varphi} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\varphi}\right)\vec{1}_\varphi + \ddot{z}\,\vec{1}_z$$

Application 7-8.3. Déterminons l'accélération du point M ayant pour coordonnée (r; 0; 0) dans le repère mobile ($\vec{1}_r$; $\vec{1}_\theta$; $\vec{1}_\varphi$) dont la vitesse de rotation est donnée par :

$\vec{\omega}_P = \dot{\varphi}\left(\cos\theta\,\vec{1}_r - \sin\theta\,\vec{1}_\theta\right) + \dot{\theta}\,\vec{1}_\varphi$

(Voir application chiffrée ***7-8.1.***)

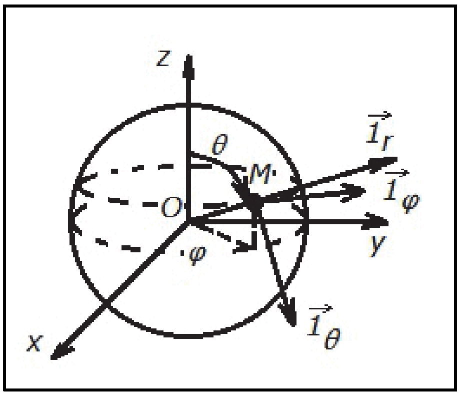


fig. 7-8.7. - Application 7-8.3.

Solution :

Positionnement des repères

Soit :

- Oxyz positionné au centre de la terre;
- $\left\{\vec{1}_r ; \vec{1}_\theta ; \vec{1}_\varphi\right\}$ en M avec $\vec{1}_r$ passant par le centre O.

Mouvement simple du point

Position :

$$\vec{r} = r\,\vec{1}_r$$

Vitesse :

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{1}_r + r\,\dot{\vec{1}}_r$$

avec (voir ***éq. 7-8.?.***) :

$$\dot{\vec{1}}_r = \vec{\omega}_P \times \vec{1}_r = \begin{vmatrix} \vec{1}_r & \vec{1}_\theta & \vec{1}_\varphi \\ \dot{\varphi}\cos\theta & -\dot{\varphi}\sin\theta & \dot{\theta} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \dot{\theta}\,\vec{1}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{1}_\varphi$$

d'où :

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{1}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{1}_\theta + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{1}_\varphi$$

Accélération :

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r}\,\vec{1}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{1}}_r\right) + \left(\left(\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\vec{1}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\dot{\vec{1}}_\theta\right)$$

$$+ \left(\left(\dot{r}\,\dot{\varphi}\sin\theta + r\,\ddot{\varphi}\sin\theta + r\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{1}_\varphi + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\,\dot{\vec{1}}_\varphi\right)$$

avec (voir ***éq. 7-8.?.***) :

$$\dot{\vec{1}}_r = \vec{\omega}_P \times \vec{1}_r = \dot{\theta}\,\vec{1}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{1}_\varphi$$

$$\dot{\vec{1}}_\theta = \vec{\omega}_P \times \vec{1}_\theta = -\dot{\theta}\,\vec{1}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{1}_\varphi$$

$$\dot{\vec{1}}_\varphi = \vec{\omega}_P \times \vec{1}_\varphi = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{1}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{1}_\theta$$

d'où :

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\,\dot{\varphi}^2\,\sin^2\theta\right)\vec{1}_r + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta} - r\,\dot{\varphi}^2\,\cos\theta\,\sin\theta\right)\vec{1}_\theta$$
$$+ \left(r\,\ddot{\varphi}\,\sin\theta + 2\,r\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\cos\theta + 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi}\,\sin\theta\right)\vec{1}_\varphi$$

7-8.4.3. Accélérations normale et tangentielle. Trièdre de Frenet.

Pour un point M décrivant une trajectoire curviligne plane, dont l'accélération est $\vec{a}_M$ (***fig. 7-8.8.***) on peut envisager de décomposer $\vec{a}_M$ en une composante tangentielle $\vec{a}_{M\,t}$ (parallèle au vecteur $\vec{1}_t$) appelée "***accélération tangentielle***", et une composante normale $\vec{a}_{M\,n}$ (suivant $\vec{1}_n$, perpendiculaire à $\vec{1}_t$) appelée "***accélération normale***".

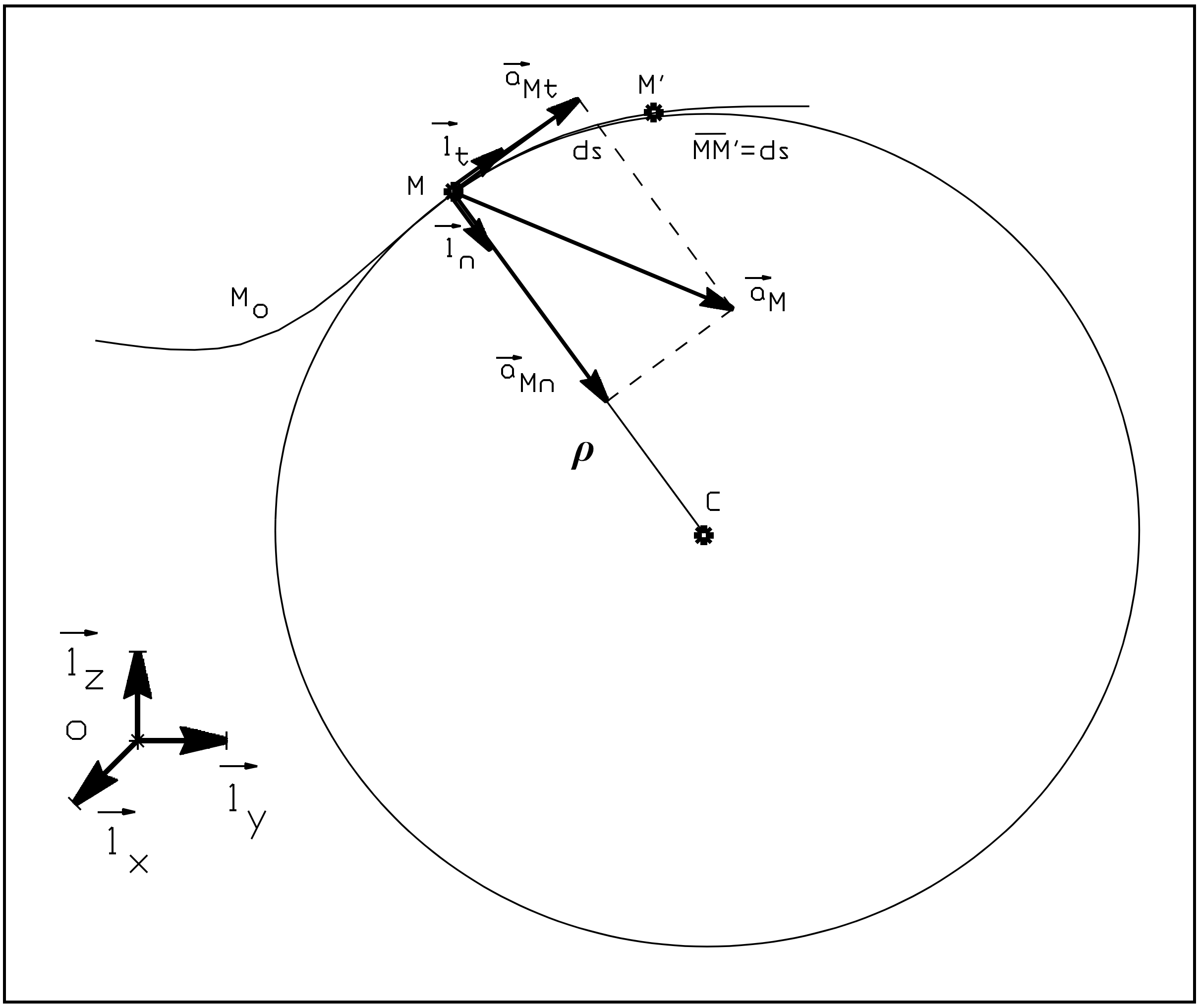


fig. 7-8.8. *- Trièdre de Frenet : accélération tangentielle et normale.*

Chacune de ces composantes a une signification physique bien précise : quand M se déplace, le module de sa vitesse $\vec{v}_M$ peut changer, et ce changement est relié à l'accélération tangentielle; la direction de la vitesse change également, et ce changement est relié à l'accélération normale. On sait, par ***§ 7.1.3.A.***, que :

$$\vec{v}_M = \frac{ds}{dt}\,\vec{1}_t = \left\|\vec{v}_M\right\|\,\vec{1}_t$$

dont on déduit l'accélération :

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\left(\|\vec{v}_M\|\,\vec{1}_t\right)}{dt} = \frac{d\|\vec{v}_M\|}{dt}\,\vec{1}_t + \|\vec{v}_M\|\,\frac{d\vec{1}_t}{dt}$$

$$\vec{a}_M = \frac{d\|\vec{v}_M\|}{dt}\,\vec{1}_t + \|\vec{v}_M\|\,\frac{d\vec{1}_t}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \frac{d\|\vec{v}_M\|}{dt}\,\vec{1}_t + \|\vec{v}_M\|^2\,\frac{d\vec{1}_t}{ds}$$

$$\boxed{\vec{a}_M = \frac{dv_M}{dt}\,\vec{1}_t + \frac{v_M^2}{\rho}\,\vec{1}_n = a_{M_t}\;\vec{1}_t + a_{M_n}\;\vec{1}_n}$$

et

$$\boxed{\|\vec{a}_M\| = \sqrt{\left(\frac{dv_M}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v_M^2}{\rho}\right)^2} = \sqrt{\ddot{s}^2 + \frac{\dot{s}^4}{\rho^2}}}$$

<u>Remarque</u> :
Si le mouvement est rectiligne, on a $\rho = \infty$ et $a_{M\,n} = 0$; l'accélération $\vec{a}_M$ se réduit à sa seule composante $a_{M\,t}$, sur la droite support de la trajectoire.

Le terme $a_{M\,t}$ correspond bien à la dérivée par rapport au temps de la grandeur du vecteur vitesse; le terme $a_{M\,n}$ est normal à la courbe, et est associé au changement de direction, car il correspond à $\dfrac{d\vec{1}_n}{dt}$.

<u>Remarque</u> :
A chaque point d'une trajectoire curviligne on peut associer un ***"trièdre de Frenet"*** [(4)] composé de $\vec{1}_t$, $\vec{1}_n$ et $\vec{1}_b$ (avec $\vec{1}_b = \vec{1}_t \times \vec{1}_n$).
Ce trièdre de Frenet est très largement utilisé en mathématiques pour définir les notions de plan et de cercles osculateurs, courbure, torsion ... au point M de la courbe donnée.
On peut notamment démontrer que le rayon de courbure d'une courbe plane donnée par les équations $x = f_1(t)$ et $y = f_2(t)$ vaut :

$$\boxed{\rho = \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}{\left|\dot{x}\,\ddot{y} - \dot{y}\,\ddot{x}\right|} = \frac{\|\vec{v}_M\|^3}{\left|v_x\,a_y - v_y\,a_x\right|}}$$

[(4)] *Frenet Jean-Frédéric (1816 [Périgueux] - 1900 [Périgueux]) : mathématicien, astronome et météorologue français.*

7-8.5. ***Mouvement simple du point***

A) *Mouvement uniforme*

Le mouvement d'un point est uniforme si sa vitesse scalaire est constante :

$$\left\|\dot{\vec{r}}\right\| = constante$$

B) *Mouvement rectiligne*

Le mouvement d'un point est rectiligne si la trajectoire est un segment de droite. Dès lors, l'accélération normale :

$$\vec{a}_n = \vec{0}$$

C) *Mouvement uniformément accéléré*

Le mouvement d'un point est uniformément accéléré si le vecteur accélération est constant.

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}$$

$$\dot{\vec{r}} = \int \ddot{\vec{r}} = \vec{a}\, t + \vec{C}_1$$

$$\vec{r} = \int \dot{\vec{r}} = \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2 + \vec{C}_1\, t + \vec{C}_2$$

Les constantes d'intégration sont à déterminer en fonction des conditions initiales.

La trajectoire d'un mouvement uniformément accéléré est une parabole d'axe parallèle à l'accélération $\vec{a}$ dans le plan défini par les vecteurs $\dot{\vec{r}}_{(t=0)} = \vec{v}_0$ et $\vec{a}$.

D) *Mouvement oscillatoire harmonique*

L'observation du mouvement d'une masse suspendue à un ressort par exemple montre qu'en l'absence de frottement, et pour de petits déplacements, l'évolution est décrite par l'équation :

$$x(t) = A \sin(\omega\, t + \varphi)$$

- A est appelé l' ***"amplitude"*** de la vibration harmonique;
- φ est l' ***"angle de phase"***;
- on appelle ω ***"la pulsation"*** (en *rad/s*).

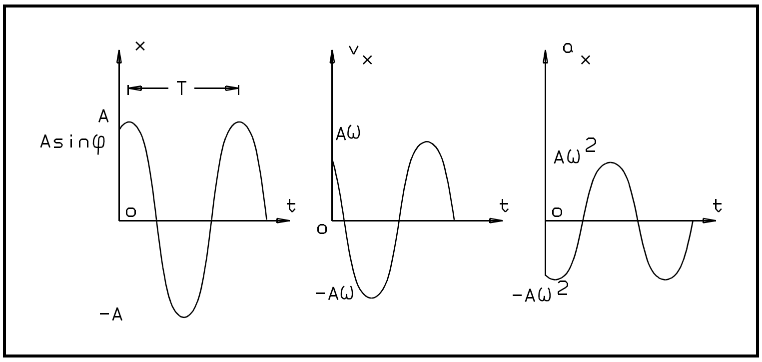


fig. 7-8.9. *- Mouvement rectiligne harmonique : position, vitesse et accélération.*

E) *Mouvement circulaire*

Le mouvement d'un point est circulaire si la trajectoire est un arc de cercle.

En introduisant le trièdre mobile $\left(\vec{1}_r, \vec{1}_\varphi, \vec{1}_z\right)$ tournant à une vitesse angulaire $\dot{\varphi}\,\vec{1}_z$, la position du point à l'instant t est donnée par :

$$\vec{r} = r\,\vec{1}_r + z\,\vec{1}_z$$

avec r et z constants (voir ***fig. 7-8.6.***)

Dès lors le vecteur vitesse devient :

$$\dot{\vec{r}} = r\,\dot{\varphi}\,\vec{1}_\varphi$$

et le vecteur accélération :

$$\ddot{\vec{r}} = -\,r\,\dot{\varphi}^2\,\vec{1}_r + r\,\ddot{\varphi}\,\vec{1}_\varphi$$

expression dans laquelle $-\,r\,\dot{\varphi}^2$ est la composante *centripète* de l'accélération et $r\,\ddot{\varphi}$ la composante *tangentielle*.

Si en outre, la condition $\dot{\varphi} = constante$ est vérifiée nous parlerons du *mouvement circulaire uniforme* pour lequel le vecteur vitesse change de direction mais conserve sa grandeur :

$$\dot{\vec{r}} = r\,\dot{\varphi}\,\vec{1}_\varphi \quad \text{avec :} \quad \left\|\dot{\vec{r}}\right\| = constante$$

L'accélération se réduit à l'accélération radiale :

$$\ddot{\vec{r}} = -\,r\,\dot{\varphi}^2\,\vec{1}_r$$

Nous vérifions la relation suivante entre l'accélération et la vitesse :

$$\left\|\vec{a}\,\right\| = \left\|\vec{a}_n\right\| = \left\|\ddot{\vec{r}}\right\| = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(r\,\dot{\varphi}\right)^2}{r}$$

F) *Mouvement hélicoïdal*

Les équations du mouvement hélicoïdal peuvent être obtenues de façon analogue à celles relatives au mouvement circulaire (r constant) en relâchant la contrainte $z = constante$.

$$\vec{r} = r\,\vec{1}_r + z\,\vec{1}_z$$

$$\dot{\vec{r}} = r\,\dot{\varphi}\,\vec{1}_\varphi + z\,\vec{1}_z$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\,r\,\dot{\varphi}^2\,\vec{1}_r + r\,\ddot{\varphi}\,\vec{1}_\varphi + \ddot{z}\,\vec{1}_z$$