

<i>CHAPITRE 8. MOUVEMENT COMPOSE DU POINT</i> .....	<b>- 8.1 -</b>
<i>8.1. Mouvement relatif, d'entraînement et absolu</i> .....	<b>- 8.1 -</b>
8.1.1. <i>Introduction</i> .....	<b>- 8.1 -</b>
8.1.2. <i>Définitions</i> .....	<b>- 8.1 -</b>
<b>A) Le mouvement absolu</b> .....	<b>- 8.2 -</b>
<b>B) Le mouvement relatif</b> .....	<b>- 8.2 -</b>
<b>C) Le mouvement d'entraînement</b> .....	<b>- 8.2 -</b>
<i>8.2. Composition des vitesses</i> .....	<b>- 8.3 -</b>
8.2.1. <i>Etude analytique</i> .....	<b>- 8.3 -</b>
8.2.2. <i>Expression vectorielle</i> .....	<b>- 8.3 -</b>
8.2.3. <i>Conseils pour le choix du trièdre mobile</i> .....	<b>- 8.6 -</b>
<i>8.3. Composition des accélérations</i> .....	<b>- 8.8 -</b>
8.3.1. <i>Etude analytique et vectorielle</i> .....	<b>- 8.8 -</b>
8.3.2. <i>Cas particuliers</i> .....	<b>- 8.12 -</b>
<i>8.4. Mouvement par rapport à la terre</i> .....	<b>- 8.15 -</b>
8.4.1. <i>Description du référentiel lié à la terre</i> .....	<b>- 8.15 -</b>
8.4.2. <i>Accélération "centrifuge"</i> .....	<b>- 8.16 -</b>
8.4.3. <i>Accélération de Coriolis</i> .....	<b>- 8.17 -</b>
<b>A) Chute d'un corps</b> .....	<b>- 8.17 -</b>
<b>B) Mouvement parallèle à la surface terrestre</b> .....	<b>- 8.20 -</b>
<b>C) Pendule de Foucault (Expérience de 1851)</b> .....	<b>- 8.20 -</b>

## CHAPITRE 8. MOUVEMENT COMPOSÉ DU POINT

### 8.1. Mouvement relatif, d'entraînement et absolu

#### 8.1.1. Introduction

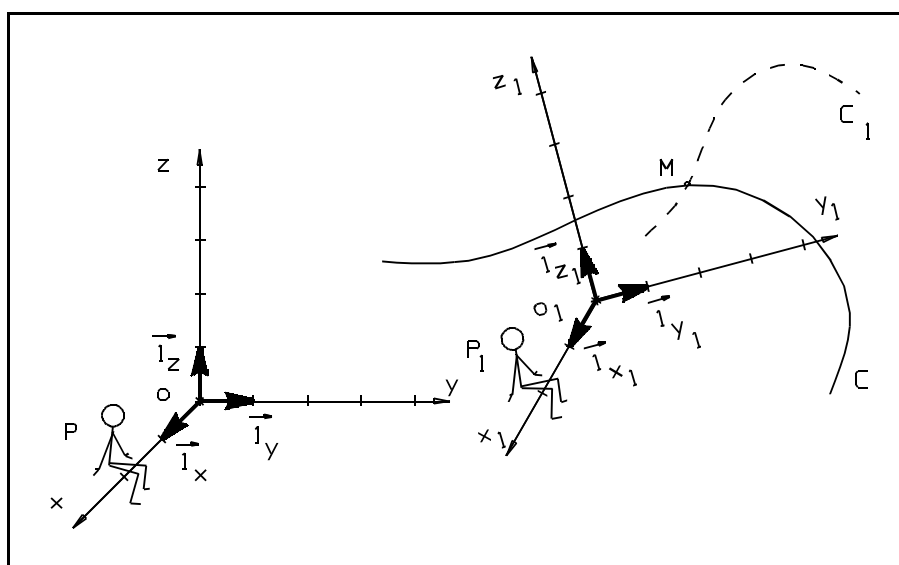
La pratique nous montre que les mouvements usuels sont loin d'être des "*mouvements simples*" rectilignes ou circulaires. Ils sont, dans la plupart des cas, la résultante de plusieurs mouvements simultanés.

Par exemple, le mouvement (complexe !) décrit par un insecte gravissant le levier d'un pendule, résulte de la "*combinaison*" d'un mouvement circulaire du pendule avec un mouvement rectiligne de l'insecte par rapport au levier du pendule; quant au mouvement de l'extrémité d'une pale d'hélice d'avion, il peut également s'étudier à partir du mouvement rectiligne de l'avion, et du mouvement circulaire de l'hélice, par rapport à l'avion, mais suivant une autre "*combinaison*" que dans le premier exemple...

Ainsi, on peut envisager de "*décomposer*" le mouvement d'un point en deux mouvements plus simples et d'étude plus facile, grâce à l'introduction d'un trièdre de référence supplémentaire, mobile, qui se déplace de façon déterminée par rapport au trièdre initial, considéré conventionnellement comme fixe (la possibilité de définir un trièdre "*absolument fixe*" devra être approfondie dans le cadre de la dynamique du point).

#### 8.1.2. Définitions

Considérons un trièdre fixe  $Oxyz$ , dans lequel se trouve un observateur  $P$  (**fig. 8.1.**).



**fig. 8.1.** - *Mouvement composé du point.*

Soit un point  $M$  animé d'un mouvement complexe (trajectoire  $C$ ) que  $P$  désire étudier. Prenons un trièdre mobile  $O_1x_1y_1z_1$ , animé d'un mouvement quelconque mais que nous choisirons de manière à y déterminer plus facilement le mouvement  $C_1$  de  $M$  que s'il fallait le déterminer directement dans  $Oxyz$ . Fixons dans  $O_1x_1y_1z_1$  un observateur  $P_1$ .

### A) Le mouvement absolu

C'est le mouvement de M par rapport à Oxyz. C'est le mouvement C que voit l'observateur P, à l'exclusion de tout autre mouvement. Pour utiliser une image, supposons que  $O_1x_1y_1z_1$  soit devenu "transparent" : P ne voit que le mouvement absolu de M.

### B) Le mouvement relatif

C'est le mouvement de M par rapport au trièdre mobile (ou relatif)  $O_1x_1y_1z_1$ . C'est le mouvement  $C_1$  que voit l'observateur  $P_1$  à l'exclusion de tout autre mouvement (celui de  $O_1x_1y_1z_1$  par exemple). Tout se passe comme si  $P_1$  en observant le mouvement ignore l'existence de P et ne se rend pas compte qu'il est lui-même en mouvement.

### C) Le mouvement d'entraînement

C'est le mouvement, par rapport au trièdre absolu Oxyz, du point M, immobilisé dans le trièdre mobile  $O_1x_1y_1z_1$ , et participant par conséquent au mouvement du trièdre mobile. Supposons pour cela que le point M soit lié rigidement au trièdre  $O_1x_1y_1z_1$  (il devient en quelque sorte un point du "solide  $O_1x_1y_1z_1$ "). Le point M est dès lors "entraîné" par  $O_1x_1y_1z_1$  dans son mouvement. (C'est en quelque sorte un mouvement absolu fictif puisque par la pensée nous immobilisons le point dans le trièdre mobile et nous le faisons "participer" au mouvement de  $O_1x_1y_1z_1$ ).

Nous aurons donc AU MOINS à définir les notions de vitesse absolue  $\vec{v}_{Ma}$  (vitesse de M dans son mouvement absolu), vitesse relative  $\vec{v}_{Mr}$  (vitesse de M dans son mouvement relatif), vitesse d'entraînement  $\vec{v}_{Me}$  (vitesse du point dans son mouvement d'entraînement), ainsi que les accélérations absolue  $\vec{a}_{Ma}$ , relative  $\vec{a}_{Mr}$ , d'entraînement  $\vec{a}_{Me}$ .

**Application 8.1.** Soit un point lié à une circonférence qui roule sans glisser sur un sol horizontal. Le système d'axes fixes Oxy est lié au sol. Le trièdre mobile  $O_1x_1y_1$  est lié au centre de la circonférence et reste parallèle à Oxy. Le mouvement absolu est la cycloïde décrite par M dans Oxy. Le mouvement relatif est un mouvement circulaire de M centré sur  $O_1$ . Le mouvement d'entraînement est le mouvement de M considéré immobile dans  $O_1x_1y_1$ ; il décrirait alors une droite parallèle à l'axe Ox.

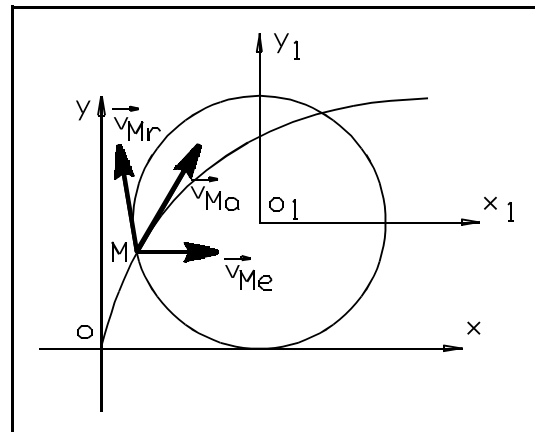


fig. 8.2. - Application 8.1.

## 8.2. Composition des vitesses

### 8.2.1. Etude analytique

Soit M, point mobile dans  $O_1x_1y_1z_1$  trièdre lui-même en mouvement par rapport à Oxyz (**fig. 8.3.**)

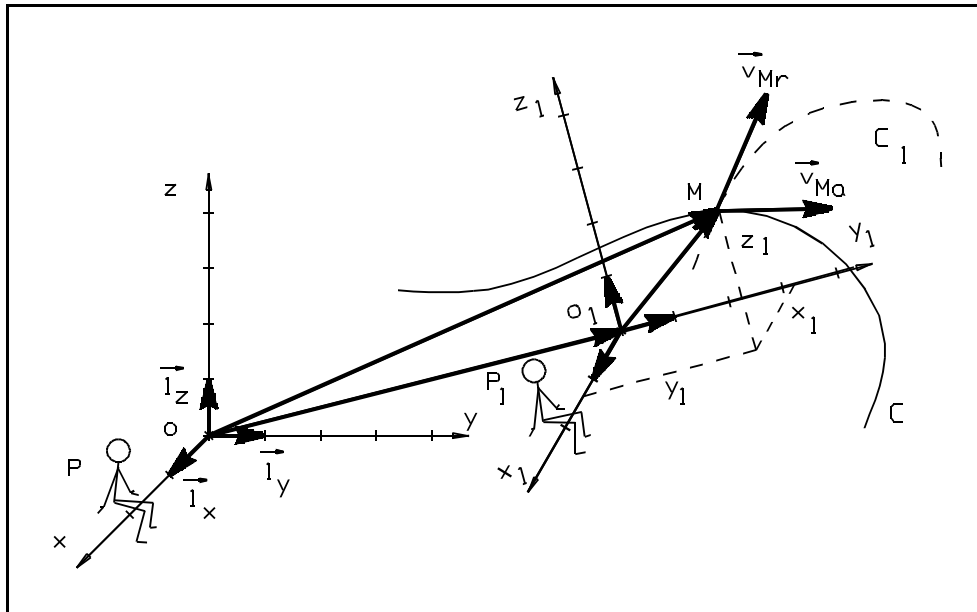


fig. 8.3. - Composition des vitesses.

Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{OO}_1 + \vec{O}_1M \\ &= \vec{OO}_1 + (x_1 \vec{i}_{x_1} + y_1 \vec{i}_{y_1} + z_1 \vec{i}_{z_1}) \\ \underbrace{\vec{v}_{Ma}}_{\text{vitesse absolue}} &= \dot{\vec{r}} = \underbrace{\dot{\vec{OO}}_1 + (x_1 \dot{\vec{i}}_{x_1} + y_1 \dot{\vec{i}}_{y_1} + z_1 \dot{\vec{i}}_{z_1})}_{\text{vitesse d'entraînement}} + \underbrace{(\dot{x}_1 \vec{i}_{x_1} + \dot{y}_1 \vec{i}_{y_1} + \dot{z}_1 \vec{i}_{z_1})}_{\text{vitesse relative}} \end{aligned}$$

Vitesse d'entraînement : correspond à la vitesse du point, immobile par rapport au système d'axe mobile  $O_1x_1y_1z_1$ , par rapport au repère fixe Oxyz

Vitesse relative : correspondant à la vitesse telle qu'elle serait observée sur  $C_1$  par un spectateur fixé dans  $O_1x_1y_1z_1$ .

### 8.2.2. Expression vectorielle

Dans l'écriture de la vitesse d'entraînement interviennent les vecteurs  $\dot{\vec{i}}_{x_1}$ ,  $\dot{\vec{i}}_{y_1}$  et  $\dot{\vec{i}}_{z_1}$  traduisant le fait que  $O_1x_1y_1z_1$  est un trièdre mobile dont l'orientation change (système d'axes tournant).

Par analogies avec les équations **éq. 7.289** et **éq. 7.356**, on recherche un vecteur  $\vec{\omega}_P (\omega_{Px}, \omega_{Py}, \omega_{Pz})$  tel que :

$$\begin{cases} \dot{\vec{I}}_{x_1} = \vec{\omega}_P \times \vec{I}_{x_1} \\ \dot{\vec{I}}_{y_1} = \vec{\omega}_P \times \vec{I}_{y_1} \\ \dot{\vec{I}}_{z_1} = \vec{\omega}_P \times \vec{I}_{z_1} \end{cases}$$

Concentrons-nous sur la première équation :

$$\dot{\vec{I}}_{x_1} = \vec{\omega}_P \times \vec{I}_{x_1} = \omega_{Pz} \vec{I}_{y_1} - \omega_{Py} \vec{I}_{z_1}$$

Cette expression a du sens puisque  $\dot{\vec{I}}_{x_1}$  est perpendiculaire à  $\vec{I}_{x_1}$ , donc  $\dot{\vec{I}}_{x_1}$  est une combinaison linéaire de  $\vec{I}_{y_1}$  et  $\vec{I}_{z_1}$ . On voit que  $\omega_{Pz}$  est la composante de  $\dot{\vec{I}}_{x_1}$  selon  $\vec{I}_{y_1}$ , ce qui s'écrit :

$$\omega_{Pz} = \dot{\vec{I}}_{x_1} \bullet \vec{I}_{y_1}$$

De manière analogue, on définit :

$$\omega_{Px} = \dot{\vec{I}}_{y_1} \bullet \vec{I}_{z_1}$$

$$\omega_{Py} = \dot{\vec{I}}_{z_1} \bullet \vec{I}_{x_1}$$

Le vecteur  $\vec{\omega}_P$  ainsi défini s'appelle "*Vecteur de Poisson*". Il nous permet de simplifier l'écriture :

$$\begin{aligned} x_1 \dot{\vec{I}}_{x_1} + y_1 \dot{\vec{I}}_{y_1} + z_1 \dot{\vec{I}}_{z_1} &= x_1 (\vec{\omega}_P \times \vec{I}_{x_1}) + y_1 (\vec{\omega}_P \times \vec{I}_{y_1}) + z_1 (\vec{\omega}_P \times \vec{I}_{z_1}) \\ &= \vec{\omega}_P \times (x_1 \vec{I}_{x_1} + y_1 \vec{I}_{y_1} + z_1 \vec{I}_{z_1}) \\ &= \vec{\omega}_P \times \vec{O}_1 M \end{aligned}$$

Dès lors l'écriture de la vitesse absolue devient :

$$\vec{v}_{Ma} = \underbrace{\vec{v}_{O_1} + \vec{\omega}_P \times \vec{O}_1 M}_{\vec{v}_{Me}} + \underbrace{(x_1 \dot{\vec{I}}_{x_1} + y_1 \dot{\vec{I}}_{y_1} + z_1 \dot{\vec{I}}_{z_1})}_{\vec{v}_{Mr}}$$

*vitesse d'entraînement*                      *vitesse relative*

On peut également démontrer que :

*Le vecteur de Poisson  $\vec{\omega}_P$  est le vecteur vitesse angulaire de rotation du trièdre mobile par rapport au trièdre fixe.*

Cette affirmation ne sera **pas démontrée** ici; elle sera simplement **vérifiée** par l'exemple qui suit.

Remarque :

On constate en général que la notion de vitesse d'entraînement est mal interprétée par les étudiants. On évitera le non-sens qui consiste à dire que la vitesse d'entraînement est la vitesse du trièdre mobile : on sait ce qu'est la vitesse d'un point, tandis que l'expression "vitesse d'un trièdre" n'a pas de signification. On évitera aussi de dire que la vitesse d'entraînement est celle de l'origine du repère mobile : cette affirmation généralement fautive ne devient vraie que si  $\vec{\omega}_p = \vec{0}$  ou si  $\vec{O}_1\vec{M} = \vec{0}$  ou si  $\vec{\omega}_p$  et  $\vec{O}_1\vec{M}$  sont parallèles. Enfin, il ne faut surtout pas interpréter  $\vec{\omega}_p$  comme l'éventuelle vitesse angulaire du vecteur position relative  $\vec{O}_1\vec{M}$  par rapport au système d'axes mobile.

**Application 8.2.** Le trièdre mobile  $O_1x_1y_1z_1$  tourne autour de son axe  $O_1z_1$ , suivant une loi  $\theta = f(t)$ . L'axe  $O_1z_1$  reste en permanence confondu avec l'axe  $Oz$  du trièdre fixe. Déterminer le vecteur de Poisson du trièdre mobile.

**Solution :**

Exprimons les vecteurs unitaires du repère  $O_1x_1y_1z_1$  dans le repère  $Oxyz$

$$\vec{1}_{x_1} = \cos\theta \vec{1}_x + \sin\theta \vec{1}_y$$

$$\vec{1}_{y_1} = -\sin\theta \vec{1}_x + \cos\theta \vec{1}_y$$

$$\vec{1}_{z_1} = \vec{1}_z$$

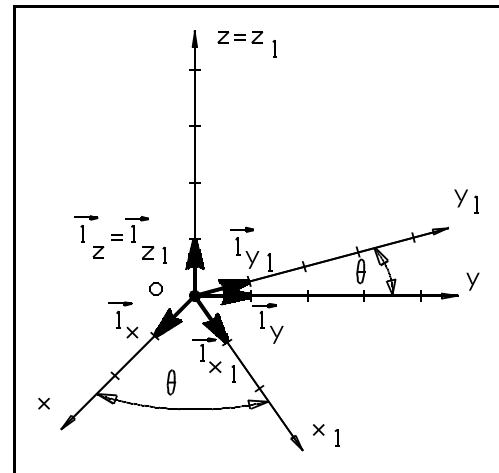


fig. 8.4. - Application 8.2.

Composantes des vecteurs de Poisson

$$\omega_{p_x} = \dot{\vec{1}}_{y_1} \cdot \vec{1}_{z_1} = (-\cos\theta \dot{\theta} \vec{1}_x - \sin\theta \dot{\theta} \vec{1}_y) \cdot \vec{1}_z = 0$$

$$\omega_{p_y} = \dot{\vec{1}}_{z_1} \cdot \vec{1}_{x_1} = \vec{0} \cdot \vec{1}_{x_1} = 0$$

$$\begin{aligned} \omega_{p_z} &= \dot{\vec{1}}_{x_1} \cdot \vec{1}_{y_1} = (-\sin\theta \dot{\theta} \vec{1}_x + \cos\theta \dot{\theta} \vec{1}_y) \cdot (-\sin\theta \vec{1}_x + \cos\theta \vec{1}_y) \\ &= (\sin^2\theta + \cos^2\theta) \dot{\theta} = \dot{\theta} \end{aligned}$$

et ainsi :

$$\vec{\omega}_p = \omega_{p_z} \vec{1}_{z_1} = \dot{\theta} \vec{1}_{z_1}$$

est bien le vecteur vitesse angulaire dans le mouvement de rotation effectué par  $O_1x_1y_1z_1$  par rapport au trièdre fixe  $Oxyz$ .

### 8.2.3. Conseils pour le choix du trièdre mobile

Ce choix est bien entendu crucial, souvent assez délicat. Il n'est guère possible de donner une recette infaillible pour ce choix. On peut cependant se laisser guider par certains critères dictés surtout par le bon sens.

- a) On ne peut jamais choisir un trièdre mobile tel que le point M soit immobile par rapport à ce trièdre (sinon il n'y aurait pas de mouvement relatif). En particulier, il ne faut jamais placer l'origine du trièdre mobile en permanence au point considéré M.
- b) Le trièdre mobile doit être choisi de manière à ce que le mouvement relatif puisse être facilement déterminé (ce critère peut présenter un inconvénient : le mouvement d'entraînement peut devenir alors assez compliqué).
- c) Le trièdre mobile peut être choisi de manière à ce que le mouvement d'entraînement puisse être facilement déterminé. Dans ce cas, le mouvement relatif peut s'avérer compliqué.

Comme on le voit, ces deux derniers critères sont contradictoires. *Enfin, la plupart du temps, on choisira le trièdre mobile de façon à pouvoir écrire facilement les composantes de  $\vec{\omega}_P$ , dans  $O_1x_1y_1z_1$  souvent d'ailleurs sans effectuer le moindre calcul.*

Remarque :

Il peut être opportun de préciser ici qu'il n'y a aucun paradoxe à représenter la vitesse  $\vec{v}_{Ma}$  par ses composantes dans  $O_1x_1y_1z_1$  et non dans  $Oxyz$  : cette vitesse est un vecteur, et au même titre que n'importe quel autre vecteur, il peut être rapporté à un trièdre arbitraire.

**Application 8.3.** Une porte tourne à la vitesse angulaire constante de  $1/4 \text{ tr/s}$  autour de ses charnières; un insecte  $M$  se déplace à vitesse scalaire  $v$  constante sur une diagonale de la porte (position initiale : le coin inférieur de la porte, du côté charnières). La porte a une largeur  $b$  et une hauteur  $h$ . Quelle est la vitesse absolue de l'insecte ?

**Solution :**

*Choix du trièdre mobile*

Soit  $O_1x_1y_1z_1$  lié à la porte.

*Recherche des différents termes de l'équation*

Par rapport au trièdre fixe  $Oxyz$ , on a :

$$\vec{\omega}_p = \frac{\pi}{2} \vec{I}_{z_1}$$

Le mouvement relatif de l'insecte s'écrit :

$$\vec{v}_{Mr} = v \cos \alpha \vec{I}_{x_1} + v \sin \alpha \vec{I}_{z_1}$$

Avec  $\alpha = \arctan \frac{h}{b}$  et

$$\begin{aligned} \vec{O}_1\vec{M} &= (v t \cos \alpha + C_1) \vec{I}_{x_1} \\ &\quad + (v t \sin \alpha + C_2) \vec{I}_{z_1} \\ (C_1 = C_2 = 0 \text{ conditions initiales}) \end{aligned}$$

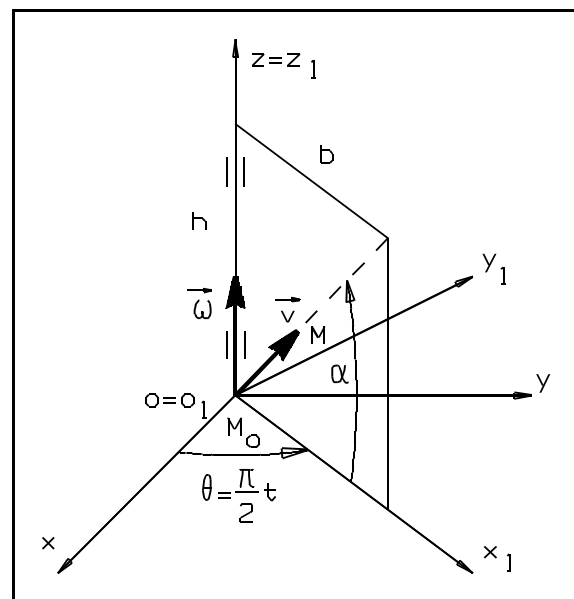


fig. 8.5. - Application 8.3.

*Equation de la vitesse*

Dès lors, on obtient :

$$\vec{v}_{Ma} = \vec{v}_{O_1} + \left( \vec{\omega}_p \times \vec{O}_1\vec{M} \right) + \vec{v}_{Mr}$$

$$\vec{v}_{Ma} = (\vec{0}) + \left( \frac{\pi}{2} t v \cos \alpha \vec{I}_{y_1} \right) + \left( v \cos \alpha \vec{I}_{x_1} + v \sin \alpha \vec{I}_{z_1} \right)$$



### 8.3. Composition des accélérations

#### 8.3.1. Etude analytique et vectorielle

Contrairement à ce qu'on pourrait croire, l'accélération absolue  $\vec{a}_{Ma}$  ne va pas être "simplement" la somme d'une accélération relative  $\vec{a}_{Mr}$  et d'une accélération d'entraînement  $\vec{a}_{Me}$ . En effet, en dérivant la vitesse absolue  $\vec{v}_{Ma}$ , on trouve :

$$\begin{aligned}\vec{a}_{Ma} &= \frac{d\vec{v}_{Ma}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega}_P \times \vec{O_1M} + (\dot{x}_1 \vec{I}_{x_1} + \dot{y}_1 \vec{I}_{y_1} + \dot{z}_1 \vec{I}_{z_1}) \right) \\ &= \vec{a}_{O_1} + \left( \dot{\vec{\omega}}_P \times \vec{O_1M} + \vec{\omega}_P \times \dot{\vec{O_1M}} \right) + (\ddot{x}_1 \vec{I}_{x_1} + \ddot{y}_1 \vec{I}_{y_1} + \ddot{z}_1 \vec{I}_{z_1}) \\ &\quad + (\dot{x}_1 \dot{\vec{I}}_{x_1} + \dot{y}_1 \dot{\vec{I}}_{y_1} + \dot{z}_1 \dot{\vec{I}}_{z_1})\end{aligned}$$

Or, par § 8.2.1. et § 8.2.2., on sait que :

$$\dot{\vec{O_1M}} = \vec{\omega}_P \times \vec{O_1M} + \vec{v}_{Mr}$$

et que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{I}}_{x_1} = \vec{\omega}_P \times \vec{I}_{x_1} \\ \dot{\vec{I}}_{y_1} = \vec{\omega}_P \times \vec{I}_{y_1} \\ \dot{\vec{I}}_{z_1} = \vec{\omega}_P \times \vec{I}_{z_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{x}_1 \dot{\vec{I}}_{x_1} + \dot{y}_1 \dot{\vec{I}}_{y_1} + \dot{z}_1 \dot{\vec{I}}_{z_1} = \vec{\omega}_P \times \vec{v}_{Mr}$$

de plus, posons  $\dot{\vec{\omega}}_P = \vec{\varepsilon}_P$  (même écriture qu'en § 7.3.3. A et B) : l'écriture de  $\vec{a}_{Ma}$  devient :

$$\begin{aligned}\vec{a}_{Ma} &= \vec{a}_{O_1} + \vec{\varepsilon}_P \times \vec{O_1M} + \vec{\omega}_P \times \left( \vec{\omega}_P \times \vec{O_1M} \right) + \vec{\omega}_P \times \vec{v}_{Mr} \\ &\quad + (\ddot{x}_1 \vec{I}_{x_1} + \ddot{y}_1 \vec{I}_{y_1} + \ddot{z}_1 \vec{I}_{z_1}) + \vec{\omega}_P \times \vec{v}_{Mr}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_{Ma} &= \underbrace{\vec{a}_{O_1} + \vec{\varepsilon}_P \times \vec{O_1M} + \vec{\omega}_P \times \left( \vec{\omega}_P \times \vec{O_1M} \right)}_{\vec{a}_{Me}} + \underbrace{(\ddot{x}_1 \vec{I}_{x_1} + \ddot{y}_1 \vec{I}_{y_1} + \ddot{z}_1 \vec{I}_{z_1})}_{\vec{a}_{Mr}} \\ &\quad + \underbrace{2 \vec{\omega}_P \times \vec{v}_{Mr}}_{\vec{a}_{MCor}}\end{aligned}$$

*accélération d'entraînement*                      *accélération relative*

*accélération de Coriolis*

- ▶ L'accélération d'entraînement est l'accélération du point M considéré comme fixe dans le trièdre mobile.
- ▶ L'accélération relative est l'accélération du point M par rapport au trièdre mobile.

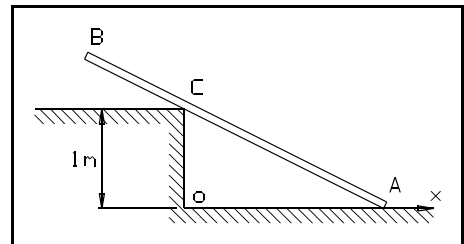
Mais l'accélération absolue ne se réduit pas aux seuls termes  $\vec{a}_{Me}$  et  $\vec{a}_{Mr}$  comme le montre la formule ci-avant; il intervient un troisième terme,  $\vec{a}_{MCor}$ , dite "accélération complémentaire ou de Coriolis (1)".

*L'accélération de Coriolis caractérise la variation de la vitesse relative du point dans le mouvement d'entraînement et la variation de la vitesse d'entraînement du point dans son mouvement relatif.*

Si un point a une vitesse relative, par exemple rectiligne constante, le fait de "tourner" (dû au mouvement d'entraînement) change le vecteur vitesse de ce point.

Si le point a un mouvement de rotation, par exemple constant (entraînement), le fait qu'il ait aussi une vitesse relative (par exemple rectiligne) modifie le vecteur vitesse aussi (le mouvement au lieu d'être circulaire est étiré, "elliptique").

**Application 8.4.** La barre  $\overline{AB}$  qui mesure 3 m de longueur se déplace en restant constamment appuyée en C sur un rouleau (considéré comme un appui ponctuel). L'extrémité A parcourt une trajectoire horizontale selon la loi  $x_A = 1 + t$  [m]. On demande de calculer  $\vec{v}_B$  et  $\vec{a}_B$  pour  $t = 1$  s.



**Solution :**

Données

$$\overline{AB} = 3 \text{ m}$$

$$x_A = 1 + t \text{ [m]}$$

Placement des repères

Soit Oxy confondu avec le sol et le mur.

Soit  $O_1x_1y_1$  se déplaçant parallèlement à Oxy, avec  $O_1$  confondu avec A.

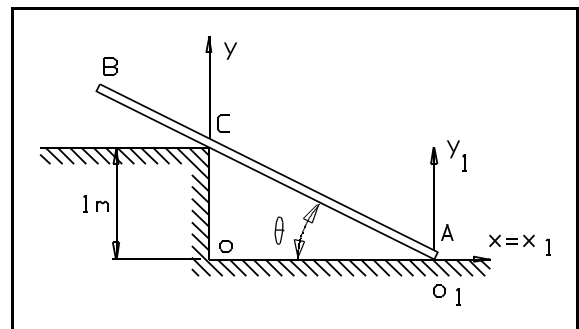


fig. 8.7. - Application 8.4.

Calcul de la vitesse du point B

$$\vec{v}_{Ba} = \underbrace{\vec{v}_{O_1} + \vec{\omega}_P \times \vec{O_1B}}_{\vec{v}_{Be}} + \underbrace{(\dot{x}_1 \vec{I}_{x_1} + \dot{y}_1 \vec{I}_{y_1} + \dot{z}_1 \vec{I}_{z_1})}_{\vec{v}_{Br}}$$

(1) Coriolis Gaspard-Gustave (1792 [Paris] - 1843 [Paris]) : mathématicien et ingénieur français.

- ▶  $\vec{v}_{O_1} = \vec{v}_A = \frac{dx_A}{dt} \vec{1}_{x_1} = \frac{d(1+t)}{dt} \vec{1}_{x_1} = \vec{1}_{x_1}$
- ▶  $\vec{\omega}_P = \vec{0}$  (le repère mobile est constamment parallèle au repère fixe)
- ▶  $\vec{O}_1 B = -\overline{AB} \cos \theta \vec{1}_{x_1} + \overline{AB} \sin \theta \vec{1}_{y_1} = -3 \cos \theta \vec{1}_{x_1} + 3 \sin \theta \vec{1}_{y_1}$

avec : 
$$\cos \theta = \frac{1+t}{\sqrt{1+(1+t)^2}} = \frac{1+t}{\sqrt{t^2+2t+2}}$$

et : 
$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{t^2+2t+2}}$$

d'où : 
$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{1+t}\right) \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

- ▶  $\vec{v}_{Br} = -\frac{d(\overline{AB} \cos \theta)}{dt} \vec{1}_{x_1} + \frac{d(\overline{AB} \sin \theta)}{dt} \vec{1}_{y_1} = 3 \dot{\theta} \sin \theta \vec{1}_{x_1} + 3 \dot{\theta} \cos \theta \vec{1}_{y_1}$

avec : 
$$\dot{\theta} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+t}\right)^2} \frac{-1}{(1+t)^2} = \frac{-1}{t^2+2t+2}$$

Remarque :

$\vec{v}_{Br}$  correspond, en fait, à un mouvement de rotation de B autour de  $O_1$ , soit :

$$\vec{v}_{Br} = \dot{\theta} \vec{1}_{z_1} \times \vec{O}_1 B$$
 qui donne évidemment le même résultat que précédemment.

et ainsi, on trouve :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{Ba} &= \left( 1 - \frac{3 \frac{1}{\sqrt{t^2+2t+2}}}{t^2+2t+2} \right) \vec{1}_{x_1} - \frac{3 \frac{1+t}{\sqrt{t^2+2t+2}}}{t^2+2t+2} \vec{1}_{y_1} \\ &= \left( 1 - \frac{3}{(t^2+2t+2)^{3/2}} \right) \vec{1}_{x_1} - \frac{3(1+t)}{(t^2+2t+2)^{3/2}} \vec{1}_{y_1} \end{aligned}$$

ce qui donne, pour  $t = 1 \text{ s}$  ( $\Rightarrow \theta = 26.57^\circ$ ) :

$$\vec{v}_{Ba} = 0.732 \vec{1}_{x_1} - 0.537 \vec{1}_{y_1} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{v}_{Ba}\| = 0.907 \text{ m/s}$$

Pour l'accélération, on peut écrire :

$$\vec{a}_{Ba} = \underbrace{\vec{a}_{O_1} + \vec{\varepsilon}_P \times \vec{O}_1 B + \vec{\omega}_P \times (\vec{\omega}_P \times \vec{O}_1 B)}_{\vec{a}_{Be}} + \underbrace{(\ddot{x}_1 \vec{1}_{x_1} + \ddot{y}_1 \vec{1}_{y_1} + \ddot{z}_1 \vec{1}_{z_1})}_{\vec{a}_{Br}} + \underbrace{2 \vec{\omega}_P \times \vec{v}_{Br}}_{\vec{a}_{BCor}}$$

- ▶  $\vec{a}_{O_1} = \dot{\vec{v}}_A = \vec{0}$
- ▶  $\vec{\varepsilon}_P = \dot{\vec{\omega}}_P = \vec{0}$

$$\blacktriangleright \vec{a}_{Br} = -\frac{d^2(\overline{AB} \cos \theta)}{dt^2} \vec{i}_{x_1} + \frac{d^2(\overline{AB} \sin \theta)}{dt^2} \vec{i}_{y_1}$$

ou :  $\vec{a}_{Br} = \ddot{\theta} \vec{i}_{z_1} \times \vec{O_1B} - \dot{\theta}^2 \vec{O_1B}$  (mouvement de rotation de B autour de  $O_1$ )

avec :  $\ddot{\theta} = \frac{2(t+1)}{(t^2 + 2t + 2)^2}$

et ainsi, on trouve :

$$\vec{a}_{Ba} = \vec{a}_{Br} = (3\ddot{\theta} \sin \theta + 3\dot{\theta}^2 \cos \theta) \vec{i}_{x_1} + (3\ddot{\theta} \cos \theta - 3\dot{\theta}^2 \sin \theta) \vec{i}_{y_1}$$

ce qui donne, pour  $t = 1$  s :

$$\dot{\theta} = \frac{-1}{5}; \ddot{\theta} = \frac{4}{25}; \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}; \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{a}_{Ba} = 0.322 \vec{i}_{x_1} + 0.376 \vec{i}_{y_1} \Rightarrow \|\vec{a}_{Ba}\| = 0.495 \text{ m/s}^2$$

**Application 8.5.** Exemple montrant la nécessité de l'accélération de Coriolis.

Soit un disque de rayon  $r$ , tournant à vitesse angulaire  $\omega_1$  constante autour de  $O$ . Sur la périphérie du disque court un insecte  $M$ , à la vitesse scalaire  $v$  constante. Que vaut l'accélération absolue de  $M$  ?

**Solution :**

Données

$$r, \omega_1, v.$$

Placement des repères

Soit  $O_1x_1y_1$  fixé à la roue.

Mouvements relatif, d'entraînement et absolu

$M$  décrit un mouvement circulaire, par rapport à  $O_1x_1y_1$ , à la vitesse angulaire :

$$\omega_2 = \frac{v}{r} \quad (\equiv \text{mouvement relatif})$$

Si  $M$  est bloqué dans  $O_1x_1y_1$ , il d'écrit un mouvement circulaire à vitesse angulaire :

$$\omega_1 \quad (\equiv \text{mouvement d'entraînement})$$

Le mouvement absolu de  $M$ , c'est de tourner, autour de  $O$ , à vitesse :

$$\omega_1 + \omega_2 \quad (\equiv \text{mouvement absolu})$$

Accélération relative, d'entraînement et absolue

Accélération relative :  $a_{Mr} = \omega_2^2 r$  (accélération normale uniquement)

Accélération d'entraînement :  $a_{Me} = \omega_1^2 r$  (accélération normale uniquement)

Accélération absolue :  $a_{Ma} = (\omega_1 + \omega_2)^2 r \neq a_{Mr} + a_{Me}$

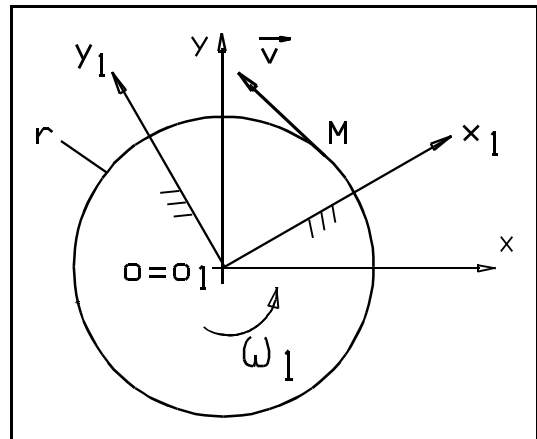


fig. 8.8. - Application 8.5.

Ce qui manque :

$$2 \omega_1 \omega_2 r = 2 (\omega_1 v) \quad \text{c'est l'accélération de Coriolis !}$$

---

### 8.3.2. Cas particuliers

- ▶ Si le mouvement d'entraînement est une translation, on a  $\vec{\omega}_p = \vec{0}$  ; dès lors :  
$$\vec{a}_{Ma} = \vec{a}_{Me} + \vec{a}_{Mr} ;$$
- ▶ Si le mouvement d'entraînement comporte une rotation dont le vecteur  $\vec{\omega}_p$  est parallèle à  $\vec{v}_{Mr}$ , alors  $2 \vec{\omega}_p \times \vec{v}_{Mr} = \vec{0}$  et donc :  $\vec{a}_{Ma} = \vec{a}_{Me} + \vec{a}_{Mr}$  ;
- ▶ Il ne faut pas oublier que  $\vec{a}_{Mr}$  peut résulter d'un mouvement circulaire instantané, qui donne lieu à des composantes :

$$\begin{cases} \vec{a}_{Mr \text{ normale}} = -\omega^2 \vec{O_1M} \\ \vec{a}_{Mr \text{ tangentielle}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{O_1M} \end{cases} \quad \{Réf. -7.29.-\}$$

formules dans lesquelles  $\omega$  et  $\vec{\varepsilon}$  se rapportent du mouvement relatif, à ne pas confondre avec  $\vec{\omega}_p$  et  $\vec{\varepsilon}_p$  du mouvement d'entraînement.

**Application 8.6.** Un carrousel est conçu de la manière suivante :

- ▶ un grand plateau circulaire tourne à vitesse  $\omega_1 = 2\pi \text{ rad/s}$  ;
- ▶ un petit plateau circulaire, de centre N, à distance  $a = 2 \text{ m}$  de O, de rayon  $b = 1 \text{ m}$ , tourne autour de son centre à vitesse  $\omega_2$ , en sens opposé à  $\omega_1$ .

Que doit valoir  $\omega_2$  pour que le point du petit disque situé géométriquement en C ait une vitesse nulle (roulement sans glissement sur le pointillé considéré comme fixe). Dans ce cas, que vaut la norme de l'accélération absolue d'un point du pourtour du petit plateau ? A-t-elle un maximum ?

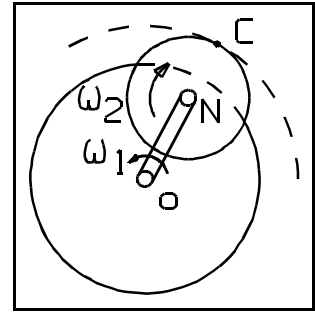


fig. 8.9. - Application 8.6.

**Solution :**

*Placement des repères*

Soit Oxy en O, et  $O_1x_1y_1$ , centré en N, et tel que  $O_1x_1$  reste confondu avec la barre  $\overline{ON}$ .

*Recherche des divers paramètres*

Suite au choix du repère, on peut écrire :

- ▶  $\vec{v}_{O_1} = \omega_1 a \vec{I}_{y_1} = 2\pi a \vec{I}_{y_1}$
- ▶  $\vec{\omega}_P = \omega_1 \vec{I}_{z_1} = 2\pi \vec{I}_{z_1}$
- ▶  $\theta = \omega_2 t$
- ▶  $\vec{O_1M} = b \cos(\omega_2 t) \vec{I}_{x_1} - b \sin(\omega_2 t) \vec{I}_{y_1}$
- ▶  $\vec{v}_{Mr} = -b \omega_2 \sin(\omega_2 t) \vec{I}_{x_1} - b \omega_2 \cos(\omega_2 t) \vec{I}_{y_1}$
- ▶  $\vec{\omega}_P \times \vec{O_1M} = \begin{vmatrix} \vec{I}_{x_1} & \vec{I}_{y_1} & \vec{I}_{z_1} \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ b \cos(\omega_2 t) & -b \sin(\omega_2 t) & 0 \end{vmatrix} = \omega_1 b \sin(\omega_2 t) \vec{I}_{x_1} + \omega_1 b \cos(\omega_2 t) \vec{I}_{y_1}$

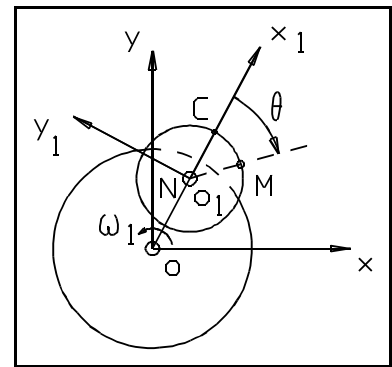


fig. 8.10. - Résolution.

*Calcul de la vitesse du point M*

$$\begin{aligned} \vec{v}_{Ma} &= \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega}_P \times \vec{O_1M} + \vec{v}_{Mr} \\ &= b \sin(\omega_2 t) (\omega_1 - \omega_2) \vec{I}_{x_1} + (\omega_1 a + b \cos(\omega_2 t) (\omega_1 - \omega_2)) \vec{I}_{y_1} \end{aligned}$$

Quand M passe en C, on a  $\theta = \omega_2 t = 2k\pi$ , d'où :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{Ca} &= (\omega_1 a + \omega_1 b - \omega_2 b) \vec{I}_{y_1} = \vec{0} \\ \Rightarrow \omega_2 &= \omega_1 \frac{a+b}{b} = 6\pi \text{ rad/s} \end{aligned}$$

*Calcul de l'accélération du point M*

Recherche des divers paramètres :

- ▶  $a_{O_1} = -\omega_1^2 a \vec{I}_{x_1} = -(2\pi)^2 a \vec{I}_{x_1}$
- ▶  $\vec{\varepsilon}_P = \vec{0}$

$$\begin{aligned}
\blacktriangleright \vec{a}_{Mr} &= -b \omega_2^2 \cos(\omega_2 t) \vec{I}_{x_1} + b \omega_2^2 \sin(\omega_2 t) \vec{I}_{y_1} \\
\blacktriangleright \vec{\omega}_P \times \left( \vec{\omega}_P \times O_1 \vec{M} \right) &= \begin{vmatrix} \vec{I}_{x_1} & \vec{I}_{y_1} & \vec{I}_{z_1} \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ \omega_1 b \sin(\omega_2 t) & \omega_1 b \cos(\omega_2 t) & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\omega_1^2 b \cos(\omega_2 t) \vec{I}_{x_1} + \omega_1^2 b \sin(\omega_2 t) \vec{I}_{y_1} \\
\blacktriangleright 2 \vec{\omega}_P \times \vec{v}_{Mr} &= \begin{vmatrix} \vec{I}_{x_1} & \vec{I}_{y_1} & \vec{I}_{z_1} \\ 0 & 0 & 2 \omega_1 \\ -\omega_2 b \sin(\omega_2 t) & -\omega_2 b \cos(\omega_2 t) & 0 \end{vmatrix} \\
&= 2 \omega_1 \omega_2 b \cos(\omega_2 t) \vec{I}_{x_1} - 2 \omega_1 \omega_2 b \sin(\omega_2 t) \vec{I}_{y_1}
\end{aligned}$$

Expression vectorielle de l'accélération :

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{Ma} &= \vec{a}_{O_1} + \vec{\varepsilon}_P \times O_1 \vec{M} + \vec{\omega}_P \times \left( \vec{\omega}_P \times O_1 \vec{M} \right) + \left( \ddot{x}_1 \vec{I}_{x_1} + \ddot{y}_1 \vec{I}_{y_1} + \ddot{z}_1 \vec{I}_{z_1} \right) + 2 \vec{\omega}_P \times \vec{v}_{Mr} \\
&= \left( -a \omega_1^2 - b \cos(\omega_2 t) (\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2 \omega_1 \omega_2) \right) \vec{I}_{x_1} \\
&\quad + \left( -b \sin(\omega_2 t) (\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2 \omega_1 \omega_2) \right) \vec{I}_{y_1}
\end{aligned}$$

Dans le cas où :  $\omega_2 = \omega_1 \frac{a+b}{b}$ , on a :

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2 \omega_1 \omega_2 = \omega_1^2 \left( 1 + \frac{(a+b)^2}{b^2} - 2 \frac{(a+b)}{b} \right) = \omega_1^2 \frac{a^2}{b^2}$$

et on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\|\vec{a}_{Ma}\| &= \sqrt{a^2 \omega_1^4 + b^2 \left( \omega_1^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 + 2 a \omega_1^2 b \omega_1^2 \frac{a^2}{b^2} \cos(\omega_2 t)} \\
&= \omega_1^2 \sqrt{a^2 + \frac{a^4}{b^2} + 2 \frac{a^3}{b} \cos(\omega_2 t)} \\
&= \omega_1^2 \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + a^2 + 2 a b \cos(\omega_2 t)}
\end{aligned}$$

ainsi  $\|\vec{a}_{Ma}\|$  admet un maximum pour  $(\omega_2 t) = 2 k \pi \Rightarrow \cos(\omega_2 t) = 1$ , obtenu lorsque M coïncide avec C !

$$\|\vec{a}_{Ca}\| = \frac{a}{b} (a+b) \omega_1^2 = 24 \pi^2 m/s^2$$

## 8.4. Mouvement par rapport à la terre

### 8.4.1. Description du référentiel lié à la terre

Lorsqu'on étudie un mouvement "terrestre", notre observation ne peut être que "relative", puisque l'étude de la trajectoire envisagée se fait par rapport à un trièdre de référence lié à la terre; or la terre tourne sur elle-même (et en plus, son centre de masse effectue une trajectoire elliptique autour du soleil, trajectoire que nous négligerons ici).

Appelons  $\vec{g}_a$  l'accélération de la pesanteur mesurée en un point M à la surface de la terre *si celle-ci ne tournait pas* (fig. 8.11.) :  $\vec{g}_a$  serait la traduction de la loi de gravitation universelle dans le trièdre Oxyz, qui ne tourne pas (pour rappel :  $\|\vec{g}_a\| = 6.672 \cdot 10^{-11} \frac{m_{terre}}{d^2}$ ).

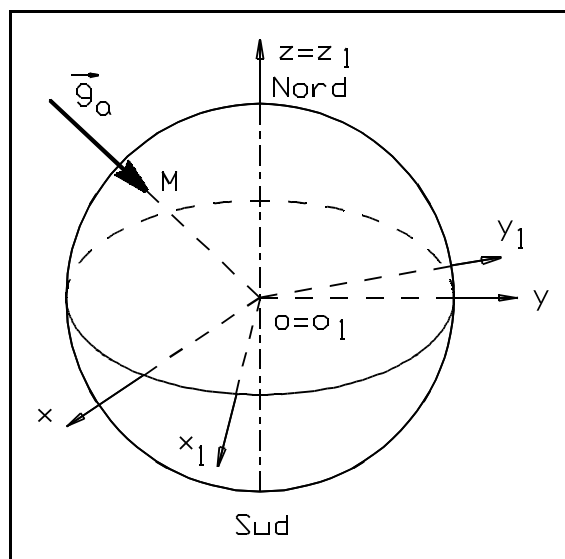


fig. 8.11. - Accélération de la pesanteur.

Ainsi l'accélération mesurée par un observateur tournant avec la terre (suivant le trièdre  $O_1x_1y_1z_1$ ) n'est rien d'autre qu'une accélération relative  $\vec{g}_r$ , telle que :

$$\vec{g}_a = \vec{a}_{O_1} + \vec{\varepsilon}_P \times \vec{O_1M} + \vec{\omega}_P \times \left( \vec{\omega}_P \times \vec{O_1M} \right) + \vec{g}_r + 2 \vec{\omega}_P \times \vec{v}_{Mr}$$

avec :  $\vec{\omega}_P = \frac{2\pi}{T} \vec{I}_z = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \vec{I}_z = 7.27 \cdot 10^{-5} \vec{I}_z$  (T étant la période)

et  $\vec{\varepsilon}_P = \dot{\vec{\omega}}_P = \vec{0}$

Par suite, on obtient, pour notre observation  $\vec{g}_r$  :

$$\vec{g}_r = \vec{g}_a - \vec{\omega}_P \times \left( \vec{\omega}_P \times \vec{O_1M} \right) - 2 \vec{\omega}_P \times \vec{v}_{Mr}$$

qui nous montre que, non seulement,  $\vec{g}_r$  est fonction de la position du point M observé (vecteur  $\vec{O_1M}$ ), mais aussi fonction de la vitesse (relative) de M à la surface terrestre (vecteur  $\vec{v}_{Mr}$ ).



### 8.4.2. Accélération “centrifuge”

Considérons d’abord le cas d’un corps initialement au repos (ou en tous cas se déplaçant très lentement); ainsi le terme de Coriolis  $-2\vec{\omega}_P \times \vec{v}_{Mr}$  est nul ou négligeable comparé à  $-\vec{\omega}_P \times (\vec{\omega}_P \times \vec{O}_1M)$ .

L’accélération  $\vec{g}_r$  qu’on mesure dans ce cas est appelée “accélération effective de la pesanteur”, et on la désigne par  $\vec{g}$  :

$$\vec{g} = \vec{g}_a - \vec{\omega}_P \times (\vec{\omega}_P \times \vec{O}_1M)$$

En supposant que la terre est sphérique, on aurait que  $\vec{g}_a$  est dirigée radialement, vers le centre de la terre (voir **fig. 8.12.**), puisque résultant de la force d’attraction entre deux masses. Le terme  $-\vec{\omega}_P \times (\vec{\omega}_P \times \vec{O}_1M)$  est appelé “accélération centrifuge” (opposée à l’accélération centripète) car il est dirigé vers l’extérieur. Puisque  $\vec{g}$  est la somme de  $\vec{g}_a$  et de l’accélération “centrifuge”, la direction de  $\vec{g}$ , appelée la “verticale”, s’écarte légèrement de la direction radiale; elle est déterminée par un fil à plomb (le fil à plomb n’indique donc pas le centre de la Terre).

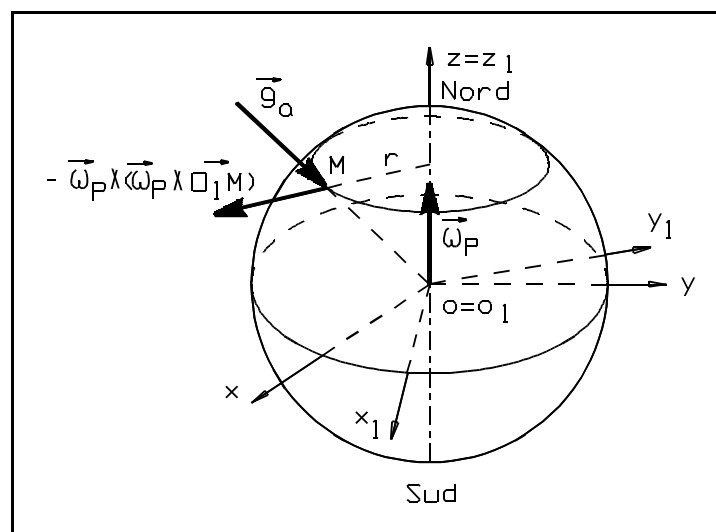


fig. 8.12. - Accélération “centrifuge”.

A l’équateur, l’ordre de grandeur de l’accélération “centrifuge” est (le rayon de la terre valant :  $r \approx 6370 \text{ km}$ ) :

$$\omega_P^2 r = (7.27 \cdot 10^{-5})^2 \times 6370000 = 3.37 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

L’accélération “centrifuge” décroît de l’équateur aux pôles, car le rayon du cercle décrit par la particule décroît quand la latitude croît. La **plupart** des variations observées de la valeur de  $\|\vec{g}\|$ , avec la latitude, sont dues à l’accélération “centrifuge”.

Endroit	Latitude	$\ \vec{g}\  \text{ m/s}^2$
Pôle nord	90.0°	9.8321
Paris	48.8°	9.8094
Equateur	0.0°	9.7799

L'accélération "centrifuge" a pour effet de déplacer légèrement de la direction radiale un corps qui tombe en chute libre : le déplacement est *vers le sud* dans l'hémisphère nord et *vers le nord* dans l'hémisphère sud.

Remarque :

Si la terre tournait 17 fois plus vite, l'accélération de la pesanteur à l'équateur serait nulle.

### 8.4.3. Accélération de Coriolis

Rappelons l'expression de  $\vec{g}_r$  :

$$\vec{g}_r = \vec{g}_a - \vec{\omega}_P \times \left( \vec{\omega}_P \times \vec{O}_1 M \right) - 2 \vec{\omega}_P \times \vec{v}_{Mr} = \vec{g} - 2 \vec{\omega}_P \times \vec{v}_{Mr}$$

et considérons le terme de Coriolis  $- 2 \vec{\omega}_P \times \vec{v}_{Mr}$ .

#### A) Chute d'un corps

Dans le cas de la chute d'un corps, la vitesse est dirigée au départ dans la direction de  $\vec{g}$  ; comme  $\vec{\omega}_P$  se trouve le long de l'axe de la terre ( $S \rightarrow N$ ), on a que  $2 \vec{\omega}_P \times \vec{v}_{Mr}$  est dirigé *vers l'ouest*; donc  $- 2 \vec{\omega}_P \times \vec{v}_{Mr}$  est *dirigé vers l'est* et le corps qui tombe est dévié dans cette direction.

En effet, prenons un repère mobile fixé sur un point de la surface de la terre à une latitude  $\psi$  ( $0_1 z_1$  étant dirigée suivant la verticale locale et  $O_1 x_1$  vers l'ouest).

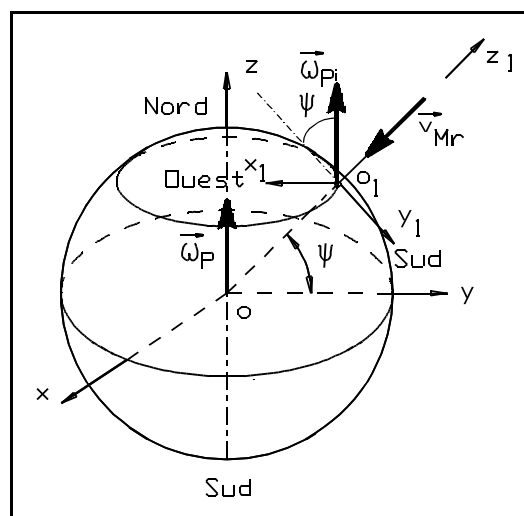


fig. 8.13. - Déviation, due à l'accélération de Coriolis, pour la chute d'un corps.

Nous avons :

$$\begin{aligned}\vec{v}_{Mr} &= -v_{Mr} \vec{1}_{z_1} \\ \vec{\omega}_P &= -\omega_P \cos \psi \vec{1}_{y_1} + \omega_P \sin \psi \vec{1}_{z_1}\end{aligned}$$

Et donc :

$$-2 \vec{\omega}_P \times \vec{v}_{Mr} = -2 \begin{vmatrix} \vec{1}_{x_1} & \vec{1}_{y_1} & \vec{1}_{z_1} \\ 0 & -\omega_P \cos \psi & \omega_P \sin \psi \\ 0 & 0 & -v_{Mr} \end{vmatrix} = -2 v_{Mr} \omega_P \cos \psi \vec{1}_{x_1}$$

dirigée vers l'est.

Cette déviation est la même pour les deux hémisphères (nulle aux deux pôles, maximale à l'équateur).

**Application 8.7.** Estimer l'écart par rapport à la verticale que subirait, sous l'action de la rotation de la terre, un corps lâché d'une altitude  $h = 100 \text{ m}$ , au-dessus de Bruxelles (latitude  $\psi = 51^\circ \text{ nord}$ ).

**Solution :**

*Hypothèse*

On néglige l'effet de l'accélération centrifuge.

*Placement des repères*

- Oxyz au centre de la terre;  
 $O_1x_1y_1z_1$  tel que :
- ▶  $O_1$  à la verticale du point de largage;
  - ▶  $O_1z_1$  orienté suivant cette verticale;
  - ▶  $O_1x_1$  orienté vers l'ouest.

*Recherche des divers paramètres*

Suite au choix du repère, on peut écrire :

▶  $\vec{\omega}_P = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \vec{1}_z = 7.27 \cdot 10^{-5} \vec{1}_z = \omega_P \vec{1}_z$

et donc :

$$\vec{\omega}_P = -\omega_P \cos \psi \vec{1}_{y_1} + \omega_P \sin \psi \vec{1}_{z_1}$$

▶  $\vec{v}_{Mr} = -g t \vec{1}_{z_1}$

*Expression de l'accélération de Coriolis*

L'accélération  $-2 \vec{\omega}_P \times \vec{v}_{Mr}$  est dirigée vers

l'est, et vaut :

$$-2 \omega_P g t \cos \psi \vec{1}_{x_1}$$

*Recherche des déplacements suivant  $O_1x_1y_1z_1$*

Dès lors, on peut écrire :

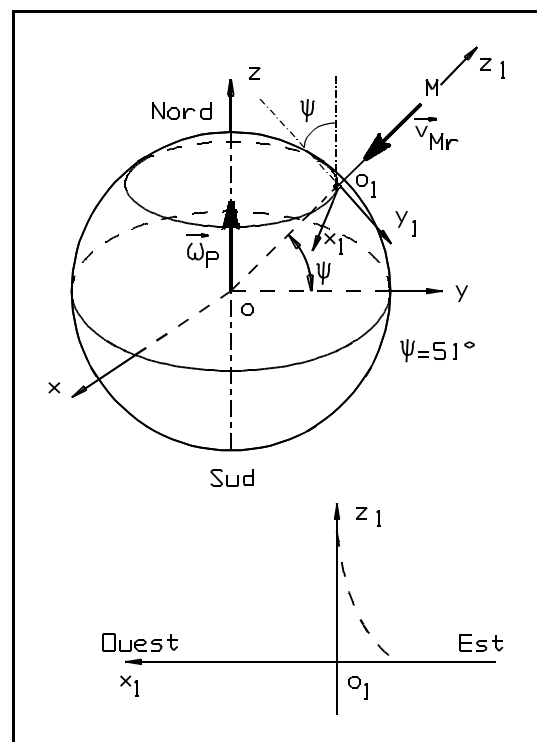


fig. 8.14. - Application 8.7.

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -2 \omega_p g t \cos \psi \\ \ddot{z}_1 = -g \end{cases}$$

et, en intégrant, avec les conditions initiales reprises sur le dessin :

$$\dot{x}_1 = -\omega_p g t^2 \cos \psi + C_1 \quad (C_1 = 0)$$

$$\Rightarrow x_1 = -\omega_p \frac{g t^3}{3} \cos \psi + C_2 \quad (C_2 = 0)$$

$$\dot{z}_1 = -g t + C_3 \quad (C_3 = 0)$$

$$\Rightarrow z_1 = -\frac{g t^2}{2} + C_4 \quad (C_4 = h)$$

*Déviaton*

En  $z_1 = 0$ , on a :

$$0 = -\frac{g t^2}{2} + h \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

et l'écart  $x_{1sol}$  au sol entre la verticale et le point de chute vaut :

$$\begin{aligned} x_{1sol} &= -\omega_p \frac{g t^3}{3} \cos \psi = -\frac{\omega_p g}{3} \cos \psi \sqrt{\frac{8h^3}{g^3}} \\ &= -\frac{7.27 \cdot 10^{-5}}{3} \times \cos 51^\circ \times \sqrt{\frac{8 \times 100^3}{9.81}} \\ &= -0.0138 \text{ m} = -1.38 \text{ cm} \end{aligned}$$

## B) Mouvement parallèle à la surface terrestre

Dans le cas d'un corps se déplaçant dans un plan horizontal, le terme de Coriolis  $-2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_{Mr}$  dévie la trajectoire de la ligne droite : vers la *droite* dans l'*hémisphère nord*, et vers la *gauche* dans l'*hémisphère sud*. L'effet croît vers les pôles. L'effet Coriolis, négligeable dans la plupart des cas, modifie sérieusement la trajectoire des fusées et des satellites à cause de leurs vitesses élevées.

Comme exemple de l'effet Coriolis, citons le tourbillonnement du vent dans un ouragan. Si un centre de basse pression se développe dans l'atmosphère, le vent soufflera radialement vers le centre; toutefois, l'accélération de Coriolis dévie les molécules d'air vers la droite de leur trajectoire, dans l'hémisphère nord, et il en résulte un mouvement tourbillonnaire dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, comme le montre la figure (fig. 8.15.).

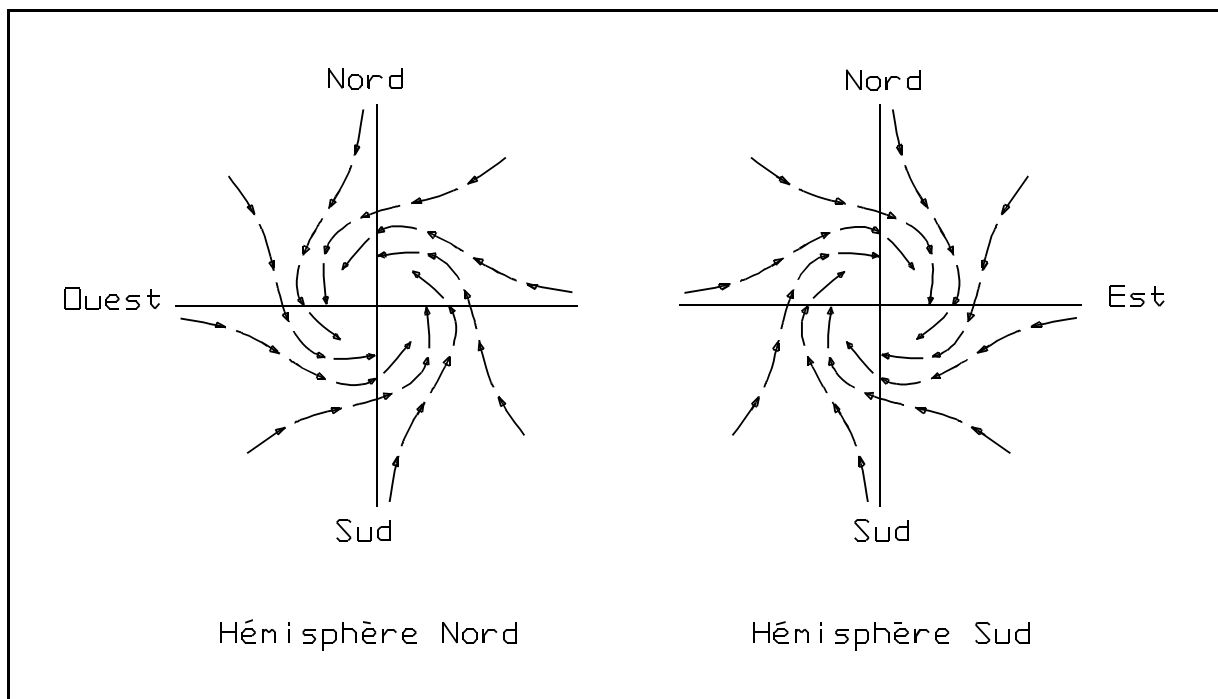


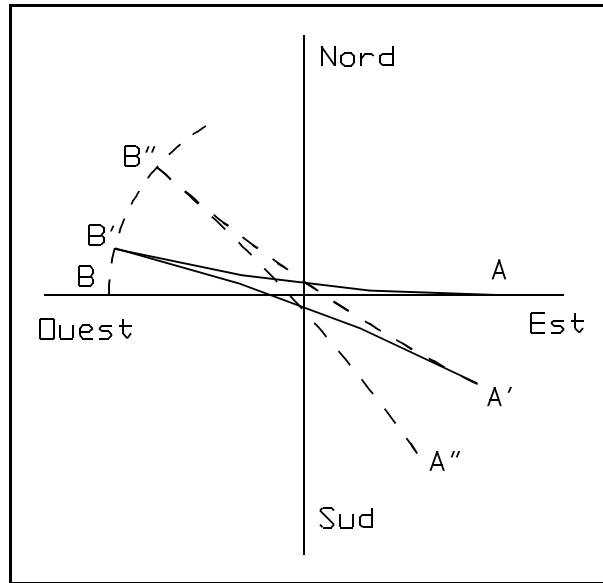
fig. 8.15. - Accélération de Coriolis : effet.

## C) Pendule de Foucault (Expérience de 1851)

Pour des oscillations de faible amplitude d'un pendule, on peut supposer que le mouvement se fait selon une trajectoire horizontale. Si on fait osciller le pendule initialement dans la direction est-ouest et qu'on le lâche en A (voir fig. 8.16.), il devrait continuer à osciller entre A et B, si la terre ne tournait pas.

Mais, en raison de l'accélération de Coriolis, la trajectoire du pendule est continuellement déviée vers la droite (dans l'hémisphère nord), et, au lieu d'effectuer des oscillations  $\overline{AB}$ , il passe par B', A', B'', A'', ...; en d'autres termes, le plan d'oscillation du pendule tourne dans le sens des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère nord. L'expérience de Foucault <sup>(2)</sup> est une preuve frappante de la rotation de la terre; même si la terre était toujours couverte de nuages, cette expérience aurait montré aux physiciens que la terre tournait.

<sup>(2)</sup> Foucault Jean Bernard Léon (1819 [Paris] - 1868 [Paris]) : physicien et astronome français.



*fig. 8.16. - Pendule de Foucault.*