Problèmes sur le chapitre 8

Remarque :
Même si les exercices sont proposés pour une méthode, rien n'empêche de résoudre ceux-ci d'une façon différente.

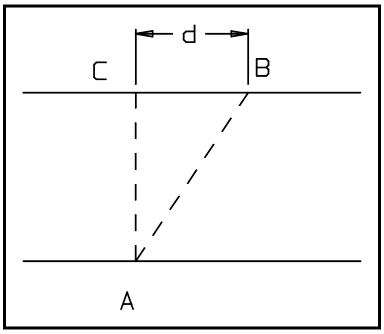
Exercices concernant principalement la "*composition des vitesses*" (§ 8.2.)

81.01. Une barque doit traverser une rivière de 25 *m* de largeur dans laquelle l'eau se déplace à une vitesse de courant constante de 0.1 *m/s*. La vitesse relative de la barque par rapport à l'eau, dans sa direction, est de 0.2 *m/s*. Quelle direction doit prendre la barque pour traverser dans le temps minimum ? Définir cette direction par un angle α que ferait la direction de la barque avec une perpendiculaire au courant. Avec cette direction, situer le point d'abordage par rapport au point de départ, sur la rive opposée.

Réponses : $\alpha = 0°$; abordage à 12.5 *m* en aval du point de départ

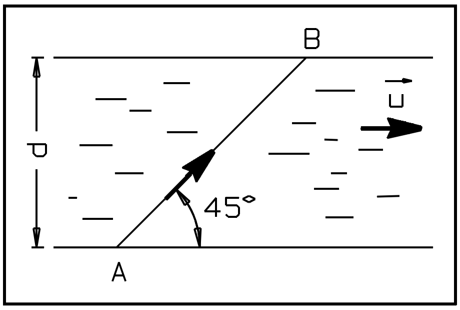
81.02. Un sportif nage avec une vitesse $v_0 = 1.5\, m/s$ en piscine. Quel est le temps minimal qu'il mettra pour traverser une rivière large de 50 *m* si la rivière coule à 0.75 *m/s* ? Quel sera le déportement *d* ?

Si le nageur veut traverser la rivière suivant la droite $\overline{AC}$, comment doit-il nager et quelle sera la durée de la traversée ?



Réponses : $t_{\min} = 33.3\, s$; $d = 25\, m$; $t = 38.5\, s$

81.03. Un bateau traverse une rivière d'un point A à un point B en suivant une trajectoire rectiligne. Les durées des voyages aller et retour sont respectivement t_a et t_r. Sachant que $\overline{AB}$ fait un angle de 45° avec la direction du courant, trouver la vitesse $\|\vec{u}\|$ du courant et la vitesse $\|\vec{v}\|$ du bateau dans un lac ("en eaux calmes").

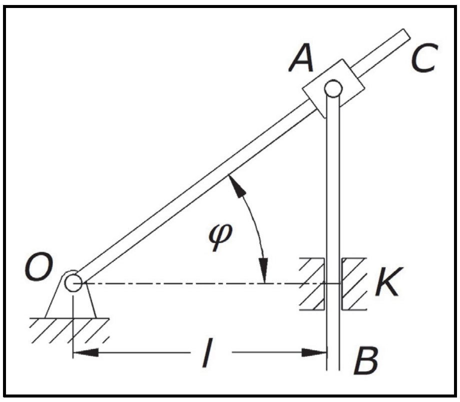


Réponses :

$$\|\vec{u}\| = d\left(\frac{1}{t_{aller}} - \frac{1}{t_{retour}}\right)$$

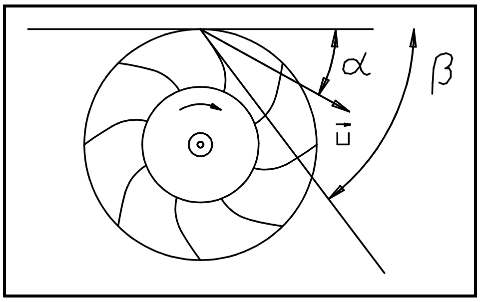
$$\|\vec{v}\| = d\sqrt{\frac{1}{t_{aller}^2} + \frac{1}{t_{retour}^2}}$$

81.04. Dans un mécanisme à coulisse, le coulisseau A se déplace le long de la manivelle $\overline{OC}$ lorsque celle-ci pivote autour de l'axe O, perpendiculairement au plan de la figure, et entraîne la tige $\overline{AB}$ qui glisse dans un galet de guide vertical K. La distance $\overline{OK} = l$. Déterminer la vitesse du coulisseau A par rapport à la manivelle $\overline{OC}$ en fonction de rotation φ de la manivelle.



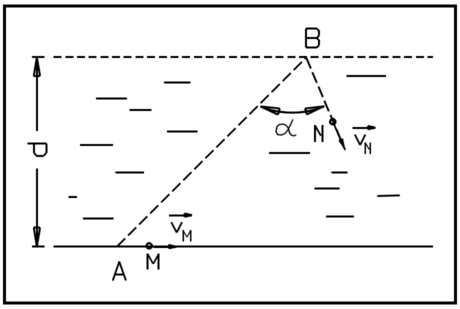
Réponse : $\vec{v}_{A\,r} = \dfrac{\dot{\varphi}\, l \sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,\vec{1}_{x_1}$

81.05. Des particules d'eau entrent dans une turbine avec la vitesse $\vec{u}$. L'angle entre la vitesse $\vec{u}$ et la tangente au rotor menée au point d'entrée de la particule vaut α. Le diamètre extérieur du rotor est d, le nombre de tours par minute est n. Déterminer l'angle entre l'aube du rotor et la tangente au point d'entrée de l'eau pour lequel l'eau pénétrera sans choc (dans ce cas la vitesse relative des particules est dirigée le long des aubes).



Réponse : $\tan\beta = \dfrac{\|\vec{u}\|\sin\alpha}{\|\vec{u}\|\cos\alpha - \dfrac{\pi\, d\, n}{60}}$

81.06. Un bateau M passant par A au temps $t = 0$, se déplace à une vitesse $\|\vec{v}_M\| = 10.8\ km/h$, constante en grandeur et en direction. Un canot N part de B au temps $t = 0$, avec une vitesse de 2 m/s constante. B se situe à $d = 300\ m$ de la trajectoire de M, et la distance $\overline{AB}$ vaut 500 m.



a) Quelle direction doit prendre le canot N pour rencontrer le bateau M ? (angle α mesuré à partir de la direction $\overline{AB}$).
b) Combien de temps mettra N pour rencontrer M en suivant cette direction ?
c) Y a-t-il une valeur limite inférieure de la vitesse de N en-dessous de laquelle le problème est insoluble ?

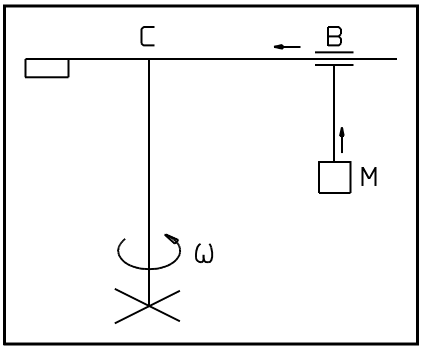
Réponses : a) + b) $\begin{cases} \alpha_1 = 64.16° \quad \Rightarrow \quad t_1 = 153\ s \\ \alpha_2 = 115.75° \quad \Rightarrow \quad t_2 = 324\ s \end{cases}$ c) $\|\vec{v}_N\|_{\lim} = 1.8\ m/s$

Exercices concernant principalement la “*composition des accélérations*” *(§ 8.3.)*

<u>82.01.</u> Pour une grue de chantier, représentée ci-contre, on note les déplacements suivants : M va vers B suivant un MRU à la vitesse de 0.8 *m/s* ; B va vers C suivant un MRU à la vitesse de 0.5 *m/s*; le pied $\overline{OC}$ tourne uniformément par rapport au sol à la vitesse $\|\vec{\omega}\| = 0.05\, rad/s$.

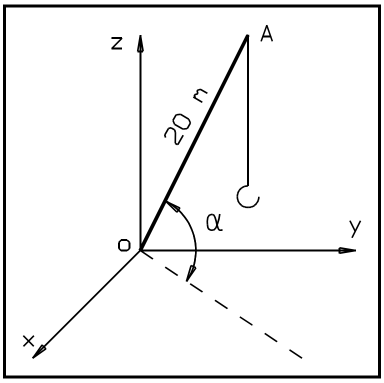
Calculer les lois de vitesse et d'accélération absolues de M, sachant que, en $t = 0$: $\overline{MB} = 24\, m$; $\overline{BC} = 15\, m$; $\overline{OC} = 30\, m$.

Déterminer $\|\vec{v}_{M\,a}\|$ et $\|\vec{a}_{M\,a}\|$ à l'instant où $\overline{BC} = 10\, m$.



<u>Réponses</u> : $\|\vec{v}_{M\,a}\| = 1.07\, m/s$; $\|\vec{a}_{M\,a}\| = 0.056\, m/s^2$

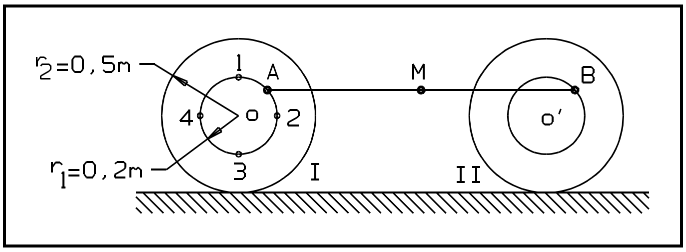
<u>82.02.</u> Le bras d'une grue effectue un mouvement de rotation autour d'un axe vertical Oz, à la vitesse angulaire de $\pi/30\, rad/s$. Pendant ce mouvement, le crochet monte à la vitesse de $t/10\, m/s$. L'angle α avec le plan Oxy est fixe et vaut $60°$. En $t = 0$, le crochet est en contact avec le sol et le bras se trouve dans le plan Oyz. On demande de calculer les vitesse et accélération absolues du crochet en $t = 5\, s$.



<u>Réponses</u> $\|\vec{v}_a\|_{t=5\,s} = 1.16\, m/s$

$\|\vec{a}_a\|_{t=5\,s} = 0.148\, m/s^2$

<u>82.03.</u> Trouver la vitesse absolue du point M, milieu de la tige $\overline{AB}$ reliant les manivelles $\overline{OA}$ et $\overline{O'B}$, si les roues I et II roulent sans glisser sur le rail.



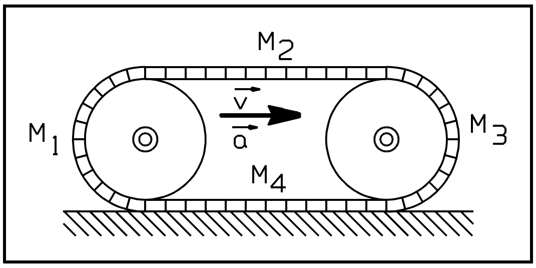
a) Déterminer $\|\vec{v}_{M\,a}\|$ pour les quatre positions A_1, A_2, A_3 et A_4 sachant que $r_2 = 0.5\, m$, $\overline{OA} = \overline{O'B} = r_1 = 0.2\, m$, la vitesse de l'ensemble du véhicule étant de 60 *km/h*.

b) Que vaut l'accélération absolue de M, pour les 4 positions de A.

<u>Réponses</u> : a) $\|\vec{v}_{M\,a\,1}\| = 23.34\, m/s$; $\|\vec{v}_{M\,a\,2}\| = \|\vec{v}_{M\,a\,4}\| = 17.94\, m/s$; $\|\vec{v}_{M\,a\,3}\| = 10\, m/s$

b) $\|\vec{a}_{M\,a\,i}\| = 222.3\, m/s^2$

82.04. Trouver les vitesses et les accélérations des points M_1, M_2, M_3 et M_4 de la chenille d'un tracteur qui se déplace sans glisser sur un chemin rectiligne avec une vitesse instantanée v et une accélération instantanée a; les rayons des roues du tracteur valent r.

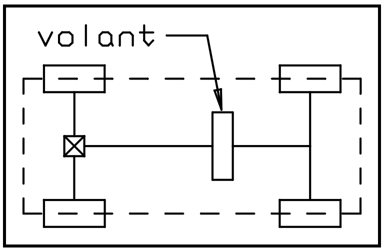


Réponses :
$$\left\|\vec{v}_{M_3\,a}\right\| = \sqrt{2}\,v$$
$$\left\|\vec{a}_{M_3\,a}\right\| = \sqrt{\left(a - \frac{v^2}{r}\right)^2 + a^2}$$

82.05. Une locomotive circule sur un tronçon rectiligne avec une accélération $\|\vec{a}\| = 2\ m/s^2$. Le rotor d'un moteur électrique auxiliaire tourne à l'instant considéré avec une vitesse angulaire $\|\vec{\omega}\| = 50\,\pi\ s^{-1}$ et une accélération angulaire $\|\vec{\varepsilon}\| = 25\,\pi\ s^{-2}$. Le rotor, d'un diamètre de 15 *cm*, est disposé au centre de la locomotive et son axe de rotation est parallèle aux voies. On demande la valeur de l'accélération absolue des points périphériques du rotor à l'instant considéré.

Réponse :
$$\left\|\vec{a}_{M\,a}\right\| = 1851\ m/s^2$$

82.06. Une automobile se déplace sur une route rectiligne avec une accélération $\|\vec{a}\| = 2\ m/s^2$. Un volant de rayon $r = 0.25\ m$ monté sur l'arbre longitudinal tourne à l'instant considéré avec une vitesse angulaire $\|\vec{\omega}\| = 4\ rad/s$ et une accélération angulaire $\|\vec{\varepsilon}\| = 4\ rad/s^2$. Trouver l'accélération absolue des points périphériques du volant à l'instant considéré.

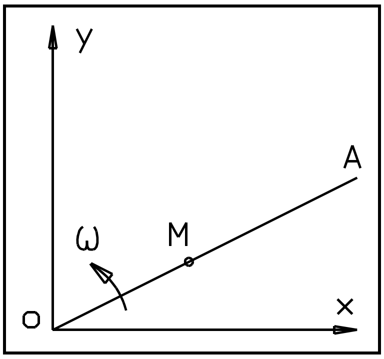


Réponse :
$$\left\|\vec{a}_{M\,a}\right\| = 4.58\ m/s^2$$

82.07. Le segment orienté $\overline{OA}$ tourne autour de O avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$. Un point M se déplace sur $\overline{OA}$ avec une vitesse $\vec{v}$. Au temps $t = 0$, $\overline{OA}$ est confondu avec Ox et la distance séparant M_0 de O est de $\overline{OM_0}$. Déterminer les vitesse et accélération absolues de M, en fonction du temps, ainsi que leur valeur pour $t = t_1$ dans les 2 cas suivant :

a) $\|\vec{\omega}\| = \pi\ rad/s$; $\|\vec{v}\| = 0.5\ m/s$; $\overline{OM_0} = 0$ et $t_1 = 1\ s$;

b) $\|\vec{\omega}\| = 4\ rad/s$; $\|\vec{v}\| = -48\sin(\omega\,t)\,[cm/s]$; $\overline{OM_0} = 12\ cm$ et $t_1 = \pi/24\ s$.

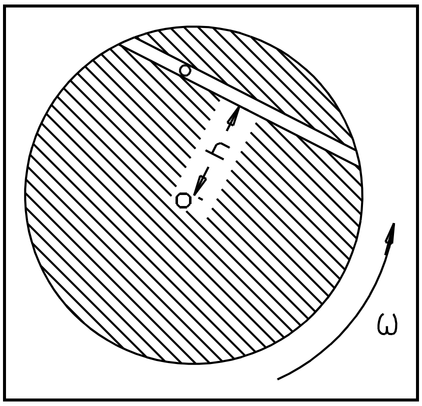


Réponses :

a) $\left\|\vec{v}_{M\,a}\right\|_{t=1\,s} = 1.65\ m/s$; $\left\|\vec{a}_{M\,a}\right\|_{t=1\,s} = 5.85\ m/s^2$

b) $\left\|\vec{v}_{M\,a}\right\|_{t=\pi/24\,s} = 48\ cm/s$; $\left\|\vec{a}_{M\,a}\right\|_{t=\pi/24\,s} = 384\ cm/s^2$

82.08. Un point se déplace uniformément avec une vitesse relative v_r suivant la corde d'un disque qui tourne autour de son axe O, perpendiculaire à son plan, avec la vitesse angulaire constante $\vec{\omega}$. Déterminer la vitesse et l'accélération absolues du point à l'instant où il se trouve à la plus courte distance h de l'axe; on suppose que le mouvement relatif du point s'effectue dans le sens de rotation du disque.



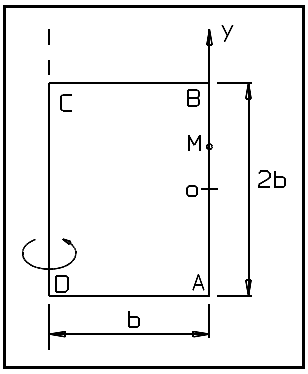
Réponses :

$$\vec{v}_{M_1 a} = \left(\omega\, h + v_r\right) \vec{1}_{y_1}$$

$$\vec{a}_{M_1 a} = -\left(\omega^2\, h + 2\, \omega\, v_r\right) \vec{1}_{x_1}$$

82.09. a) Un rectangle ABCD tourne autour de son côté $\overline{CD}$ vertical avec une vitesse de 15 tours par minutes. Un point mobile M parcourt le côté $\overline{AB}$ suivant la loi $y = b \sin\left(\pi\, t/2\right) [m]$. Déterminer l'accélération absolue de M au temps $t = 1\, s$.

b) Supposer maintenant la rotation du rectangle en période de freinage suivant la loi : $\theta = \dfrac{\pi}{2}\, t - \dfrac{t^2}{4}$. Calculer la vitesse absolue et l'accélération absolue du point M après 2.5 s de freinage (début de freinage pour $y_M = 0$).

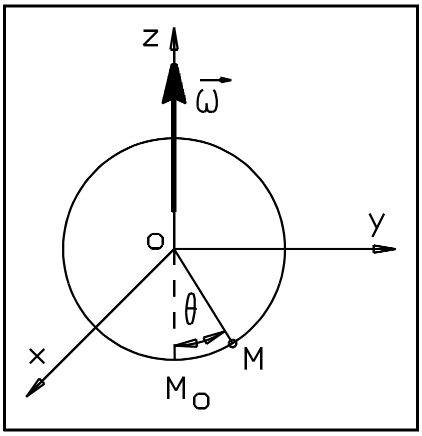


Réponses :

a) $\left\|\vec{a}_{M\,a}\right\| = 3.49\, b\; m/s^2$

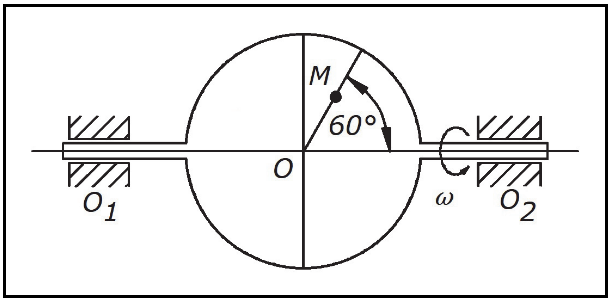
b) $\left\|\vec{v}_{M\,a}\right\| = 1.156\, b\; m/s\, ; \left\|\vec{a}_{M\,a}\right\| = 1.82\, b\; m/s^2$

82.10. Un disque de rayon $r = 5\, cm$ tourne autour d'un diamètre vertical Oz à une vitesse constante de 60 tours par minute. Un point M se déplace sur la circonférence de ce disque; sa position est donnée par la loi $\theta = \pi\, t$. Calculer l'accélération absolue de M en fonction du temps. Que vaut-elle pour $t = 0.5\, s$?



Réponses : $\left\|\vec{a}_{M\,a}\right\|_{t\,=\,0.5\,s} = 5\,\pi^2\; r = 2.47\; m/s^2$

82.11. Le point M se déplace suivant le rayon d'un disque; il part du centre du disque, et se dirige vers sa périphérie, selon la loi $\overline{OM} = 4\, t^2\; [cm]$. Le disque tourne autour de l'axe $\overline{O_1 O_2}$ avec une vitesse angulaire $\omega = 2\, t\, [s^{-1}]$. Le rayon $\overline{OM}$ forme avec l'axe $\overline{O_1 O_2}$ un angle de 60°. Calculer la vitesse et l'accélération absolues de M en fonction du temps. Déterminer la valeur de l'accélération absolue du point M



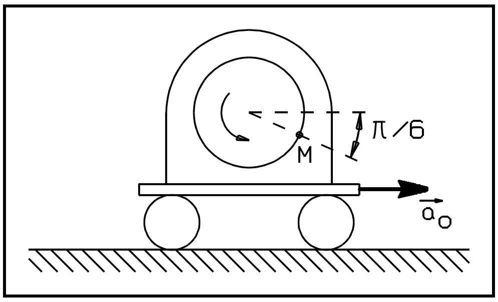
à l'instant $t = 1\,s$.

<u>Réponse</u> : $\left\|\vec{a}_{M\,a}\right\|_{t=1\,s} = 35.5\ cm/s^2$

<u>82.12.</u> Un avion vole horizontalement en ligne droite à vitesse constante de 360 *km/h*. Son hélice tourne à 500 tours par minute dans le sens direct par rapport à l'avancement de l'avion. Décrire le mouvement de l'extrémité M d'une pale d'hélice (longueur d'une pale : 1 *m*); position, vitesse, accélération.

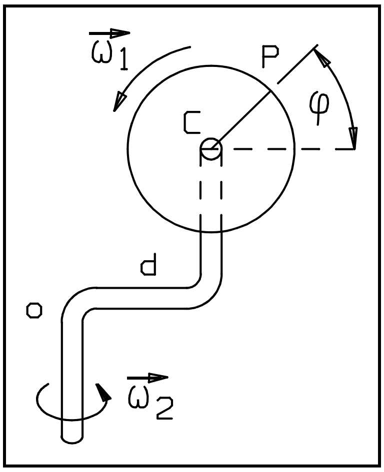
<u>Réponses</u> : $\left\|\vec{v}_{M\,a}\right\| = 112.9\ m/s$; $\left\|\vec{a}_{M\,a}\right\| = 2\,742\ m/s^2$

<u>82.13</u> Un chariot se déplace horizontalement vers la droite, avec une accélération $\left\|\vec{a}_0\right\| = 49.3\ cm/s^2$. Il porte un moteur électrique dont le rotor tourne en période de démarrage, suivant la loi $\theta = t^2$ (θ en *rad*, *t* en *s*).
Le rayon du rotor est de 20 *cm*. Au temps $t = 1\,s$, le point M du rotor occupe la position représentée sur le dessin. Calculer son accélération absolue pour $t = 1\,s$.



<u>Réponse</u> : $\left\|\vec{a}_{M\,a}\right\| = 0.746\ m/s^2$ verticale, vers le haut

<u>82.14.</u> Un disque de rayon *r* est supporté par une fourche qui tourne à vitesse angulaire $\left\|\vec{\omega}_2\right\|$ constante, autour d'un axe vertical. Le disque a une vitesse de rotation propre $\left\|\vec{\omega}_1\right\|$ (également constante) autour de son centre C. Calculer la vitesse et l'accélération du point P à la périphérie du disque.

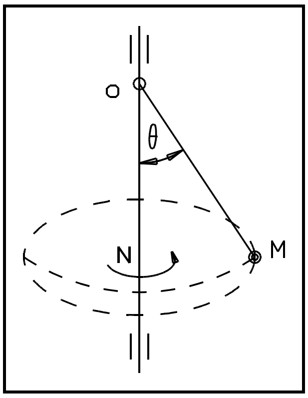


<u>Réponses</u> : $\left\|\vec{v}_P\right\| = \sqrt{\omega_2^2\,\left(d + r\cos(\omega_2\,t)\right)^2 + \omega_1^2\,r^2}$

<u>82.15.</u> Un pendule est constitué d'une masse centrée en M et d'une corde inextensible de masse négligeable et de longueur $l = 0.5\,m$. Ce pendule oscille autour du point d'attache : la position angulaire du point M est donnée par la loi :

$\theta = \pi/2\,\cos(\omega\,t)$ avec $\left\|\vec{\omega}\right\| = 4.429\ rad/s$

<u>Simultanément</u>, l'axe vertical tourne à une vitesse angulaire constante de 60 tours par minute. Calculer la vitesse et l'accélération absolue de M en fonction du temps. Que vaut-elle en $t = 1\,s$?



Réponses : $\vec{v}_{M\,a} = 1.34\,\vec{1}_{x_1} + 3.02\,\vec{1}_{y_1} - 1.42\,\vec{1}_{z_1}$ $\qquad \left\|\vec{v}_{M\,a}\right\|_{t=1\,s} = 3.60\,m/s$

$\vec{a}_{M\,a} = -\,37.99\,\vec{1}_{x_1} + 21.78\,\vec{1}_{y_1} + 18.36\,\vec{1}_{z_1}$ $\qquad \left\|\vec{a}_{M\,a}\right\|_{t=1\,s} = 47.48\,m/s^2$

82.16. Une particule se déplace sur la cardioïde d'équations polaires :

$$\begin{cases} r = C\left(1-\cos\theta\right) \\ \theta = \omega_0\, t \end{cases} \quad \text{avec : } \quad (C, \omega_0 > 0)$$

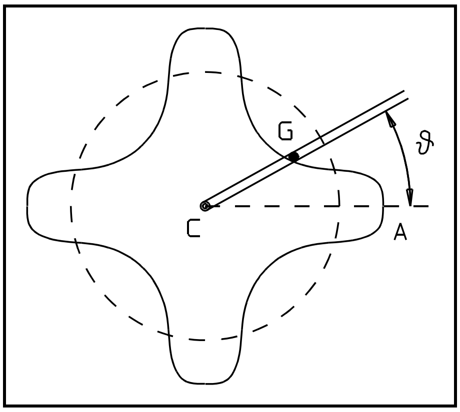
On demande de calculer la grandeur de la vitesse et la grandeur de l'accélération de la particule, en utilisant les techniques de mouvement composé du point.

Réponses : $\left\|\vec{v}_{M\,a}\right\| = \omega_0\, C\sqrt{2-2\cos\omega_0\, t}$; $\left\|\vec{a}_{M\,a}\right\| = \omega_0^2\, C\sqrt{5-4\cos\omega_0\, t}$

82.17. Soit le dispositif présenté ci-contre. Le point G se déplace sur la "*came*" immobile, d'équation : $r = b - c\cos(n\,\theta)$, où $b > c$ et n entier.

(r représente la distance entre C et G).

En $t = 0$, G se trouve confondu avec le point A. Calculer, en fonction de t, la vitesse et l'accélération de G lorsque le bras tourne à vitesse angulaire $\left\|\vec{\omega}_0\right\|$ constante.

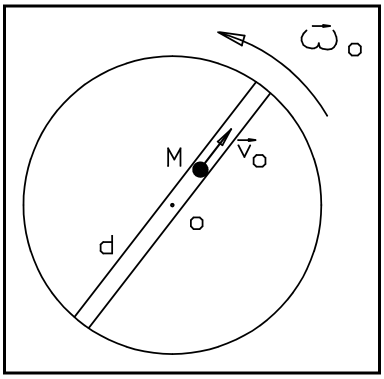


Réponses : $\vec{v}_{G\,a} = \omega_0\, C\, N\sin(N\,\omega_0\, t)\,\vec{1}_{x_1} + \omega_0\left(b - c\cos(N\,\omega_0\, t)\right)\vec{1}_{y_1}$

$\vec{a}_{G\,a} = \omega_0^2\left(C\left(N^2+1\right)\cos(N\,\omega_0\, t) - b\right)\vec{1}_{x_1} + 2\,\omega_0^2\, C\, N\sin(N\,\omega_0\, t)\,\vec{1}_{y_1}$

82.18. Un corps M se déplace à vitesse scalaire $\left\|\vec{v}_0\right\|$ constante dans une glissière d diamétrale d'un disque; ce dernier tourne à vitesse angulaire $\left\|\vec{\omega}_0\right\|$ constante autour de son axe (perpendiculaire au plan du disque).

a) Trouver la vitesse $\left\|\vec{v}_M\right\|$ et l'accélération $\left\|\vec{a}_M\right\|$ du corps, en fonction du temps t, sachant qu'en $t = 0$, M est confondu avec O, centre du disque.
b) Calculer, toujours en fonction de t, les accélérations tangentielle et normale de M, ainsi que le rayon de courbure de la trajectoire.



Réponses : $\left\|\vec{v}_{M\,a}\right\| = v_0\sqrt{1+\omega_0^2\, t^2}$

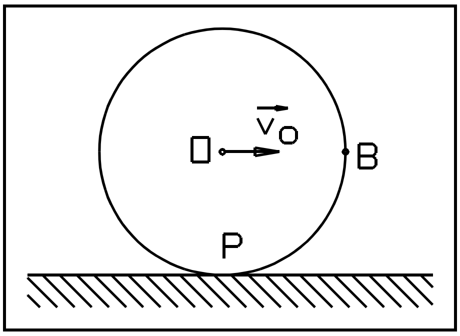
$\left\|\vec{a}_{M\,a}\right\| = \omega_0\, v_0\sqrt{4+\omega_0^2\, t^2}$; $\left\|\vec{a}_{M\,t}\right\| = \dfrac{\omega_0^2\, v_0\, t}{\sqrt{1+\omega_0^2\, t^2}}$

$\left\|\vec{a}_{M\,n}\right\| = \dfrac{\omega_0\, v_0\sqrt{2+\omega_0^2\, t^2}}{\sqrt{1+\omega_0^2\, t^2}}$; $\rho = \dfrac{v_0\left(1+\omega_0^2\, t^2\right)^{3/2}}{\omega_0\left(2+\omega_0^2\, t^2\right)}$

82.19. Le centre O d'une roue roulant sans glisser sur un rail rectiligne possède une accélération $\|\vec{a}_0\| = 2\ m/s^2$. Le rayon de la roue vaut $r = 0.2\ m$. A l'instant $t = 0$, la roue est à l'arrêt. Déterminer, en fonction du temps, la vitesse et l'accélération du point :

a) B, extrémité du diamètre horizontal perpendiculaire à $\overline{OP}$

b) P, point de contact avec le rail.



Réponses : a) $\vec{v}_{B\,a} = 2\,t\ \vec{1}_x - 2\,t\ \vec{1}_y$

$$\vec{a}_{B\,a} = \left(2 - 20\,t^2\right)\vec{1}_x - 2\ \vec{1}_y$$

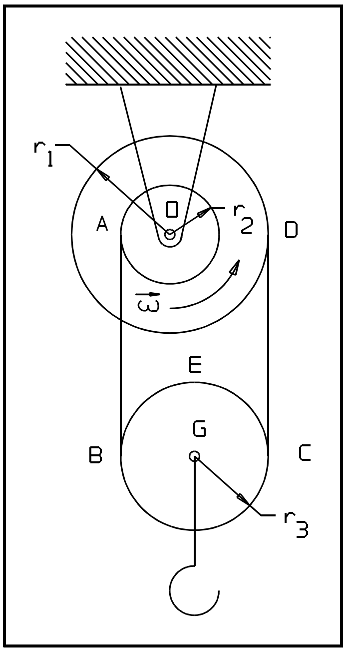
b) $\vec{v}_{P\,a} = \vec{0}$; $\vec{a}_{B\,a} = 20\,t^2\ \vec{1}_y$

82.20. Un treuil est constitué de deux tambours liés de rayons r_1 et r_2. Lorsqu'il tourne à la vitesse angulaire ω, le câble s'enroule sur r_1 et se déroule de r_2, ce qui communique à la poulie qui porte le crochet un mouvement de rotation et de translation.

Données : $n = 150\ tr/\min$;

$r_1 = 200\ mm$; $r_2 = 150\ mm$; $r_3 = 175\ mm$.

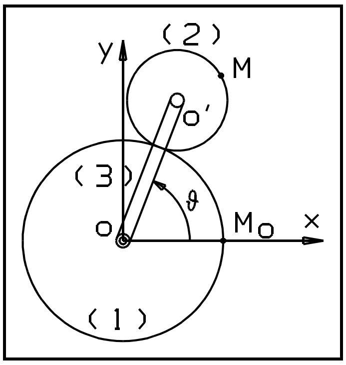
Déterminer les vitesses et accélérations absolues des points G et E.



Réponses : $\|\vec{v}_G\| = 2.26\ m/s$; $\|\vec{a}_E\| = 43.19\ m/s^2$

$\|\vec{v}_G\| = 2.78\ m/s$; $\|\vec{a}_E\| = 43.19\ m/s^2$

82.21. La roue (1) de rayon $R = 0.3\ m$ est immobile. La roue (2) de rayon $r = 0.15\ m$ est entraînée par la manivelle (3) qui tourne à une vitesse de 5 tours par minute. La roue (2) roule sans glisser sur la roue (1). Au temps $t = 0$, le point M de (2) se trouve en M_0. Déterminez les lois de vitesse et d'accélération de M.



Réponses :

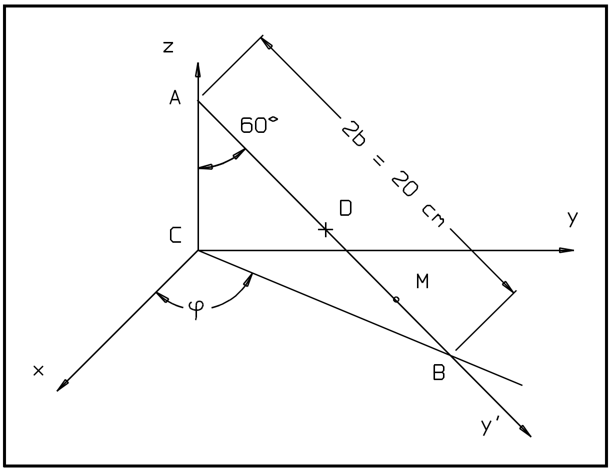
$$\vec{v}_{M\,a} = 0.236 \sin\!\left(\frac{\pi}{3}t\right)\vec{1}_{x_1} + 0.236\left(1 - \cos\!\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right)\vec{1}_{y_1}$$

$$\vec{a}_{M\,a} = \left(-0.123 + 0.370\cos\!\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right)\ \vec{1}_{x_1} + 0.370\sin\!\left(\frac{\pi}{3}t\right)\vec{1}_{y_1}$$

La trajectoire est une "*épicycloïde*"

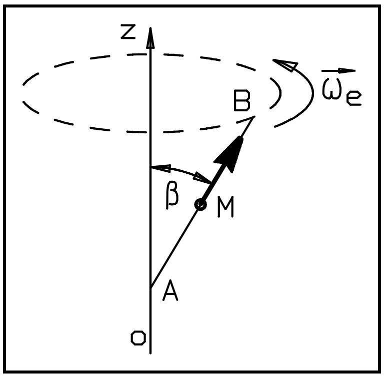
82.22. La pièce triangulaire ABC tourne autour de $\overline{AC}$ suivant la loi du mouvement : $\varphi = 10\,t - t^2$ (en radians).

Le point M oscille sur $\overline{AB}$ de part et d'autre du point D (milieu de $\overline{AB}$) suivant la loi du mouvement $y' = b\cos(\pi\,t/3)$ (y' positifs de D vers B). Calculer l'accélération absolue de M au temps $t = 2\,s$.



Réponse : $\left\|\vec{a}_{M\,a}\right\| = 1.828\ m/s^2$

82.23. La bille M se déplace suivant $\overline{AB}$ avec une vitesse de 0.10 *m/s*. Le point B décrit une circonférence avec une vitesse $\left\|\vec{\omega}_e\right\| = \pi\ rad/s$. L'angle β vaut 30° et au temps $t = 0$, le point M se trouve en A. On demande de déterminer la trajectoire du point M, sa vitesse absolue et son accélération absolue, en fonction du temps.



Réponses : Trajectoire :

$$\begin{cases} x(t) = 0.1\,t\,\sin\beta\cos\varphi \\ y(t) = 0.1\,t\,\sin\beta\sin\varphi \\ z(t) = 0.1\,t\,\cos\beta \end{cases}$$

$$\left\|\vec{v}_{M\,a}\right\| = 0.1\sqrt{1 + 0.25\,\pi^2\,t^2}\ ;\ \left\|\vec{a}_{M\,a}\right\| = \pi\sqrt{0.0025\,\pi^2\,t^2 + 0.01}$$

Exercices concernant principalement les "*mouvements par rapport à la terre*" (*§ 8.4.*)

84.01. *Si la terre était parfaitement sphérique*, la grandeur de "$\vec{g}$", dite accélération effective de la pesanteur (mesurée pour un objet immobile par rapport à la surface terrestre et situé au niveau de la mer) serait-elle la même en tous points de la surface du globe ? Expliquer et ... prouver !

Rappels :

- r_T = *rayon de la Terre* = 6370 *km* ;
- la terre fait un tour sur elle-même en 24 heures.

Réponse : Voir cours théorique

84.02. Un avion à réaction vole vers l'est le long de l'équateur à 450 *m/s,* à altitude constante. Quelle accélération de Coriolis subit-il ?

Réponse : $\left\|\vec{a}_{M\,c}\right\| = 0.06545\ m/s^2$ (direction centrifuge)

84.03. Un fleuve large de 1 *km* coule de la direction Sud vers la direction Nord, avec une vitesse de 5 *km/h*. Déterminer l'accélération de Coriolis que subissent les particules d'eau, en un endroit situé à 60° de latitude nord.

On s'attend à ce que la surface de l'eau s'établisse perpendiculairement à la direction donnée par le fil à plomb (verticale locale); or il n'en est pas ainsi ! Déterminer la rive où le niveau de l'eau est le plus élevé, et de combien ? (On sait que la surface de l'eau doit s'établir perpendiculairement au vecteur accélération réellement subie par l'eau).

Réponse : $h = 1.78\ cm$ (Sur la rive droite)

84.04. La planète Jupiter tourne autour de son axe en 9 *h* 51 *min*. Son rayon est environ égale à 7 10^4 *km* et l'accélération absolue de la pesanteur à sa surface est de 26.5 m/s^2. Représentez graphiquement les directions radiales et verticales en un point situé à 60° de latitude nord. Calculez l'accélération effective de la pesanteur en ce point et sa déviation par rapport à la verticale locale..

Réponses : $\left\|\vec{g}_r\right\| = 25.96\ m/s^2$; $\alpha = 2.1°$

84.05. Dans la *région* de Prétoria (Afrique du Sud) (28° longitude ouest, 23° latitude sud), le diamant extrait dans le sous-sol est remonté par l'intermédiaire d'un monte-charge. Pour ce faire, le monte-charge est relié à un câble bobiné sur une roue ($r = 2\ m$). La roue suit la loi de rotation suivante, lors de la descente du monte-charge :

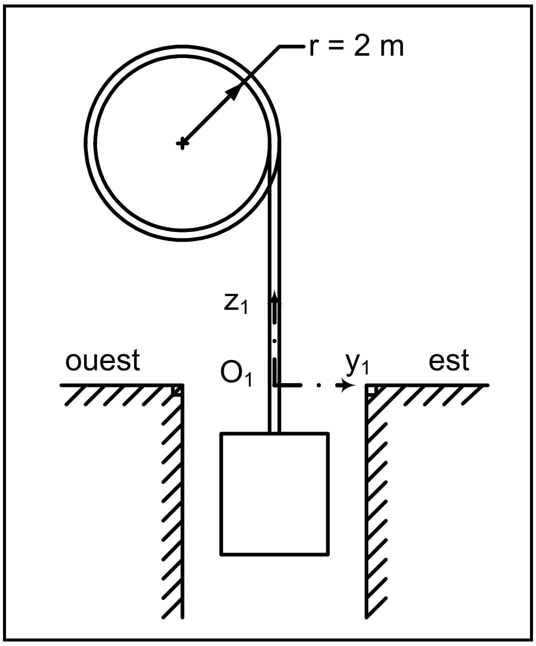
étape 1 : départ à l'altitude de 5 *m* au-dessus de O_1; accélération $\left\|\vec{\varepsilon}\right\| = 4\ rad/s^2$;

étape 2 : vitesse constante à partir de l'altitude de 0 *m*;

étape 3 : freinage à partir de la profondeur $z_1 = -300\ m$, avec $\left\|\vec{\varepsilon}\right\| = 4\ rad/s^2$.

L'axe de la roue est dirigé Nord-Sud. L'axe O_1z_1 est dirigé suivant la verticale locale.

Déterminer :



a) vitesse et accélération aux trois stades de la descente;
b) le déplacement par rapport à O_1z_1, dû à l'effet de Coriolis, lorsque le monte-charge arrive au fond du puits.
c) Dans cette région du globe, estimer l'obliquité entre la verticale locale et la normale à !a surface terrestre.

Renseignements complémentaires : $\|\vec{g}_{local}\| = 9.79\ m/s^2$; $r_{terre} = 6370\ km$.

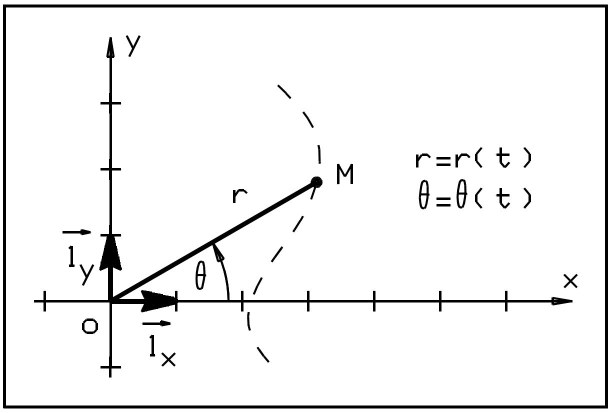
<u>Réponses</u> : a) b) $y_1 = 0.742\ m$ c) $\alpha \approx 0°\ 47'\ 15''$

<u>84.06.</u> Un avion vole selon un méridien (direction Sud ➔ Nord) à une altitude de 1000 *m* et à une vitesse de 750 *km/h*. Le but poursuivi étant le lâché d'un colis postal sur Bruxelles, à quel endroit doit-il effectuer cette opération ? On néglige la courbure de la terre et la résistance de l'air (Bruxelles : latitude 50° Nord).

<u>Réponse</u> : 2975 *m* au Sud de BXL et 2.82 *m* à l'Ouest de BXL

Exercices de *"synthèse"*

8S.01. Le mouvement d'un point *M* est repéré par les coordonnées polaires *r* et *θ*, toutes deux fonctions du temps. *En utilisant les techniques du "mouvement composé du point"* (système d'axes mobiles, lois de composition des vitesses et des accélérations), établir les formules des vitesses radiale $\vec{v}_r$ et transversale $\vec{v}_\theta$, et des accélérations radiale $\vec{a}_r$ et transversale $\vec{a}_\theta$.



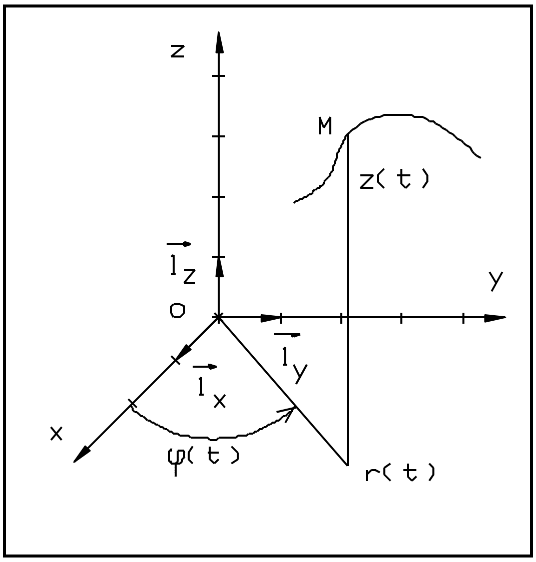
Remarques :

1) une composante radiale est alignée avec le rayon polaire; une composante transversale lui est perpendiculaire;
2) il n'est pas demandé de refaire la démonstration établie au chapitre 7 du syllabus; ceci est bien un exercice relatif au chapitre 8.

Réponse : Voir cours théorique

8S.02. Le mouvement d'un point M est repéré par les coordonnées cylindriques $r(t)$, $\varphi(t)$ et $z(t)$, toutes trois fonctions du temps. *En utilisant les techniques du "mouvement composé du point"* (système d'axes mobiles, lois de composition des vitesses et des accélérations), établir :

1) les formules des vitesses radiale $\vec{v}_r$, transversale $\vec{v}_\theta$ et verticale (ou axiale) $\vec{v}_z$.
2) les formules des accélérations radiale $\vec{a}_r$, transversale $\vec{a}_\theta$ et verticale (ou axiale) $\vec{a}_z$.

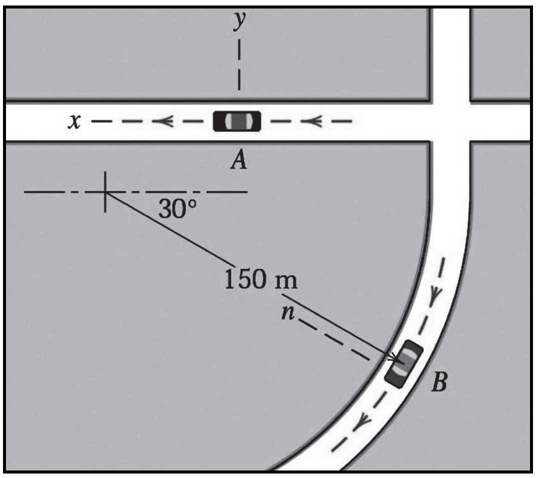


Remarque :

Une composante radiale est alignée avec le rayon polaire; une composante transversale lui est perpendiculaire; elles sont toutes deux parallèles au plan horizontal Oxy.

Réponse : Voir cours théorique

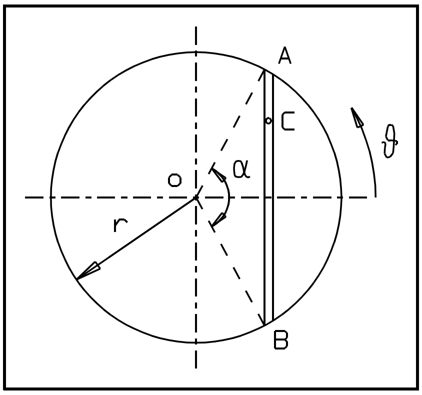
8S.03. La voiture A est en accélération vers la gauche à un taux de 1.2 m/s^2. Au moment illustré, sa vitesse est de 72 *km/h*. La voiture B circule sur un parcours circulaire de rayon de 150 *m* avec une vitesse constante de 54 *km/h*. Calculez les modules et les directions de la vitesse et de l'accélération de la voiture B pour un observateur assis dans la voiture A.



Réponses : $\left\|\vec{v}_{B/A}\right\| = 18.03\, m/s$; $\theta = 46.1°$

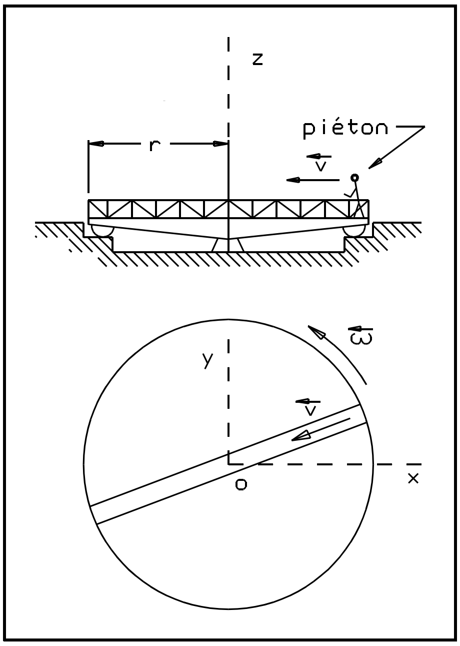
$\left\|\vec{a}_{B/A}\right\| = 0.76\, m/s^2$; $\beta = 97.5°$

8S.04. Un disque de rayon $r = 0.6\,m$ tourne autour d'un arbre passant par O et perpendiculaire au dessin, suivant la loi : $\theta = 3\,\pi\,t - 0.5\,\pi\,t^2$ (θ en *rad*, t en *s*). Une bille C se déplace dans la rainure $\overline{AB}$ avec une vitesse $v_C = 0.65 - 0.26\,t$ (en *m/s*). La rainure $\overline{AB}$ correspond à un angle au centre α de 120°.
En $t = 0$, la rainure $\overline{AB}$ est verticale, à droite de O et la bille se trouve en A et part vers B. Déterminer l'accélération absolue de C pour $t = 1\,s$.



Réponse : $\left\|\vec{a}_{C\,a}\right\| = 6.97\,m/s^2$

8S.05. Une passerelle tourne autour de l'axe Oz d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire $\vec{\omega}$. Un homme se tient sur le sol ferme, prêt à monter sur la passerelle. A l'instant où cette dernière passe devant lui, l'homme embarque sur la passerelle et avance vers l'axe Oz, à vitesse constante $\vec{v}$. On demande de déterminer la trajectoire, la vitesse et l'accélération de l'homme. De plus, quelle est la condition pour que l'homme débarque de la passerelle à l'endroit même où il a quitté le sol ferme ?



Réponses : Trajectoire :

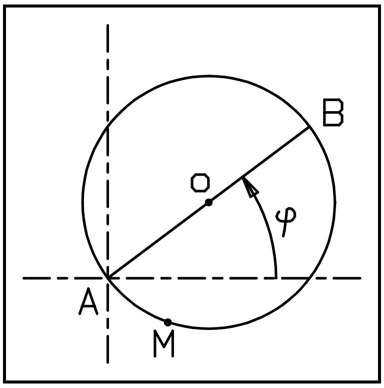
$$\begin{cases} x(t) = (-\,v\,t + r)\cos(\omega\,t) \\ y(t) = (-\,v\,t + r)\sin(\omega\,t) \end{cases}$$

$$\vec{v}_{M\,a} = -\,v\,\vec{1}_{x_1} + \omega\,(-\,v\,t + r)\,\vec{1}_{y_1}$$

$$\vec{a}_{M\,a} = -\,\omega^2\,(-\,v\,t + r)\,\vec{1}_{x_1} - 2\,v\,\omega\,\vec{1}_{y_1}$$

Condition : $\omega = (2\,k + 1)\,\pi\,\dfrac{v}{2\,r}$

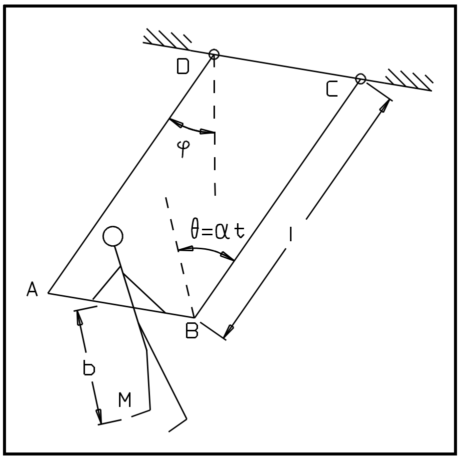
8S.06. Un disque de centre O et de rayon $r = 0.2\,m$ tourne autour du point A suivant la loi $\varphi = \pi\,t$ (φ en *rad*, t en *s*). Un insecte M parcourt la circonférence du disque à une vitesse scalaire constante $\left\|\vec{v}_0\right\| = 0.1\,m/s$. Au temps $t = 0$, le centre O se trouve sur l'horizontale et le point mobile M se trouve en A. Calculer, en fonction de *t*, la vitesse et l'accélération absolues de M.



Réponses :

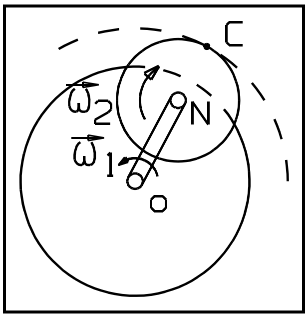
$$\vec{v}_{M\,a} = \begin{cases} \big(0.2\,\pi\sin(0.5\,t) + 0.1\sin(0.5\,t)\big)\,\vec{1}_{x_1} \\ +\,\big(0.2\,\pi - 0.2\,\pi\cos(0.5\,t) - 0.1\cos(0.5\,t)\big)\,\vec{1}_{y_1} \end{cases}$$

$$\vec{a}_{M\,a} = \begin{cases} \left(-\,0.2\,\pi^2 + \left(0.2\,\pi^2 + 0.05 + 0.2\,\pi\right)\cos(0.5\,t)\right)\vec{1}_{x_1} \\ +\left(\left(0.2\,\pi^2 + 0.05 + 0.2\,\pi\right)\sin(0.5\,t)\right)\vec{1}_{y_1} \end{cases}$$



8S.07. Le trapèze ABCD effectue des oscillations autour de $\overline{CD}$ d'après la loi : $\varphi = \varphi_0\,\sin(\alpha\,t)$. Le trapéziste tourne autour de la barre $\overline{AB}$ avec une vitesse angulaire α constante, mesurée relativement au trapèze. Déterminer l'accélération absolue de M (semelle du trapéziste) à une distance b de la barre, au temps $t = \pi/\alpha\,[s]$, en supposant que, pour $t = 0$, le trapèze est vertical et le trapéziste vertical également avec la tête vers le haut.

Réponse :
$$\left\|\vec{a}_{M\,a}\right\| = \varphi_0^2\,\alpha^2\,(l-b) + 2\,\varphi_0\,\alpha^2\,b - \alpha^2\,b$$



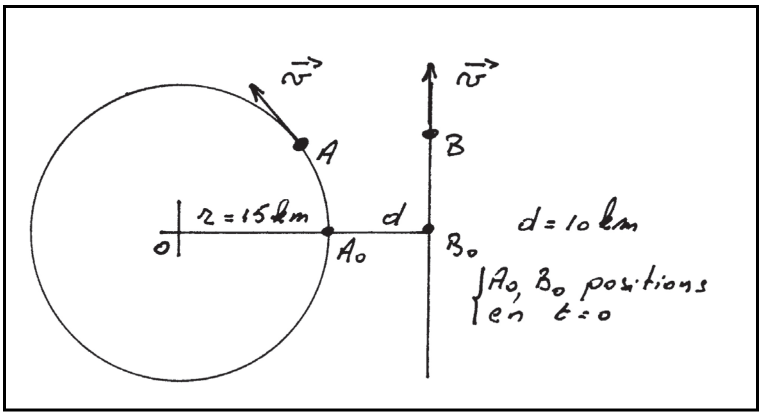
8S.08. Un carrousel est conçu de la manière suivante :

- un grand plateau circulaire tourne à vitesse $\left\|\vec{\omega}_1\right\| = 2\,\pi\ rad/s$;
- un petit plateau circulaire, de centre N, à distance $a = 2\ m$ de O, de rayon $b = 1\ m$, tourne autour de son centre à vitesse $\vec{\omega}_2$, en sens opposé à $\vec{\omega}_1$.

Que doit valoir $\left\|\vec{\omega}_2\right\|$ pour que le point du petit disque situé géométriquement en C ait une vitesse nulle (roulement sans glissement sur le pointillé considéré comme fixe). Dans ce cas, que vaut la norme de l'accélération absolue d'un point du pourtour du petit plateau ? A-t-elle un maximum ?

Réponses :
$$\left\|\vec{\omega}_2\right\| = -\left\|\vec{\omega}_1\right\|\frac{a+b}{b}\ ;\ \left\|\vec{a}_{M\,a}\right\| = \omega_1^2\,\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + a^2 + 2\,a\,b\cos(\omega_2\,t)}$$
$$\left\|\vec{a}_{C\,a}\right\| = \frac{a}{b}(a+b)\,\omega_1^2 = 24\,\pi^2\ m/s^2$$

8S.09. Deux avions volent dans un plan horizontal avec une vitesse dont la norme, constante, est égale à 750 *km/h*. La trajectoire de l'avion A est un cercle dont le rayon vaut 15 *km*. Le second avion B, vole en ligne droite. A l'instant $t = 0$, la position des 2 avions est respectivement A_0 et B_0, la distance d valant à cet instant 10 *km*.



Recherchez la vitesse relative, à l'instant $t = 0$, de l'avion A par rapport à l'avion B ($\vec{v}_{A/B}$) et visversa ($\vec{v}_{B/A}$).

<u>*Réponses*</u> : $\left\|\vec{v}_{A/B}\right\| = 0$; $\left\|\vec{v}_{B/A}\right\| = 500\ km/h$