CHAPITRE 9. MOUVEMENT DU SOLIDE . . . . . ***- 9.1 -***
9.1. Cinématique d'un ensemble de points . . . . . ***- 9.1 -***
9.1.1. Introduction . . . . . ***- 9.1 -***
9.1.2. Equiprojectivité des vitesses . . . . . ***- 9.2 -***
9.1.3. Degrés de liberté . . . . . ***- 9.5 -***
9.1.4. Angles d'Euler . . . . . ***- 9.6 -***
9.1.5. Vitesse et accélération d'un point : première approche . . . . . ***- 9.7 -***
9.2. Mouvements simples du solide . . . . . ***- 9.9 -***
9.2.1. Translation . . . . . ***- 9.9 -***
9.2.2. Rotation . . . . . ***- 9.10 -***
9.2.3. Conclusions . . . . . ***- 9.13 -***
9.3. Mouvement plan du corps solide . . . . . ***- 9.13 -***
9.3.1. Définition . . . . . ***- 9.13 -***
9.3.2. Décomposition en une translation suivie d'une rotation . . . . . ***- 9.14 -***
9.3.3. Décomposition en une suite de rotations infinitésimales . . . . . ***- 9.19 -***
A)** Principe de la méthode* . . . . . ***- 9.19 -
B)** Détermination et utilisation du C.I.R.* . . . . . ***- 9.21 -
C)** Discussion* . . . . . ***- 9.22 -
D)** Base et roulante* . . . . . ***- 9.25 -
9.3.4. Mécanismes : relations de Roger . . . . . ***- 9.28 -***
9.4. Mouvement composé du solide . . . . . ***- 9.33 -***
9.4.1. Introduction . . . . . ***- 9.33 -***
9.4.2. Expression analytique de la vitesse . . . . . ***- 9.33 -***
A)** Première approche.* . . . . . ***- 9.34 -
B)** Seconde approche* . . . . . ***- 9.34 -
9.4.3. Composition de deux translations . . . . . ***- 9.35 -***
9.4.4. Composition de deux mouvements de rotation . . . . . ***- 9.35 -***
A)** Composition de deux rotations d'axes parallèles* . . . . . ***- 9.36 -
B)** Composition de deux rotations d'axes concourants* . . . . . ***- 9.39 -
9.4.5. Composition d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation . . . ***- 9.41 -***
A)** La vitesse et la vitesse angulaire sont perpendiculaires* . . . . . ***- 9.41 -
B)** La vitesse et la vitesse angulaire sont parallèles* . . . . . ***- 9.42 -
C)** La vitesse et la vitesse angulaire sont de directions quelconques* . . . . . ***- 9.42 -
9.5. Travaux virtuels et conservation de la puissance . . . . . ***- 9.43 -***
9.5.1. Introduction . . . . . ***- 9.43 -***
9.5.1. Exemples . . . . . ***- 9.43 -***

CHAPITRE 9. MOUVEMENT DU SOLIDE

9.1. *Cinématique d'un ensemble de points*

9.1.1. Introduction

Un solide est un système mécanique constitué d'un ensemble continu de points matériels.

Le solide est supposé indéformable ce qui signifie que la distance entre deux quelconques de ces points reste constante lors de tout déplacement.

Ce concept de solide est un modèle mathématique; dans la réalité, tous ces solides se déforment sous l'effet des forces appliquées. Toutefois, dans bien des cas, les déformations seront très petites par rapport aux dimensions de solide et le modèle sera une approximation satisfaisante du solide réel.

On sait que le mouvement d'un point M est entièrement spécifié si on se donne la fonction vectorielle :

$$\vec{r} = x\,\vec{1}_x + y\,\vec{1}_y + z\,\vec{1}_z$$

avec :
$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}$$

Si on considère le mouvement d'un solide composé de *n* points M_i , on pourrait le spécifier par *n* fonctions vectorielles du même type (*n* étant fini ou infini), et caractériser le mouvement de chacun des points M_i par sa trajectoire C_i, sa vitesse $\vec{v}_{M_i}$, son accélération $\vec{a}_{M_i}$ (***fig. 9.1.***).

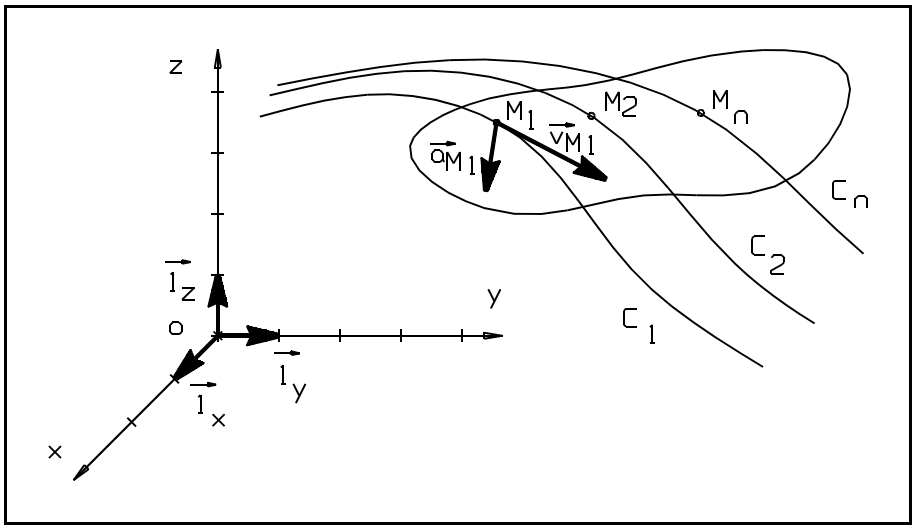

fig. 9.1. - *Trajectoire.*

Le problème que nous allons traiter est donc celui de la détermination, en ***fonction du temps***, du "*champ des vitesses*" et du "*champ des accélérations*" du solide : le champ instantané des vitesses est l'ensemble, à un instant donné, des vecteurs vitesses de tous les points du solide; on définit de même le champ instantané des accélérations, qui est, à un instant donné, l'ensemble des vecteurs accélérations de tous les points du solide.

On se rend immédiatement compte de la complexité d'un problème de cinématique du solide ! (déterminer le vecteur vitesse de tous les points à un instant déterminé, puis recommencer ce travail pour chaque instant ...). Il existe heureusement, d'une part, des hypothèses de travail, d'autre part des mouvements simples, qui facilitent ces déterminations des champs de vitesses et accélérations; nous montrerons que les mouvements les plus complexes peuvent à leur tour se décomposer en mouvements plus simples.

9.1.2. Equiprojectivité des vitesses

Si le corps solide dont on étudie le mouvement est ***indéformable,*** les mouvements des différents points du solide ne sont pas indépendants les uns des autres : en effet, la distance séparant deux quelconques des points d'un solide *S* indéformable reste invariable (***fig. 9.2.***) :

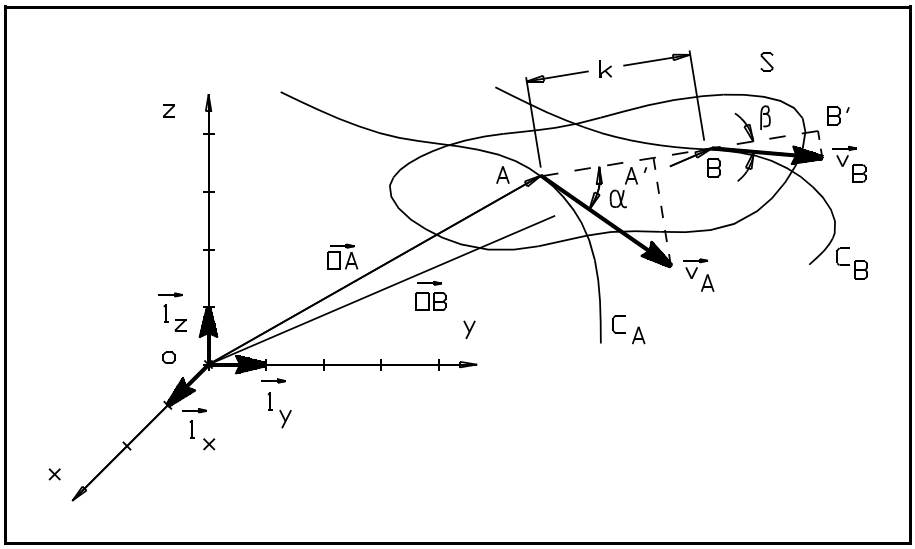

fig. 9.2. *- Equiprojectivité des vitesses.* $\overline{AA'} = \overline{BB'}$

$$\left\|\vec{AB}\right\| = k \quad \Leftrightarrow \quad \vec{AB} \bullet \vec{AB} = k^2$$

Cette relation exprime les liaisons qui existent entre les points d'un solide, et qui, en fait, définissent le solide. En dérivant cette relation, on obtient :

$$\frac{d\left(\vec{AB} \bullet \vec{AB}\right)}{dt} = \vec{0} = \dot{\vec{AB}} \bullet \vec{AB} + \vec{AB} \bullet \dot{\vec{AB}} = 2\,\dot{\vec{AB}} \bullet \vec{AB}$$

Or :

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{AB}} \bullet \vec{AB} = \vec{0} = \left(\dot{\vec{OB}} - \dot{\vec{OA}}\right) \bullet \vec{AB}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_B \bullet \vec{AB} = \vec{v}_A \bullet \vec{AB}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\|\vec{v}_B\right\| \left\|\vec{AB}\right\| \cos\beta = \left\|\vec{v}_A\right\| \left\|\vec{AB}\right\| \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\|\vec{v}_B\right\| \cos\beta = \left\|\vec{v}_A\right\| \cos\alpha$$

Les vitesses de deux points quelconques d'un solide ont des projections égales sur la droite qui les joint.

On dit que le champ des vitesses d'un solide est "*équiprojectif*".

Une application intéressante de ce théorème est la détermination d'une vitesse par double équiprojectivité.

Soit $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ deux vitesses du solides connues intégralement (direction, sens et intensité). (On vérifiera évidemment l'équiprojectivité des vitesses $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ sur $\overline{AB}$). Pour connaître la vitesse du solide en un point C, il suffira de relier le point A au point C et de projeter $\vec{v}_A$ sur cette droite, on fait de même avec $\vec{v}_B$ que l'on projette sur $\overline{BC}$. Sachant que $\overline{AN} = \overline{CN'}$ et que $\overline{BM} = \overline{CM'}$, en construisant le "*parallélogramme*" on trouve la vitesse en C.

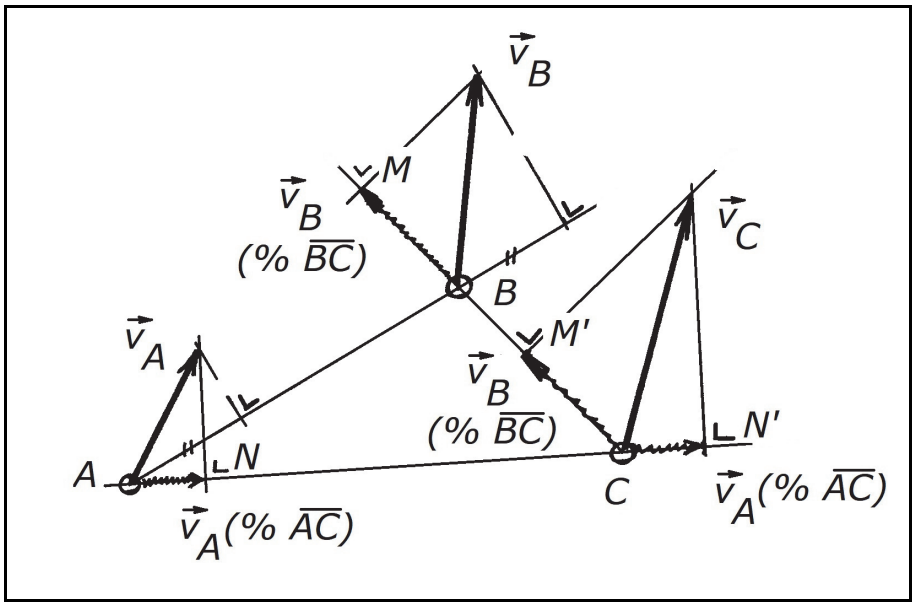

fig. 9.3. *- Utilisation de l'équiprojectivité des vitesses pour connaître la vitesse d'un troisième point du solide.*

<u>*Remarque*</u> :
Si le point C est aligné avec A et B on appliquera les relations de Roger (voir ***§ 9.3.4.***).

Application 9.1. Le piston P, dans un cylindre vertical, est actionné par le levier $\overline{OA}$ et la bielle $\overline{BC}$. Les dimensions sont les suivantes :
$\overline{OB} = 30\ cm$; $\overline{BC} = 10\sqrt{3}\ cm$; $d = 20\sqrt{3}\ cm$.
La vitesse angulaire du levier $\overline{OA}$ autour de O est $\|\vec{\omega}\| = 2\ rad/s$.
Déterminer $\|\vec{v}_P\|$.

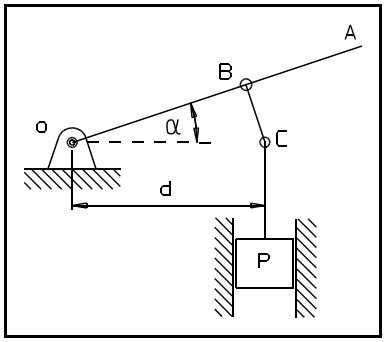

fig. 9.4. *- Application 9.1.*

Solution :

Recherche des directions des vitesses

La vitesse de P est égale à la vitesse de C puisque $\overline{CP}$ est un solide indéformable dont le mouvement est une translation pure.

La vitesse de B ne sait être que perpendiculaire au levier $\overline{OA}$ puisque le levier effectue une rotation pure autour de O.

Equiprojectivité des vitesses

La bielle $\overline{BC}$ étant un solide, on peut utiliser la notion d'équiprojectivité des vitesses. La projection de $\vec{v}_C$ sur la droite reliant $\overline{BC}$ doit égaler la vitesse de B projetée sur $\overline{BC}$, c'est-à-dire directement $\vec{v}_B$. Soit :

$$\|\vec{v}_C\| \cos\alpha = \|\vec{v}_B\|$$

$$\Rightarrow \quad \|\vec{v}_P\| = \|\vec{v}_C\| = \frac{\|\vec{\omega}_{\overline{OA}}\| \overline{OB}}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{2 \times 0.3}{\cos\pi/6} = 0.693\ m/s$$

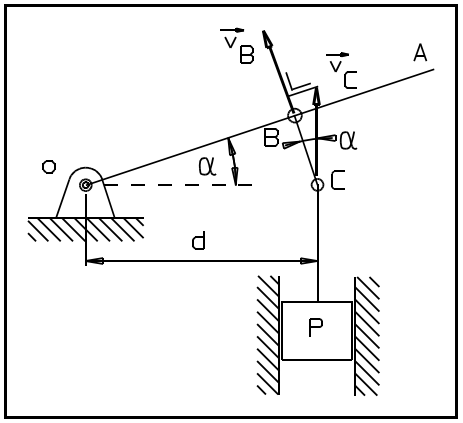

fig. 9.5. *- Equiprojectivité des vitesses.*

9.1.3. Degrés de liberté

Cette notion sera développée plus en détail dans le chapitre ***9C. Analyse des mécanismes***.

Tout comme on l'a fait pour le point, il importe de pouvoir repérer exactement la position d'un solide. Ce repérage doit permettre à tout instant de déterminer exactement la position d'un point arbitraire M_i du système étudié, généralement par la fonction vectorielle $\vec{r}_i$.

Comme les distances entre deux points d'un solide sont fixées, il suffira de connaître à chaque instant les positions exactes de trois de ses points non colinéaires pour en déduire celles des autres (***fig. 9.6.***).

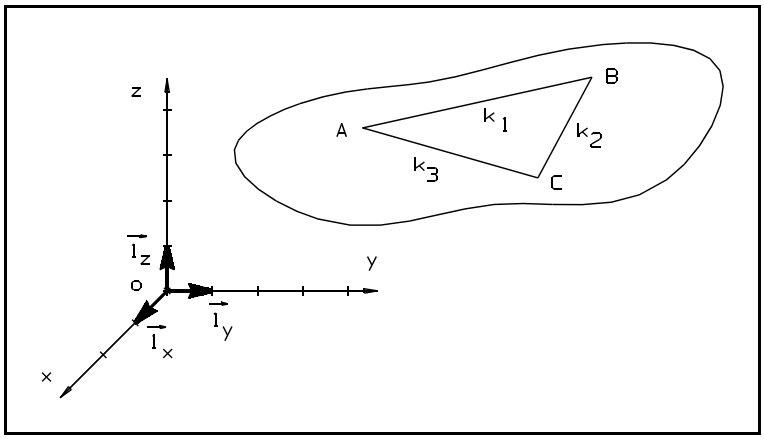

fig. 9.6. *- Solide indéformable : degrés de liberté.*

Avec : A (x_A; y_A; z_A); B (x_B; y_B; z_B); C (x_C; y_C; z_C) et

$$k_1 = \left\| \vec{AB} \right\| ; \qquad k_2 = \left\| \vec{BC} \right\| ; \qquad k_3 = \left\| \vec{CA} \right\| .$$

Le ***"nombre de degrés de liberté"*** du solide est le nombre minimum de coordonnées indépendantes, nécessaires pour repérer la position du solide. Pour un solide se déplaçant librement dans l'espace, on a besoin de 3×3 coordonnées pour A, B, C, ces neuf coordonnées devant vérifier les 3 relations de constance des distances k_1, k_2 et k_3; il y a donc $9 - 3 = 6$ coordonnées indépendantes, c'est-à-dire six degrés de liberté, pour un solide pouvant se mouvoir librement dans l'espace.

Dans le cas d'un mouvement plan du solide, le nombre de degrés de liberté tombe à 3, voir plus loin.

S'il existe des liaisons sur le solide, comme par exemple un point qui reste fixe, ou qui doit se déplacer sur une trajectoire précise, alors le nombre de degrés de liberté est évidemment réduit en conséquence.

Application 9.2. Déterminer le nombre de degrés de liberté :
a) d'une bille roulant sur un plan;
b) d'un corps possédant un point fixe;
c) d'un corps possédant deux points fixes.

Solution :

a) Le centre de la sphère doit toujours rester à distance déterminée du sol; le mouvement de ce centre ne fait donc intervenir que deux coordonnées indépendantes, au lieu de trois. Le système ne possède donc que cinq degrés de liberté (5 *ddl*).

b) Le fait de posséder un point fixe supprime trois coordonnées; il n'y a donc que trois degrés de liberté (3 *ddl*).

c) Avec deux points fixes, la position du corps ne dépend plus que d'un seul degré de liberté (1 *ddl*).

9.1.4. Angles d'Euler

On détermine traditionnellement les six coordonnées indépendantes d'un solide *S* libre dans l'espace en choisissant d'abord un point A de ce solide (souvent le centre de masse G) auquel correspondent les trois premières coordonnées.

Ensuite, on construit en ce point un trièdre AXYZ ***lié au solide*** que l'on repère, par rapport au trièdre de référence Axyz, au moyen de trois angles caractéristiques, dits "*angles d'Euler* [1] " (***fig. 9.7.***).

Ces trois angles d'Euler correspondent à trois rotations planes successives qui permettent de faire coïncider la base Axyz avec la base AXYZ, ce qui définit au passage deux bases intermédiaires orthonormées directes.

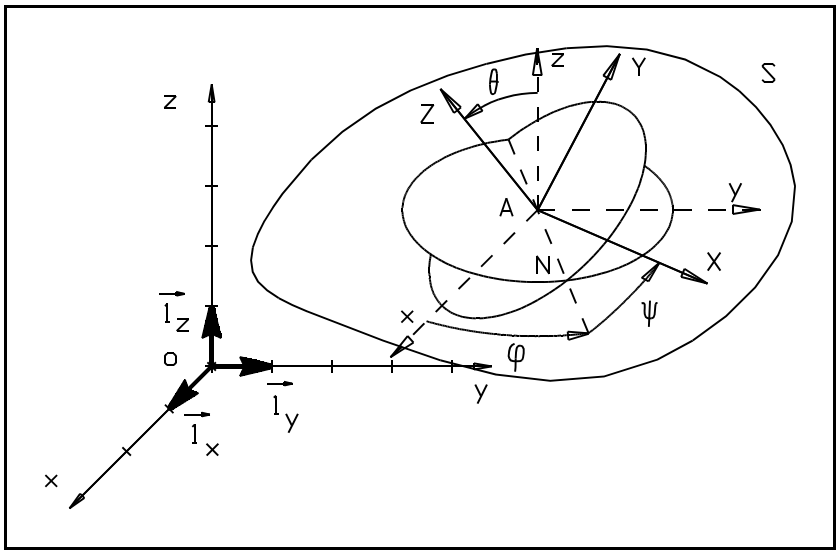

fig. 9.7. *- Angles d'Euler : définition.*

[1] *Euler Leonhard (1707 [Bâle] - 1783 [Saint-Pétersbourg]) : mathématicien et physicien suisse.*

On définit la droite $\overline{AN}$, intersection des plans Axy et AXY, comme étant la "*ligne des noeuds*" ou "*axe nodal*".

Les trois angles d'Euler, que l'on retrouve notamment dans l'étude du mouvement gyroscopique, sont appelés :

- φ : angle de "*précession*" (rotation autour de l'axe Az);
- θ : angle de "*nutation*" (rotation autour de l'axe nodal $\overline{AN}$);
- Ψ : angle de "*rotation propre*" (rotation autour de l'axe AZ);

La rotation de l'ensemble pourra être déterminée par la connaissance du vecteur de Poisson [(2)] associé, soit :

$$\boxed{\vec{\omega}_P = \dot{\varphi}\,\vec{1}_z + \dot{\theta}\,\vec{1}_{\overline{AN}} + \dot{\Psi}\,\vec{1}_Z} \quad \textbf{(éq. 9.37.)}$$

9.1.5. Vitesse et accélération d'un point : première approche

Soit un solide dont nous repérons la position par celle d'un trièdre AXYZ fixé à lui (***fig. 9.8.***). Tout point B est ainsi fixe par rapport à ce trièdre mobile AXYZ.

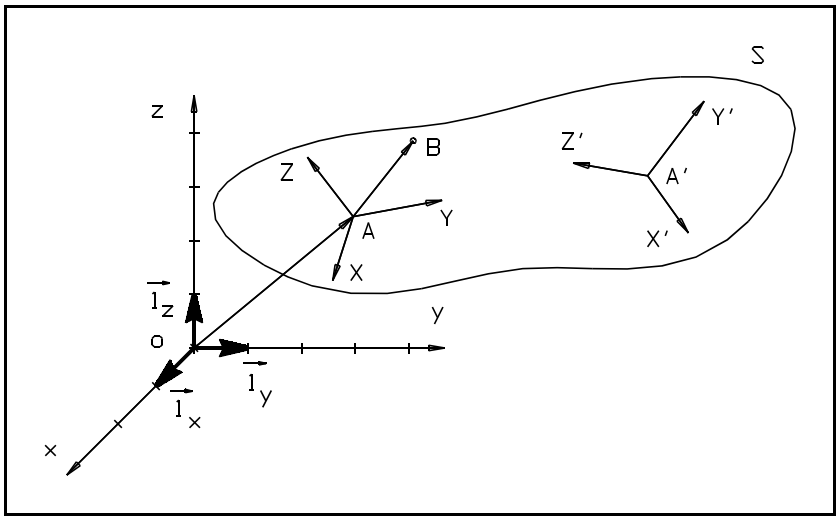

fig. 9.8. *- Vitesse et accélération.*

On peut appliquer directement les formules établies pour le mouvement composé du point avec la simplification due à un mouvement relatif nul, en effet, si le point B est fixe par rapport au trièdre mobile, le mouvement relatif est nul, d'où : $\vec{v}_{B\,r} = \vec{a}_{B\,r} = \vec{a}_{B\,Cor} = \vec{0}$. On trouve ainsi pour la vitesse :

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \overline{AB}} \quad \textbf{(éq. 9.39.)}$$

et pour l'accélération :

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{\overline{AB}} \times \vec{AB} + \vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \left(\vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \vec{AB} \right)} \quad \textbf{(éq. 9.40.)}$$

[(2)] *Poisson Siméon Denis (1781 [Pithiviers] - 1840 [Sceaux]) : mathématicien, géomètre et physicien français.*

formules dans lesquelles, $\vec{\omega}_{\overline{AB}}$ représente la vitesse angulaire du solide $\overline{AB}$ et $\vec{\varepsilon}_{\overline{AB}}$ l'accélération angulaire du solide $\overline{AB}$.

En fait, si on se rappelle que dans le mouvement composé du point, $\vec{\omega}_P$ (vecteur de Poisson) représente le vecteur rotation instantanée du trièdre, dans notre cas il représente le vecteur rotation instantané du solide *S*.

Le vecteur $\vec{\omega}_{\overline{AB}}$ (ou $\vec{\omega}_P$) reste le même, quel que soit le choix du trièdre lié au solide : en effet, si on prend le trièdre A'X'Y'Z', on aura, pour tout point B :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{A'} + \vec{\omega}'_{\overline{AB}} \times \vec{A'B}$$

et, en particulier :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A'} + \vec{\omega}'_{\overline{AB}} \times \vec{A'A} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_{A'} = \vec{v}_A - \vec{\omega}'_{\overline{AB}} \times \vec{A'A}$$
$$= \vec{v}_A + \vec{\omega}'_{\overline{AB}} \times \vec{AA'}$$

ce qui donne :

$$\vec{v}_B = \left(\vec{v}_A + \vec{\omega}'_{\overline{AB}} \times \vec{AA'} \right) + \vec{\omega}'_{\overline{AB}} \times \vec{A'B} = \vec{v}_A + \vec{\omega}'_{\overline{AB}} \times \vec{AB}$$

et sachant que :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \vec{AB}$$

ce qui implique nécessairement que $\vec{\omega}'_{\overline{AB}} = \vec{\omega}_{\overline{AB}}$.

Ainsi donc, $\vec{\omega}_{\overline{AB}}$ (ou $\vec{\omega}_P$) ne dépend pas du choix du repère AXYZ, mais est bien caractéristique du mouvement du solide.

Remarque :
Par la suite on prendra la notation $\vec{\omega}_P$ et $\vec{\varepsilon}_P$ pour, respectivement, la vitesse et l'accélération angulaire d'un solide quelconque *S*.

9.2. *Mouvements simples du solide*

9.2.1. Translation

Définition : Un solide effectue un mouvement de translation si une droite quelconque du solide en mouvement se déplace en restant parallèle à elle-même (***fig. 9.9.***).

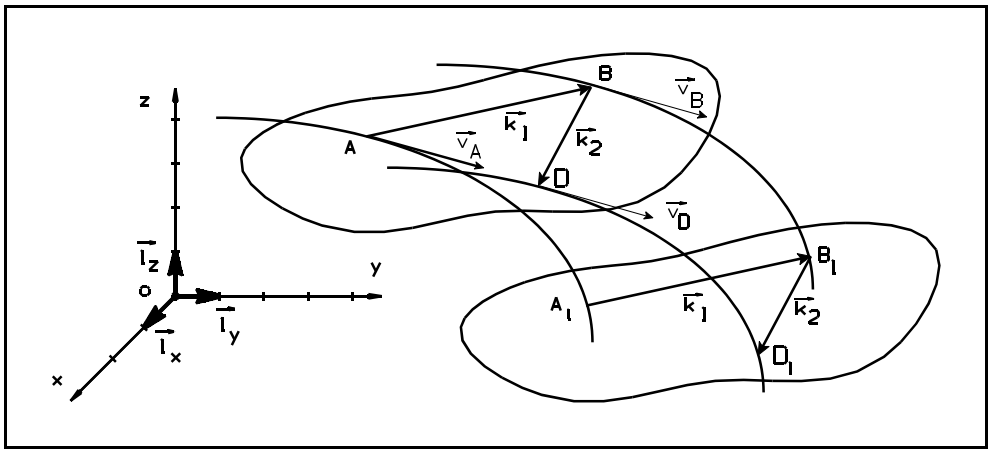

fig. 9.9. *- Mouvement simple du solide.*

Ainsi : $\vec{AB} = \vec{A_1B_1} = \vec{k}_1$ et $\vec{BD} = \vec{B_1D_1} = \vec{k}_2$ et ce à tout instant ($\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ constant en grandeur *et* en direction).

A l'instant *t*, on a :

$$\vec{v}_A = \frac{d\,\vec{OA}}{dt} = \dot{\overrightarrow{OA}}$$

$$\vec{v}_B = \frac{d\,\vec{OB}}{dt} = \frac{d\left(\vec{OA} + \vec{k}_1\right)}{dt} = \dot{\overrightarrow{OA}} = \vec{v}_A$$

$$\vec{v}_D = \frac{d\,\vec{OD}}{dt} = \frac{d\left(\vec{OA} + \vec{k}_1 + \vec{k}_2\right)}{dt} = \dot{\overrightarrow{OA}} = \vec{v}_A$$

$\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_D = \ldots}$ et donc aussi $\boxed{\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_D = \ldots}$

Dans le mouvement de translation tous les points du corps décrivent les mêmes trajectoires (superposables) et à chaque instant ils possèdent des vitesses et des accélérations égales en module et en direction.

Conformément aux formules établies en ***§ 9.1.5.***, le mouvement de translation est caractérisé par :

$$\textit{Translation} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\omega}_P = \vec{\varepsilon}_P = \vec{0}$$

On peut donc parler, dans le mouvement de translation, de "*vitesse du solide*" et "*d'accélération*

du solide", égales à la vitesse et à l'accélération de n'importe lequel de ses points. (Pour tous les mouvements autres que la translation, les points du solide se déplacent avec des vitesses et des accélérations différentes, et pour ces mouvements les expressions "*vitesse du solide*" ou "*accélération du solide*" n'ont pas de sens).

Remarques :

1) "*translation*" ne signifie pas "*mouvement rectiligne*" : il existe des *translations rectilignes* et *curvilignes*. La figure ***9.10.*** représente deux roues qui sont supposées rouler sur un rail, qui est fixe. Les mouvements des deux roues sont solidarisés par une bielle $\overline{AB}$. Cette bielle est animée d'un mouvement de translation bien que tous ses points décrivent des cycloïdes.

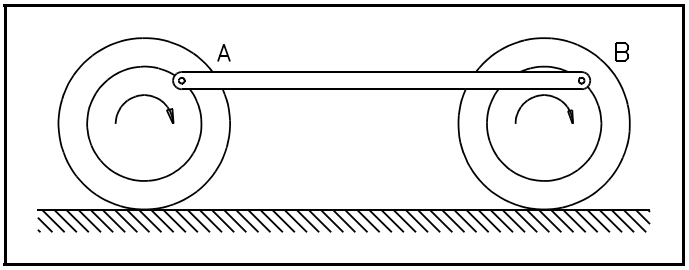

fig. 9.10. *- $\overline{AB}$ Solide en translation.*

2) Si les trajectoires des points du solide sont des droites on aura une trajectoire rectiligne.

9.2.2. Rotation

Définition : Un solide effectue un mouvement de rotation si deux points du solide (ou en tous cas deux points qui lui sont invariablement liés) restent fixes (***fig. 9.11.***).

Soient A et B ces deux points fixes tels que :

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{0} \\ \vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{0} \end{cases}$$

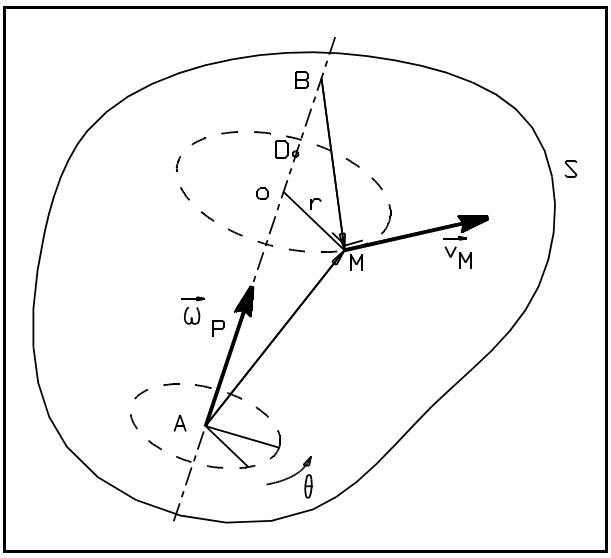

fig. 9.11. *- Solide en rotation.*

Or, par ***§ 9.1.5.***, on sait que :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_P \times \vec{AB}$$

de ce fait : $\vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \vec{AB} = \vec{0}$, ce qui entraîne que :

- soit $\vec{\omega}_P = \vec{0}$ ⇒ Solide au repos
- soit $\vec{\omega}_P \,//\, \vec{AB}$ ⇒ Solide en rotation

et ainsi, $\vec{\omega}_P$, non nul, doit être de direction $\overline{AB}$ constante (mais de module éventuellement variable !).

Tous les points de la droite $\overline{AB}$ sont fixes; par exemple, pour le point D, quelconque sur $\overline{AB}$:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{\omega}_P \times \vec{AD} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

La droite $\overline{AB}$ est ***l'axe de la rotation***.

Tous les points du solide, hors de l'axe de rotation, décrivent un mouvement circulaire dans un plan perpendiculaire à cet axe; le solide étant indéformable, tous les points du solide ont même vitesse angulaire. Ainsi, pour le point M :

$$\begin{aligned}\vec{v}_M &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_P \times \vec{AM} = \vec{\omega}_P \times \vec{AM} \\ &= \vec{v}_B + \vec{\omega}_P \times \vec{BM} = \vec{\omega}_P \times \vec{BM} \\ &= \vec{v}_O + \vec{\omega}_P \times \vec{OM} = \vec{\omega}_P \times \vec{OM}\end{aligned}$$

$\vec{v}_M$ est bien en permanence perpendiculaire à $\overline{AB}$, et $\|\vec{v}_M\| = \|\vec{\omega}_P\| \|\vec{DM}\| \underbrace{\sin\theta}_{=1}$ ce qui implique :

$$\|\vec{v}_M\| = \|\vec{\omega}_P\| r = \left\|\dot{\vec{\theta}}\right\| r$$

L'accélération de M est bien celle due à un mouvement circulaire :

$$\vec{a}_M = \underbrace{\vec{a}_A}_{=\vec{0}} + \vec{a}_{M\,n} + \vec{a}_{M\,t}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_{M\,n} &= \vec{\omega}_P \times \left(\vec{\omega}_P \times \vec{AM}\right) = \vec{\omega}_P \times \left(\vec{\omega}_P \times \vec{BM}\right) \\ &= \vec{\omega}_P \times \left(\vec{\omega}_P \times \vec{OM}\right) \\ &= -\omega_P^2 \, \vec{OM} = -\dot{\theta}^2 \, \vec{OM}\end{aligned}$$

$\vec{a}_{M\,n}$ est bien $\perp$ à $\vec{\omega}_P$ dirigé de M vers O

et

$$\begin{aligned}\vec{a}_{M\,t} &= \vec{\varepsilon}_P \times \vec{AM} = \vec{\varepsilon}_P \times \vec{BM} \\ &= \vec{\varepsilon}_P \times \vec{OM} \quad avec \quad \varepsilon = \ddot{\theta}\end{aligned}$$

$\vec{a}_{M\,t}$ est bien $\perp$ à $\vec{\varepsilon}_P$

La loi du mouvement de rotation est ainsi entièrement connue si on connaît :

- l'axe $\overline{AB}$ de la rotation;
- la loi $\theta = f(t)$ autour de cet axe, dont se déduisent la vitesse angulaire $\omega_P = \dot{\theta}$ et l'accélération angulaire $\varepsilon_P = \ddot{\theta}$, toutes deux alignées suivant l'axe $\overline{AB}$.

On pourrait dès lors définir des "*mouvements de rotation uniforme*", des "*mouvements de rotation uniformément variée*", etc.

$\vec{\omega}_P$ et $\vec{\varepsilon}_P$ peuvent être considérés comme des vecteurs glissants, sur l'axe de rotation $\overline{AB}$, puisqu'ils concernent tous les points du solide.

Application 9.5. Un poids B fait tourner un arbre de rayon r et un pignon de rayon r_1, monté sur le même axe que l'arbre. Le mouvement du poids débute de l'état de repos et s'effectue avec une accélération constante $\vec{a}_B$. Déterminer la loi de rotation du pignon de rayon r_2 qui s'engrène avec le pignon de rayon r_1.

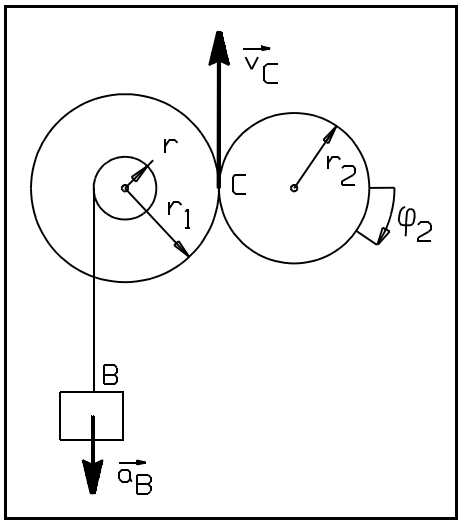

fig. 9.12. *- Application 9.5.*

Solution :

La vitesse scalaire de B vaut :

$\|\vec{v}_B\| = \|\vec{a}_B\| t$, dirigée vers le bas ($t > 0$).

Recherche de la vitesse angulaire ω_1

Les points de la jante de l'arbre auront la même vitesse :

$$\|\vec{v}_B\| = \|\vec{\omega}_1\| r = \|\vec{a}_B\| t \quad \Rightarrow \quad \|\vec{\omega}_1\| = \frac{\|\vec{a}_B\| t}{r}$$

Condition de non glissement

Au point de contact de deux solides, s'il n'y a pas de glissement, les vitesses sont égales.

Vu qu'au point C la vitesse scalaire $\|\vec{v}_C\|$ doit être la même :

$$\|\vec{v}_C\| = \|\vec{\omega}_1\| r_1 = \|\vec{\omega}_2\| r_2 \quad \left(avec : \vec{\omega}_2 \text{ de sens opposé à } \vec{\omega}_1\right)$$

$$\Rightarrow \quad \|\vec{\omega}_2\| = \frac{-\|\vec{\omega}_1\| r_1}{r_2} = \frac{-r_1 \|\vec{a}_B\| t}{r_2 \, r}$$

Or : $\vec{\omega}_2 = \dot{\vec{\varphi}}_2 \quad \Rightarrow \quad \|\vec{\varphi}_2\| = \int \|\vec{\omega}_2\| \, dt = \frac{-r_1 \|\vec{a}_B\| t^2}{2 \, r_2 \, r} + \|\vec{\varphi}_{0\,2}\|$

où $\varphi_{0\,2}$ est la position angulaire du pignon de rayon r_2 à l'instant $t = 0$.

9.2.3. Conclusions

De l'expression déduite en ***§ 9.1.5.***, et des expressions du mouvement de translation et du mouvement de rotation, on peut conclure que tout mouvement du solide peut se ***décomposer en une translation combinée à une rotation***. Par exemple, un mouvement hélicoïdal d'un solide est un mouvement dans lequel une droite (l'axe du mouvement) du solide reste fixe en pouvant glisser sur elle-même; un point du corps - non situé sur l'axe - décrit une hélice circulaire autour de cet axe; tous les points du solide décrivent simultanément autour de l'axe des hélices circulaires de même pas (mais de rayons différents).

9.3. *Mouvement plan du corps solide*

9.3.1. Définition

> *Définition* : On entend par mouvement plan le mouvement du solide dans lequel tous ses points se déplacent parallèlement à un plan fixe π : $\vec{v}_M \;//\; \pi \;\forall\; M \in Solide$ (***fig. 9.13.***).

Soit le trièdre Oxyz, tel que Oxy est parallèle à π; soit σ l'intersection du solide S avec Oxy. Il suffit, pour connaître entièrement le mouvement du solide S, d'étudier le mouvement de σ dans le plan Oxy; en effet, tous les points d'une droite A'AA" du solide, perpendiculaire au plan π, se déplacent de façon identique (voir les trajectoires C_A, $C_{A'}$ et $C_{A"}$ "*superposables*").

$$\vec{AA'} = k\,\vec{1}_z$$

avec k constant d'où :

$$\vec{v}_{A'} = \frac{d\,\vec{OA'}}{dt} = \frac{d\left(\vec{OA} + \vec{AA'}\right)}{dt} = \frac{d\left(\vec{OA} + k\,\vec{1}_z\right)}{dt}$$
$$= \vec{v}_A + \vec{0} = \vec{v}_A$$

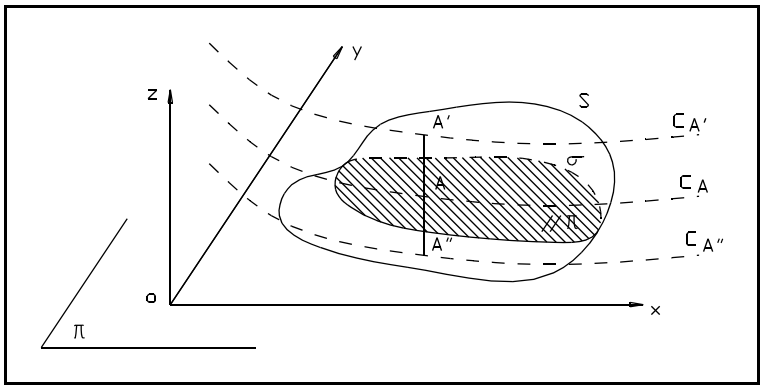

fig. 9.13. - *Mouvement plan du solide.*

Par ailleurs, on peut écrire dans tous les cas :

$$\vec{v}_{A'} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_P \times \vec{AA'}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega}_P \times \vec{AA'} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} soit\ \vec{\omega}_P = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad translation\ //\ \pi \\ soit\ \vec{\omega}_P = \omega\ \vec{1}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_P\ //\ \vec{AA'} \quad \Rightarrow \quad rotation\ d'axe \perp \pi \end{cases}$$

L'étude du mouvement pourra se faire dans le plan Oxy, avec un vecteur $\vec{\omega}_P$ perpendiculaire à ce plan (***fig. 9.14.***).

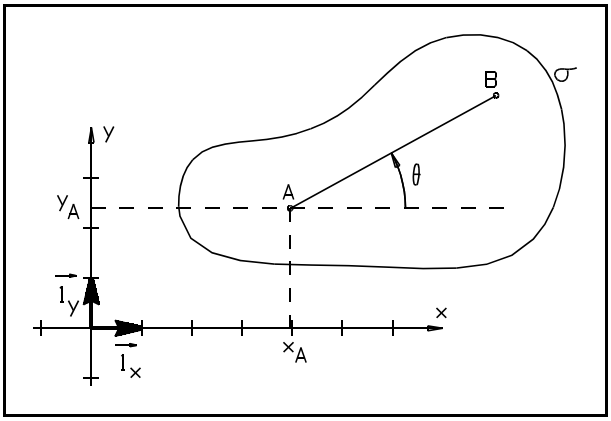

fig. 9.14. *- Mouvement de rotation plan.*

Le nombre de degrés de liberté est égal à trois : le repérage du solide σ dans le plan Oxy peut se faire par les 3 coordonnées :

- x_A et y_A, fonction du temps;
- θ, angle d'une droite de σ passant par A, également fonction du temps.

Dans ce cas, on aura : $\vec{\omega}_P = \dot{\theta}\ \vec{1}_z$.

9.3.2. Décomposition en une translation suivie d'une rotation

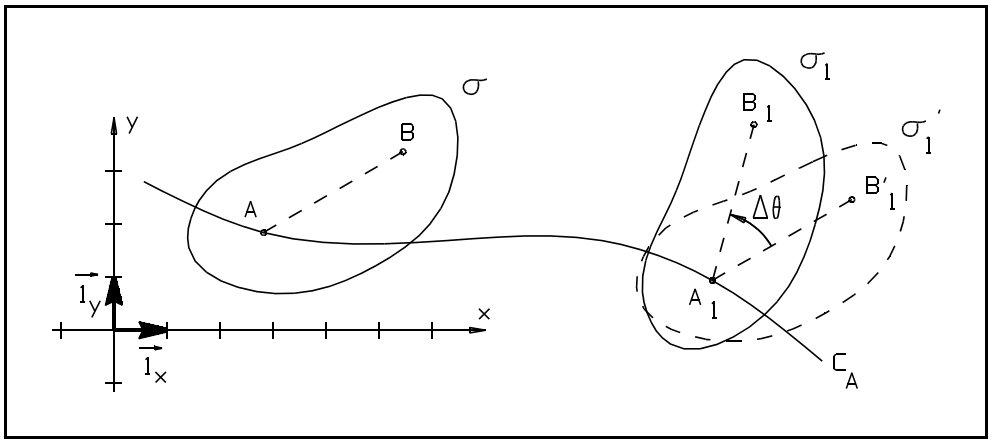

fig. 9.15. *- Translation + rotation du solide.*

Examinons deux positions successives σ et σ_1, aux instants t et $t_1 = t + \Delta t$ (***fig. 9.15.***). Il est facile de voir que la section σ, et avec elle tout le solide, peuvent être amenés de σ à σ_1 en deux étapes; il faut d'abord déplacer le solide jusqu'en σ'_1, par translation de façon que A arrive en A_1 et B arrive en B'_1; puis on fait tourner la section σ'_1 autour de A_1, de l'angle $\Delta\theta$. Il en découle que le mouvement plan du corps solide est composé d'un mouvement de translation dans lequel tous les points se déplacent de la même façon que A, et d'un mouvement de rotation autour de point A.

Dès lors, pour Δt tendant vers 0, on a :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \vec{AB} \quad \textbf{(éq. 9.111.)}$$

formule, aussi appelé "*Relation de Varignon* [3] ", dans laquelle $\vec{v}_{B/A}$ signifie "*vitesse de B par rapport à A considéré comme fixe*". Dans ce cas-ci le point B effectue une rotation autour de A.

En résumé :

$$\begin{aligned} & \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \\ \Rightarrow \quad & \vec{v}_{B/A} : direction : perpendiculaire\ à\ \overline{AB} \\ & \quad : module : \left\| \vec{\omega}_{\overline{AB}} \right\| \overline{AB} \end{aligned} \quad \textbf{(éq. 9.113.)}$$

La même décomposition peut se faire au niveau des accélérations :

$$\begin{aligned} \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} &= \vec{a}_A + \underbrace{\vec{\varepsilon}_{\overline{AB}} \times \vec{AB}}_{\left(\vec{a}_{B/A}\right)_t} + \underbrace{\vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \left(\vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \vec{AB} \right)}_{\left(\vec{a}_{B/A}\right)_n} \\ &= \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{\overline{AB}} \times \vec{AB} - \left\| \vec{\omega}_{\overline{AB}} \right\|^2 \vec{AB} \end{aligned} \quad \textbf{(éq. 9.114.)}$$

formule dans laquelle $\vec{a}_{B/A}$ signifie "*accélération de B par rapport à A considéré comme fixe*". B effectuant une rotation autour de A, nous avons donc une composante normale et une composante tangentielle.

En résumé :

$$\begin{aligned} & \vec{a}_B = \vec{a}_A + \left(\vec{a}_{B/A}\right)_n + \left(\vec{a}_{B/A}\right)_t \\ \Rightarrow \quad & \left(\vec{a}_{B/A}\right)_n : sens : de\ B \rightarrow A \\ & \quad : module : \left\| \vec{\omega}_{\overline{AB}} \right\|^2 \vec{AB} \\ \Rightarrow \quad & \left(\vec{a}_{B/A}\right)_t : direction : perpendiculaire\ à\ \overline{AB} \\ & \quad : module : \left\| \vec{\varepsilon}_{\overline{AB}} \right\| \overline{AB} \end{aligned} \quad \textbf{(éq. 9.116.)}$$

Graphiquement, la construction de la vitesse d'un point B quelconque du solide, se fait à partir de $\vec{v}_A$ de la façon suivante (***fig. 9.16.***) : on reporte $\vec{v}_A$ tel quel en B; ensuite on trace $\vec{v}_{B/A}$, perpendiculairement à $\overline{AB}$, et de module $\left\| \vec{\omega}_{\overline{AB}} \right\| \overline{AB}$ (dans le sens de la rotation); il suffit ensuite d'additionner vectoriellement ces deux vecteurs pour obtenir $\vec{v}_B$.

La procédure est identique pour les accélérations ($\left\| \vec{\varepsilon}_{\overline{AB}} \right\| \overline{AB}$ à reporter perpendiculairement à

[3] *Varignon Pierre (1654 [Caen]- 1722 [Paris]) : mathématicien français.*

$\overline{AB}$; $\left\|\vec{\omega}_{\overline{AB}}\right\|^2 \overline{AB}$ à reporter suivant $\overline{AB}$, de B vers A, voir figure ***9.17.***).

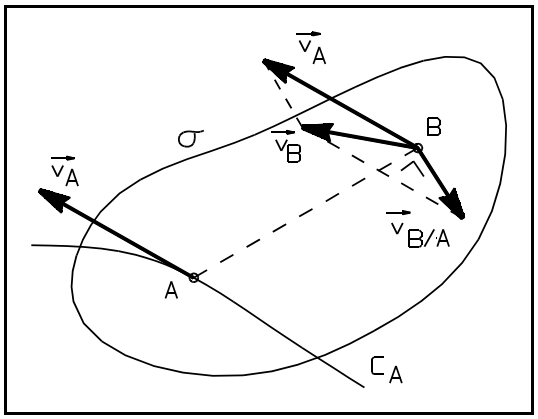

fig. 9.16. *- Vecteur vitesse : translation + rotation.*

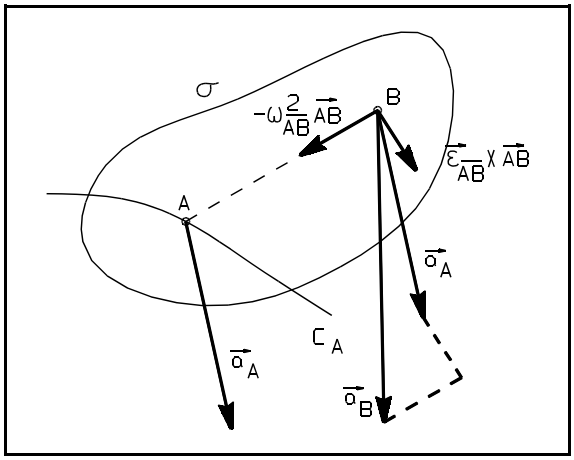

fig. 9.17. *- Vecteur accélération : translation + rotation.*

Application 9.6. Soit une locomotive à deux essieux reliés par une barre $\overline{AB}$, dont M est le point milieu, reliant les manivelles $\overline{OA}$ et $\overline{O'B}$. Si les roues I et II roulent sans glisser sur le rail, déterminer la vitesse et l'accélération du point M pour les quatre positions A_1, A_2, A_3 et A_4.

Données : $r_2 = 0.4\,m$, $\overline{OA} = \overline{O'B} = r_1 = 0.2\,m$.

La vitesse de la locomotive est donnée par $\left\|\vec{v}_O\right\| = 2\,t + 1\left[m/s\right]$; en $t = 0$, A est en 1.

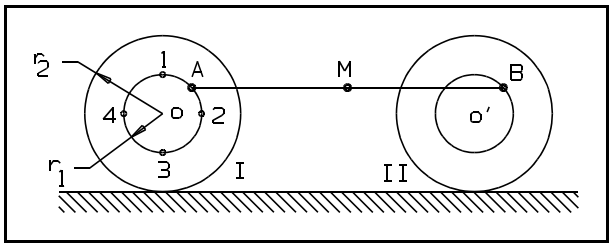

fig. 9.18. *- Application 9.6.*

Solution :

Le solide AMB

Il décrit un mouvement de translation (de rotation), donc :

$\vec{v}_M = \vec{v}_A$

et $\vec{a}_M = \vec{a}_A$

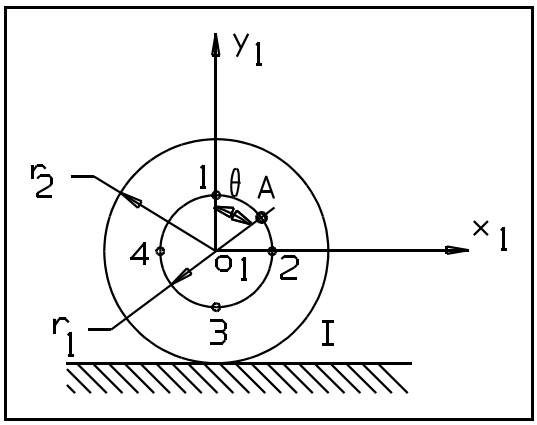

fig. 9.19. *- Mise en place des références.*

Loi des vitesses

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{O_1} + \vec{v}_{A/O_1} = \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega}_{\overline{O_1A}} \times \vec{O_1A}$$

- $\vec{v}_{O_1} = \left(2\,t + 1\right)\vec{1}_{x_1}$
- $\vec{\omega}_{\overline{O_1A}} = \dfrac{\left\|\vec{v}_{O_1}\right\|}{r_2}\left(-\vec{1}_{z_1}\right) = -\left(5\,t + 2.5\right)\vec{1}_{z_1}$
- $\vec{O_1A} = 0.2\sin\theta\,\vec{1}_{x_1} + 0.2\cos\theta\,\vec{1}_{y_1}$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_M = \vec{v}_A = (2t+1)\,\vec{1}_{x_1} + \begin{vmatrix} \vec{1}_{x_1} & \vec{1}_{y_1} & \vec{1}_{z_1} \\ 0 & 0 & -(5t+2.5) \\ 0.2\sin\theta & 0.2\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_M = \vec{v}_A = \left[(2t+1) + (t+0.5)\cos\theta\right]\vec{1}_{x_1} - (t+0.5)\sin\theta\,\vec{1}_{y_1}$$

Remarque :
Nous aurions pu aussi utiliser la notion de CIR (voir ***§ 9.3.3.***) pour trouver l'expression de la vitesse.

Loi des accélérations

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{O_1} + \left(\vec{a}_{A/O_1}\right)_t + \left(\vec{a}_{A/O_1}\right)_n = \vec{a}_{O_1} + \vec{\varepsilon}_{\overline{O_1A}} \times \vec{O_1A} + \vec{\omega}_{\overline{O_1A}} \times \left(\vec{\omega}_{\overline{O_1A}} \times \vec{O_1A}\right)$$

- $\vec{a}_{O_1} = \dot{\vec{v}}_{O_1} = 2\,\vec{1}_{x_1}$
- $\vec{\varepsilon}_{\overline{O_1A}} = \dot{\vec{\omega}}_{\overline{O_1A}} = -5\,\vec{1}_{z_1}$
- $\left(\vec{a}_{A/O_1}\right)_t = \begin{vmatrix} \vec{1}_{x_1} & \vec{1}_{y_1} & \vec{1}_{z_1} \\ 0 & 0 & -5 \\ 0.2\sin\theta & 0.2\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \cos\theta\,\vec{1}_{x_1} - \sin\theta\,\vec{1}_{y_1}$
- $\left(\vec{a}_{A/O_1}\right)_n = -\omega_P^2\,\vec{O_1A} = -(5t+2.5)^2\left(0.2\sin\theta\,\vec{1}_{x_1} + 0.2\cos\theta\,\vec{1}_{y_1}\right)$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_M = \vec{a}_A = \left[2 + \cos\theta - (5t+2.5)^2\ 0.2\sin\theta\right]\vec{1}_{x_1} + \left[-\sin\theta - (5t+2.5)^2\ 0.2\cos\theta\right]\vec{1}_{y_1}$$

Loi de déplacement

$$\theta = \int \left\|\vec{\omega}_{\overline{O_1A}}\right\| dt = \frac{5t^2}{2} + 2.5\,t + \theta_{t=0} \quad \Rightarrow \quad \theta = 2.5\left(t^2 + t\right) \textbf{ (éq. 9.141.)}$$

Calcul des vitesses et des accélérations pour les différentes positions

1) $\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$ (en utilisant ***éq. 9.141.***)

$$\vec{v}_{M1} = 1.5\,\vec{1}_{x_1} \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{v}_{M1}\right\| = 1.5\ m/s$$

$$\vec{a}_{M1} = 3\,\vec{1}_{x_1} - 1.25\,\vec{1}_{y_1} \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{a}_{M1}\right\| = 3.25\ m/s^2$$

2) $\theta = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad t = 0.437\ s\ (ou - 1.43\ s)$

$$\vec{v}_{M2} = 1.874\,\vec{1}_{x_1} - 0.937\,\vec{1}_{y_1} \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{v}_{M2}\right\| = 2.09\ m/s$$

$$\vec{a}_{M2} = -2.39\,\vec{1}_{x_1} - 1.0\,\vec{1}_{y_1} \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{a}_{M2}\right\| = 2.59\ m/s^2$$

3) $\theta = \pi \quad \Rightarrow \quad t = 0.727\ s$

$$\vec{v}_{M3} = 1.227\,\vec{1}_{x_1} \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{v}_{M3}\right\| = 1.227\ m/s$$

$$\vec{a}_{M3} = 1.0\,\vec{1}_{x_1} + 7.52\,\vec{1}_{y_1} \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{a}_{M3}\right\| = 7.59\ m/s^2$$

4) $\theta = 3\pi/4 \quad \Rightarrow \quad t = 0.961\ s$

$$\vec{v}_{M4} = 2.922\,\vec{1}_{x_1} + 1.461\,\vec{1}_{y_1} \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{v}_{M4}\right\| = 3.27\ m/s$$

$$\vec{a}_{M4} = 12.67\,\vec{1}_{x_1} + 1.0\,\vec{1}_{y_1} \qquad \Rightarrow \quad \left\|\vec{a}_{M4}\right\| = 12.71\,m/s^2$$

Application 9.7. Trouver la vitesse et l'accélération du point B de la jante d'une roue qui roule sans glissement sur un rail rectiligne, quand la vitesse du centre A de la roue est égale à $\vec{v}_A$ constante.

Solution :

Recherche de la vitesse :

Appliquons la formule générale

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

avec :

$$\vec{v}_{B/A} \perp \vec{AB}$$

et :

$$\left\|\vec{v}_{B/A}\right\| = \left\|\vec{\omega}_{\overline{AB}}\right\| \overline{AB} = \left\|\vec{\omega}_{\overline{AB}}\right\| r$$

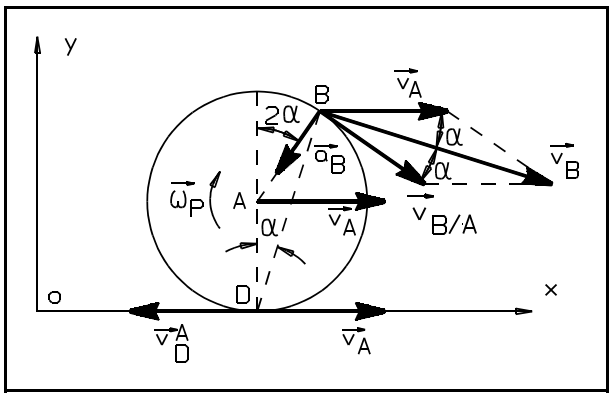

fig. 9.20. *- Application 9.7. Solution.*

On trouve la valeur de la vitesse angulaire $\left\|\vec{\omega}_{\overline{AB}}\right\|$ en partant du fait que le point D de la roue ne glisse pas sur le rail; ce qui implique :

$$\vec{v}_D = \vec{0} = \vec{v}_A + \vec{v}_{D/A}$$

où :

$$\left\|\vec{v}_{D/A}\right\| = \left\|\vec{\omega}_{\overline{AB}}\right\| \overline{AD} = \left\|\vec{\omega}_{\overline{AB}}\right\| r$$

Finalement, on trouve que :

$$\left\|\vec{\omega}_{\overline{AB}}\right\| = \frac{\left\|\vec{v}_A\right\|}{r}$$

et donc :

$$\left\|\vec{v}_{B/A}\right\| = \left\|\vec{\omega}_{\overline{AB}}\right\| r = \left\|\vec{v}_A\right\|$$

Le parallélogramme construit sur $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_{B/A}$ est un losange.

On démontre facilement que $\vec{v}_B$ a une direction perpendiculaire à $\overline{BD}$ et que :

$$\left\|\vec{v}_B\right\| = 2\left\|\vec{v}_A\right\|\cos\alpha\,.$$

Recherche de l'accélération : appliquons la formule générale

Pour l'accélération de B; on trouve :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A + \left(\vec{a}_{B/A}\right)_t + \left(\vec{a}_{B/A}\right)_n$$

$$= \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{\overline{AB}} \times \vec{AB} - \omega^2_{\overline{AB}}\ \vec{AB}$$

Avec :

- $\vec{a}_A = \vec{0}$;
- $\vec{\varepsilon}_{\overline{AB}} = \vec{\omega}_{\overline{AB}} = \vec{0}$;
- $\left\|\vec{\omega}_{\overline{AB}}\right\| = \dfrac{\left\|\vec{v}_A\right\|}{r}$; $\overline{AB} = r$

$$\vec{a}_B = -\frac{\|\vec{v}_A\|^2}{r^2}\,\vec{AB}$$

et ainsi :

$$\|\vec{a}_B\| = \frac{\|\vec{v}_A\|^2}{r}$$

est dirigée en permanence vers le centre A de la roue.

9.3.3. Décomposition en une suite de rotations infinitésimales

A) *Principe de la méthode*

Une autre méthode simple et concrète de détermination des vitesses des points du solide en mouvement plan est basée sur la notion de "***centre instantané de rotation***". Examinons deux positions successives σ et σ_1, aux instants t et $t_1 = t + \Delta t$ (***fig. 9.21.***).

Il est facile de voir que la section σ, et avec elle tout le solide, peuvent être amenés de σ à σ_1 par une rotation unique autour de C.F.R., le centre fictif de rotation amenant A en A_1 par une rotation d'amplitude θ_A, et B en B_1 par une rotation de même amplitude $\theta_B = \theta_A$. Le C.F.R., qui n'est pas nécessairement un des points du solide, est le point d'intersection des médiatrices de $\overline{AA_1}$ et $\overline{BB_1}$.

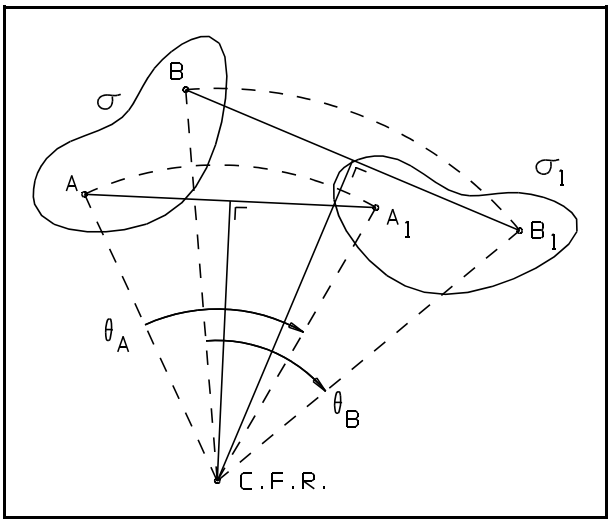

fig. 9.21. *- Centre fictif de rotation.*

Dès lors, lorsque Δt tend vers 0, le centre fictif de rotation devient le "*centre instantané de rotation*" (C.I.R.), que nous désignerons par I. Sa détermination (***fig. 9.22.***) est simple :

- quand $\Delta t \to 0$, $\vec{AA_1}$ a la même direction que $\vec{v}_A$ (tangente à la trajectoire de A), et $\|\vec{AA_1}\| \to 0$;
- $\vec{BB_1}$ a la même direction que $\vec{v}_B$, et $\|\vec{BB_1}\| \to 0$;
- les deux médiatrices dont question ci-dessus se réduisent, dès lors, aux deux perpendiculaires à $\vec{v}_A$ et à $\vec{v}_B$, dont le point d'intersection est I.

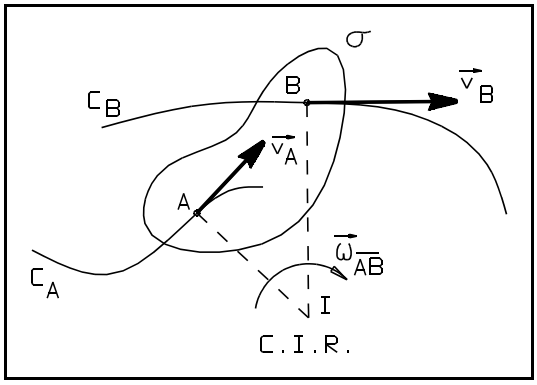

fig. 9.22. *- Centre instantané de rotation.*

Ce point I, *centre de la rotation*, *est donc le seul point du mouvement dont la vitesse instantanée est nulle* :

$\vec{v}_I = \vec{0}$ à l'instant *t*

<u>*Remarque*</u> :
La même conclusion serait obtenue en appliquant la relation d'équiprojectivité des vitesses, sur $\overline{AI}$ et sur $\overline{BI}$.

Dès lors, si on reprend la relation établie en ***§ 9.1.5.***, il vient :

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \underbrace{\vec{v}_I}_{=\vec{0}} + \vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \vec{IA} = \vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \vec{IA} \\ \vec{v}_B = \underbrace{\vec{v}_I}_{=\vec{0}} + \vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \vec{IB} = \vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \vec{IB} \end{cases}$$

On voit que les *vitesses scalaires* des points du solide sont *proportionnelles* à leurs *distances au centre instantané de rotation*.

Il faut noter que le C.I.R., caractérisé par le fait que sa vitesse instantanée est nulle, n'est pas nécessairement un point fixe; à différents instants peuvent correspondre des positions différentes du C.I.R., qui est donc un point qui "*évolue*" aussi suivant une certaine trajectoire. Nous aurons à déterminer plus loin le lieu des positions successives du C.I.R., au cours du temps.

<u>*Remarque importante*</u> :
La technique du C.I.R. s'avère particulièrement efficace pour la détermination des vitesses des points d'un solide, par application des formules des vitesses dans un mouvement circulaire.
Mais il ne faut ***<u>surtout pas</u>*** généraliser ce mouvement circulaire pour le calcul des accélérations des points : en effet, I est un point pour lequel $\vec{v}_I$, à l'instant *t*, est nul; cela n'implique pas que $\vec{a}_I$ soit nul !

Dès lors, par ***§ 9.1.5.*** :

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \vec{IB}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_I + \vec{\varepsilon}_{\overline{AB}} \times \vec{IB} + \vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \left(\vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \vec{IB} \right)$$

et toute la difficulté réside dans la détermination de $\vec{a}_I$.

B) <u>*Détermination et utilisation du C.I.R.*</u>

Soit une figure σ en mouvement dans son plan, et deux points A et B de cette figure. La connaissance de $\vec{v}_A$ et de la direction de $\vec{v}_B$ suffit pour déterminer I et calculer la vitesse angulaire du solide σ : $\vec{\omega}_\sigma$ (***fig. 9.23.***) : *par A, on mène une perpendiculaire à $\vec{v}_A$; par B, une perpendiculaire à la direction de $\vec{v}_B$: le point de rencontre de ces perpendiculaires est I, le C.I.R..*

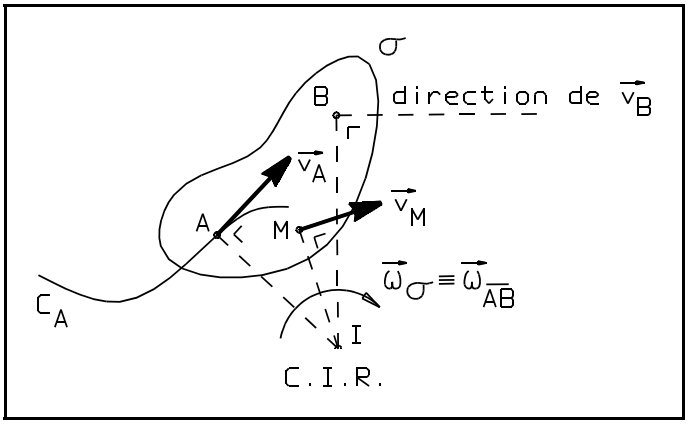

fig. 9.23. *- Détermination du C.I.R.*

Le module de la vitesse angulaire instantanée $\left\|\vec{\omega}_{AB}\right\|$ est donnée par :

$$\left\|\vec{\omega}_{AB}\right\| = \frac{\left\|\vec{v}_A\right\|}{\overline{IA}} \quad \textit{(éq. 9.209.)}$$

Dans l'équation précédente, il n'est pas toujours aisé de déterminer la distance entre la vitesse et le C.I.R.. Pour contourner cette difficulté, nous pouvons nous servir de la relation suivante, ne contenant, outre les grandeurs des vitesses, *uniquement* la distance $\overline{AB}$, intrinsèque au solide. Soit :

$$\left\|\vec{\omega}_{AB}\right\| = \left|\frac{\left\|\vec{v}_A\right\| \sin\alpha - \left\|\vec{v}_B\right\| \sin\beta}{\overline{AB}}\right| \quad \textit{(éq. 9.211.)}$$

α et β étant les angles entre la direction des vitesses et la barre $\overline{AB}$ (voir figure ***fig. 9.24.***).
En effet :

$$\left\|\vec{\omega}_{AB}\right\| \overline{AB} \overset{?}{=} \left|\left\|\vec{v}\right\|_A \sin\alpha - \left\|\vec{v}\right\|_A \sin\beta\right|$$

$$= \left|\left(\left\|\vec{\omega}_{AB}\right\| \overline{AI}\right) \sin\alpha - \left(\left\|\vec{\omega}_{AB}\right\| \overline{BI}\right) \sin\beta\right|$$

$$\Rightarrow \quad \overline{AB} = \left|\overline{AI} \sin\alpha - \overline{BI} \sin\beta\right|$$

$$= \left|\overline{AI'} - \overline{BI'}\right| \quad CQFD$$

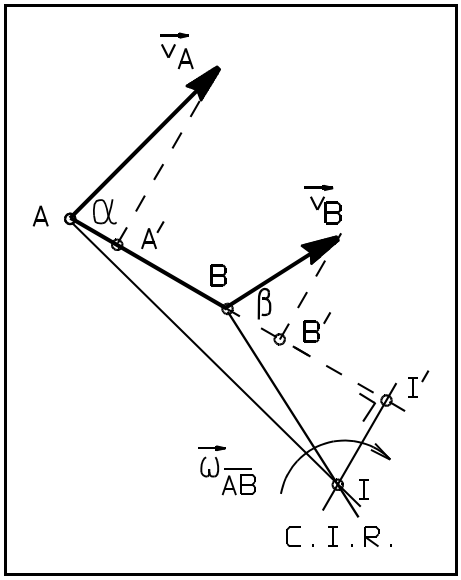

fig. 9.24. *- Détermination de la vitesse angulaire du solide.*

Quant à la vitesse instantanée $\vec{v}_M$ d'un point M quelconque du solide σ, elle sera perpendiculaire à $\overline{IM}$, de module :

$$\left\|\vec{v}_M\right\| = \left\|\vec{\omega}_{\overline{AB}}\right\| \overline{IM} = \left\|\vec{v}_A\right\| \frac{\overline{IM}}{\overline{IA}}$$

C) *Discussion*

Soit $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ les vitesses de deux des points d'un solide.

1) Si $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ ne sont pas parallèles, alors I est à distance finie (voir détermination par **B)** ci-dessus).

2) Si $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ sont parallèles, quatre cas peuvent se présenter :

- $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ (***fig. 9.25.A.***) : I est rejeté à l'infini, et le mouvement correspond à une translation;
- $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B$ et B est sur la perpendiculaire à $\vec{v}_A$, menée par A (***fig. 9.25.B.***) : I est sur $\overline{AB}$, de façon à donner une variation linéaire des vitesses;
- $\vec{v}_A = \vec{0}$ et $\vec{v}_B \neq \vec{0}$; alors I est directement confondu avec A;
- $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B$ et B n'est pas sur la perpendiculaire à $\vec{v}_A$ menée par A (***fig. 9.25.C.***) : cette situation est *impossible* en réalité, car un C.I.R. rejeté à l'infini représenterait un mouvement de translation, pour lequel on aurait $\vec{v}_A = \vec{v}_B$.

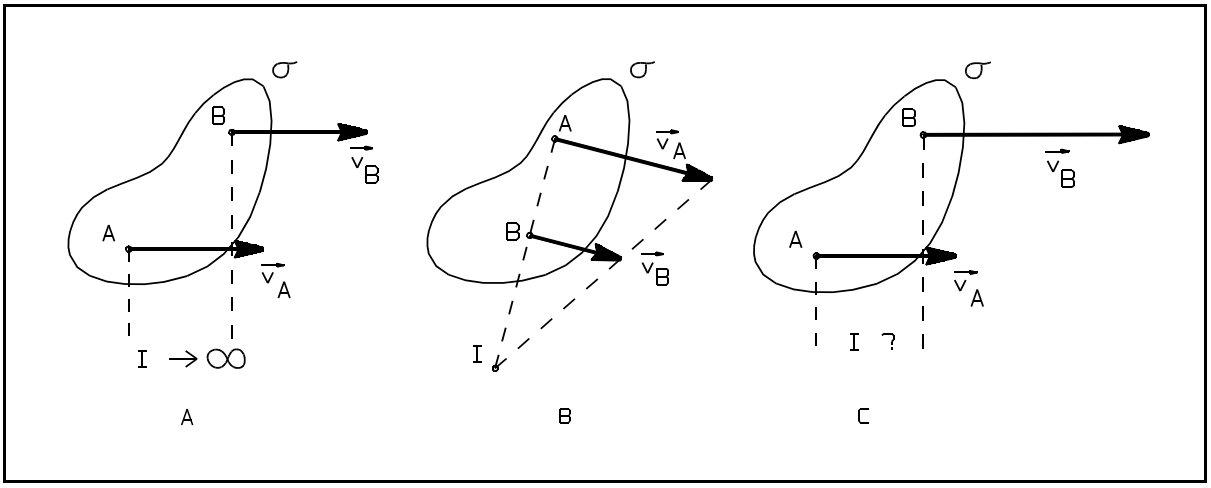

fig. 9.25. *- Diverses situations :* ***A*** *- C.I.R. à l'infini;* ***B*** *- Forces parallèles de grandeurs différentes;* ***C*** *- Situation impossible.*

Application 9.8. Dans l'application ***9.1.*** déterminer la vitesse angulaire de $\overline{BC}$ pour $\alpha = \pi/6$.

Solution :

Recherche du CIR de $\overline{BC}$

Si on porte une perpendiculaire à $\vec{v}_C$ et une perpendiculaire à $\vec{v}_B$, l'intersection est le point O et donc CIR de $\overline{BC}$.

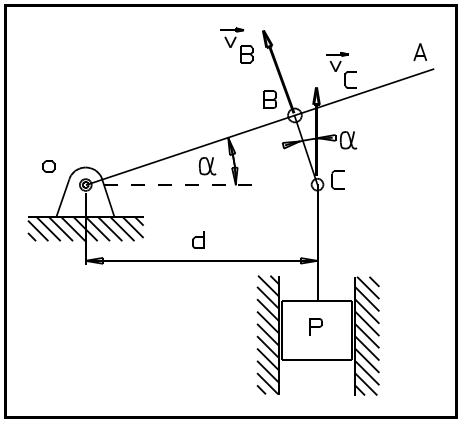

fig. 9.26. *- Recherche du C.I.R..*

Détermination de la vitesse angulaire $\left\|\vec{\omega}_{\overline{BC}}\right\|$

1ère *méthode* :

Comme B appartient aussi bien à $\overline{OB}$ qu'à $\overline{BC}$, on peut écrire :

$$\left.\begin{aligned}\left\|\vec{v}_B\right\| &= \left\|\vec{\omega}_{\overline{OB}}\right\| \overline{OB} \\ \left\|\vec{v}_B\right\| &= \left\|\vec{\omega}_{\overline{BC}}\right\| \overline{BC}\end{aligned}\right\rangle \quad \left\|\vec{\omega}_{\overline{OB}}\right\| = \left\|\vec{\omega}_{\overline{BC}}\right\| = 2\ rad/s$$

2ième *méthode*

Via l'équation ***éq. 9.211.***

$$\left\|\vec{\omega}_{\overline{BC}}\right\| = \left|\frac{\left\|\vec{v}_B\right\| \sin 0 - \left\|\vec{v}_C\right\| \sin\alpha}{\overline{BC}}\right| = \left|\frac{0 - 0.693 \sin \pi/6}{\left(10\sqrt{3}\right)10^{-2}}\right| = 2\ rad/s$$

Application 9.9. Traiter l'application ***9.7.*** par la technique du C.I.R.

Solution :

Recherche de la position du CIR

Le point de contact D de la roue (qui ne glisse pas) est le C.I.R., car $\vec{v}_D = \vec{0}$.

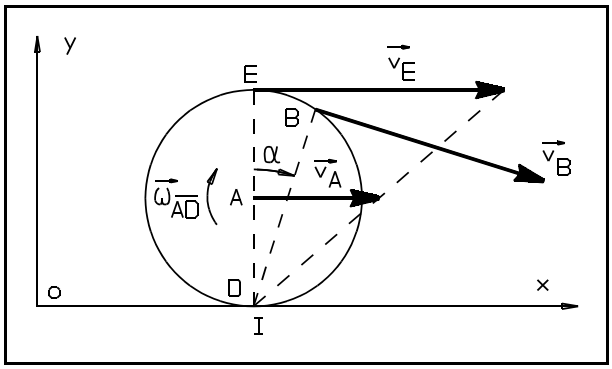

fig. 9.27. - Application 9.9. C.I.R.

Recherche de $\vec{v}_B$

Par conséquent, $\vec{v}_B$ est perpendiculaire à $\overline{IB}$, et de plus :

$$\|\vec{v}_B\| = \|\vec{v}_A\| \frac{\overline{IB}}{\overline{IA}} = \|\vec{v}_A\| \frac{2\,r\cos\alpha}{r}$$

$$= 2\,\|\vec{v}_A\|\cos\alpha$$

$$\|\vec{\omega}_{\overline{AD}}\| = \frac{\|\vec{v}_A\|}{\overline{IA}} = \frac{\|\vec{v}_A\|}{r}$$

En particulier : $\vec{v}_E = 2\,\vec{v}_A$

Remarque :

Dans ce cas-ci aussi on aurait aussi pu utiliser l'équation ***éq. 9.211.*** avec les points B et D, sachant qu'ici $\|\vec{v}_D\| = 0$:

$$\|\vec{\omega}_{\overline{AD}}\| = \left|\frac{\|\vec{v}_B\|\sin 90 - 0}{\overline{BD}}\right| = \left|\frac{2\,\|\vec{v}_A\|\cos\alpha\,\sin 90 - 0}{2\,r\cos\alpha}\right| = \frac{\|\vec{v}_A\|}{r}$$

Recherche de l'accélération

Pour la recherche de l'accélération, il faut revenir à la formule générale (voir l'application ***9.7.***)

Application 9.10. La latte $\overline{AM}$, de longueur b, se déplace dans un plan de telle sorte que A parcourt l'axe x et B l'axe y; $\overline{AB} = 1$. On donne $x_A = f(t)$. Déterminer la trajectoire décrite par M et la vitesse $\vec{v}_M$.

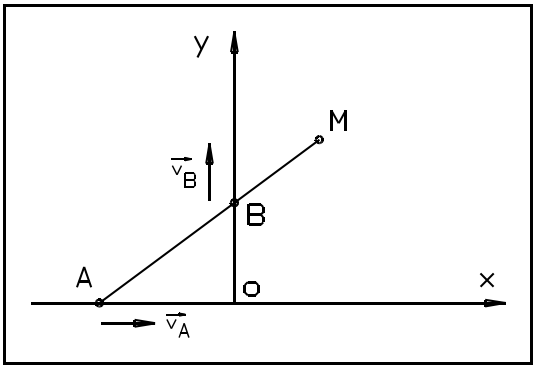

fig. 9.28. - Application 9.10.

Solution :

Equation de la trajectoire du point M (***fig. 9.29.***)

$$\begin{cases} x_M = b\cos\alpha - x_A = \cos(b-1) \\ y_M = b\sin\alpha \end{cases}$$

En éliminant α, on obtient :

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{b-1}\right)^2 = 1$$

équation d'un ellipse (d'où le nom d' "*ellipsographe*" donné à ce dispositif).

Recherche de la vitesse du point M

Les directions de $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ sont imposées, d'où on trouve (pour tout instant *t*) la position de I; la vitesse $\vec{v}_M$ est perpendiculaire à $\overline{IM}$, et vaut :

$$\left\|\vec{\omega}_{\overline{AB}}\right\| = \frac{\left\|\vec{v}_A\right\|}{\overline{IA}} = \frac{\left\|\vec{v}_M\right\|}{\overline{IM}}$$

$$\Rightarrow \quad \left\|\vec{v}_M\right\| = \left\|\vec{v}_A\right\| \frac{\overline{IM}}{\overline{IA}}$$

avec : $v_A = \dot{x}_A$

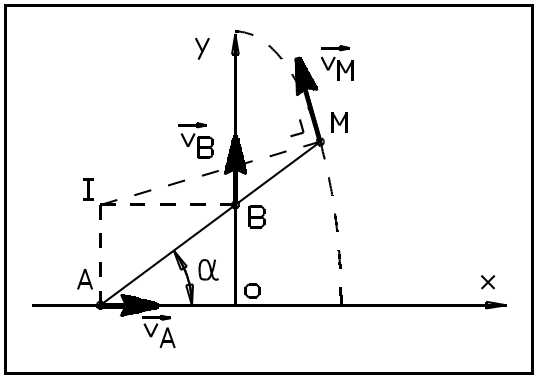

fig. 9.29. *- Application 9.10. Détermination du C.I.R.*

<u>*Remarque*</u> :
On aurait pu aussi dériver l'équation de la trajectoire (principe du mouvement simple du point). Il faut connaître dans ce cas $\alpha = f(t)$.

D) <u>*Base et roulante*</u>

> <u>*Définition*</u> : On appelle "*base*" (ou *centroïde fixe*) le lieu des positions successives du C.I.R., dans le plan Oxy dans lequel on étudie le mouvement.

On peut démontrer que les coordonnées du C.I.R. sont donnés par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x_I = x_A - \dfrac{v_{Ay}}{\omega_\sigma} \\ y_I = y_A + \dfrac{v_{Ax}}{\omega_\sigma} \end{cases} \quad \textbf{\textit{(éq. 9.260.)}}$$

<u>*Notations*</u> :

x_A ; y_A	les coordonnées, dans un repère fixe, d'un point A dont on connaît la vitesse
v_{Ax} ; v_{Ay}	les projections de la vitesse du point A dans le repère fixe
ω_σ	la projection de la vitesse de rotation du solide $\overline{AB}$

En effet :

$$\begin{cases} \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \vec{AB} \\ \vec{v}_B = \vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \vec{IB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_A + \vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \vec{AB} = \vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \vec{IB}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_A + \vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \left(\vec{AB} - \vec{IB} \right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_A + \vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \vec{AI} = \vec{0}$$

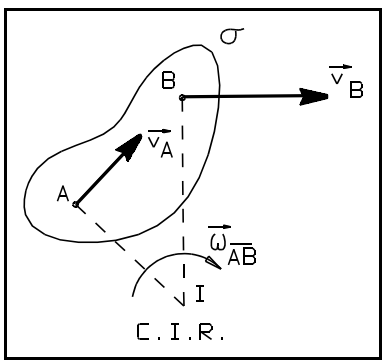

fig. 9.30. *- Coordonnées du C.I.R.*

Et via la division vectorielle, on trouve :

$$\vec{AI} = \frac{\vec{\omega}_{\overline{AB}} \times \vec{v}_A}{\left\|\vec{\omega}_{\overline{AB}}\right\|^2} + m\,\vec{\omega}_{\overline{AB}} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_I - x_A \\ y_I - y_A \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 0 & 0 & \omega_{\overline{AB}} \\ v_{A\,x} & v_{A\,y} & 0 \end{vmatrix}}{\left\|\vec{\omega}_{\overline{AB}}\right\|^2} + m\,\vec{\omega}_{\overline{AB}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \left(\vec{1}_x\right) & \left(x_I - x_A\right) = -\dfrac{v_{A\,y}}{\omega_{\overline{AB}}} \\ \left(\vec{1}_y\right) & \left(y_I - y_A\right) = \dfrac{v_{A\,x}}{\omega_{\overline{AB}}} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_I = x_A - \dfrac{v_{A\,y}}{\omega_{\overline{AB}}} \\ y_I = y_A + \dfrac{v_{A\,x}}{\omega_{\overline{AB}}} \end{cases} \qquad \text{CQFD}$$

<u>*Définition*</u> : On appelle "*roulante*" (ou *centroïde mobile*) le lieu des positions successives du C.I.R., repérées ***par rapport au solide σ*** qui effectue le mouvement.

On peut démontrer que la roulante, mobile, *roule sans glisser* sur la base, fixe et que les 2 courbes sont tangentes.

Déterminer la base et la roulante à partir du C.I.R. entre 2 solides n'offre que peu d'intérêts. Par contre, dans beaucoup de mécanismes, certains solides ont entre eux des mouvements de roulement et de ce fait la base et la roulante sont matériellement réalisées, ce ne sont plus des courbes théoriques.

Exemples : une roue qui roule sans glisser, une poulie sur son câble.

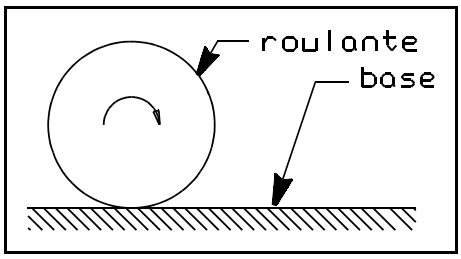

fig. 9.31. *- Base et roulante.*

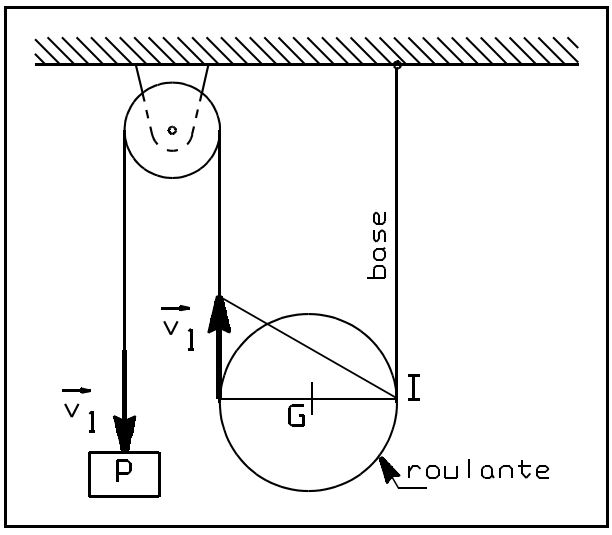

fig. 9.32. *- Base et roulante.*

Application 9.11. Une échelle $\overline{AB}$, de longueur l, est appuyée d'une part sur un sol horizontal et d'autre part sur un mur vertical. Déterminer la base et la roulante du mouvement lorsque l'échelle glisse à la fois sur le sol et sur le mur.

Solution :

Position du C.I.R.

A chaque instant, par exemple t_1, le C.I.R. I_1 est situé à l'intersection des normales en A_1 et B_1 des trajectoires rectilignes de A et B. Si les coordonnées de A sont A (0; y) et celles de B (x; 0), alors, les coordonnées de I sont (x; y); de plus, dans le triangle $\overline{AOB}$, on a $x^2 + y^2 = l^2$.

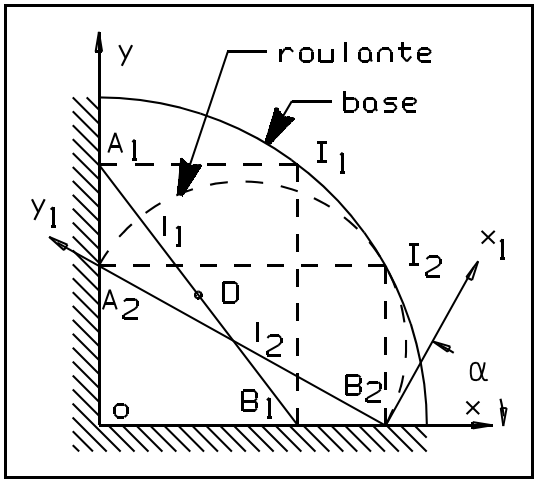

fig. 9.33. *- Application 9.11.*

Recherche de la base

La position du C.I.R. s'écrit, dans le repère fixe Oxy, en utilisant l'équation ***éq. 9.260.*** avec $\vec{v}_A$ vers les y négatifs :

$$\begin{cases} x_I = 0 - \dfrac{(-v_A)}{+\omega_{\overline{AB}}} \; avec : \omega_{\overline{AB}} = v_A / l \sin\alpha \\ y_I = l\cos\alpha + 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{OI} = l\sin\alpha\,\vec{1}_x + l\cos\alpha\,\vec{1}_y$$

La base est donc un quart de circonférence centrée en O et de rayon égal à l. Soit D le point milieu du segment $\overline{AB}$; le point I est à la distance constante $l/2$ du point D.

Recherche de la roulante

Prenons un repère mobile sur le solide "échelle". Soit $O_1x_1y_1$. La position du C.I.R. I_2 s'écrit dès lors sachant que :

$$\left\|\vec{B_2I_2}\right\| = \overline{B_2A_2}\cos\alpha = l\cos\alpha$$

$$\vec{B_2I_2} = l\cos\alpha\left(\sin\alpha\,\vec{1}_{x_1} + \cos\alpha\,\vec{1}_{y_1}\right)$$

$$= l\frac{\sin(2\alpha)}{2}\vec{1}_{x_1} + l\frac{\cos(2\alpha)+1}{2}\vec{1}_{y_1}$$

$$= \frac{l}{2}\vec{1}_{y_1} + \frac{l}{2}\left(\sin(2\alpha)\,\vec{1}_{x_1} + \cos(2\alpha)\,\vec{1}_{y_1}\right)$$

Avec : $0 \le \alpha \le 90°$

La roulante est donc la demi-circonférence du centre D et de rayon $l/2$.

Interprétation

Nous pourrions remplacer le *glissement* de l'échelle par un *roulement sans glissement* du solide "échelle + roulante" roulant sur le solide "base".

9.3.4. <u>Mécanismes : relations de Roger</u>

Dans un mécanisme comportant plusieurs corps en mouvement dans un même plan, chaque corps qui n'est pas en mouvement de translation possède à l'instant donné son propre C.I.R. et sa propre vitesse angulaire. Dès lors, le point de liaison entre deux corps doit respecter, au niveau de sa vitesse et de son accélération, aussi bien les champs de vitesse et d'accélération du premier corps que ceux du second corps.

D'autre part, si, pour un solide σ, on connaît les vitesses et accélérations de deux de ses points A et B , alors pour tout point D sur le segment $\overline{AB}$, la vitesse $\vec{v}_D$ (respectivement l'accélération $\vec{a}_D$) est une variation linéaire entre $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ (respectivement entre $\vec{a}_A$ et $\vec{a}_B$).

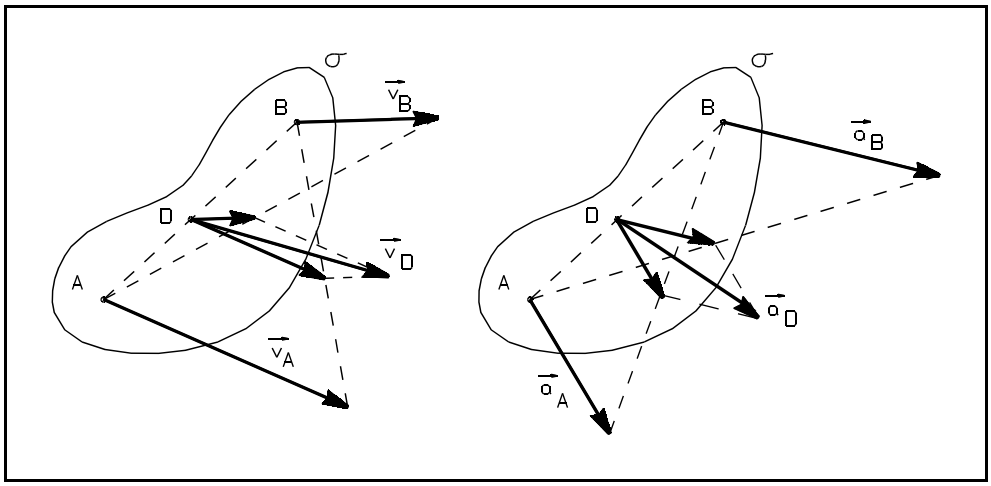

fig. 9.34. *- Relation de Roger.*

Soit : $\vec{AD} = k\ \vec{AB} \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$.

Si $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ sont connus, on peut écrire (*1ère relation de Roger* [4]) :

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_p \times \vec{AB} \\ \vec{v}_D &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_p \times \vec{AD} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{\omega}_p \times k\ \vec{AB} = \vec{v}_A + k\left(\vec{\omega}_p \times \vec{AB}\right)$$

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + k\left(\vec{v}_B - \vec{v}_A\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_D = (1-k)\,\vec{v}_A + k\,\vec{v}_B}$$

De même si $\vec{a}_A$ et $\vec{a}_B$ sont connus on peut écrire (*2ème relation de Roger*) :

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \varepsilon_p \times \vec{AB} + \vec{\omega}_p \times \left(\vec{\omega}_p \times \vec{AB}\right) \\ \vec{a}_D &= \vec{a}_A + \varepsilon_p \times \vec{AD} + \vec{\omega}_p \times \left(\vec{\omega}_p \times \vec{AD}\right) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \vec{a}_D &= \vec{a}_A + \varepsilon_p \times k\ \vec{AB} \\ &+ \vec{\omega}_p \times \left(\vec{\omega}_p \times k\ \vec{AB}\right) \end{aligned}$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_A + k\left(\vec{a}_B - \vec{a}_A\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_D = (1-k)\,\vec{a}_A + k\,\vec{a}_B}$$

---

[4] *Roger (1958 [Bruxelles] -) : Tof peï*

Application 9.12. La bielle $\overline{AB}$, reliée au culbuteur $\overline{BC}$, est fixée à la manivelle $\overline{OA}$ qui tourne uniformément autour de l'axe O avec la vitesse angulaire $\left\|\vec{\omega}_{\overline{OA}}\right\| = 4\ rad/s$ constante.
Les dimensions sont les suivantes :

$\overline{OA} = r = 0.5\,m\ ;\ \overline{AB} = 2\,r = 1\,m\ ;\ \overline{BC} = \sqrt{2}\,r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,m\ .$

Pour la position montrée sur le schéma, angle $\langle\overline{OAB} = \dfrac{\pi}{2}$ et angle $\langle\overline{ABC} = \dfrac{\pi}{4}$, déterminer l'accélération des points B et M de la bielle (M est milieu de $\overline{AB}$).

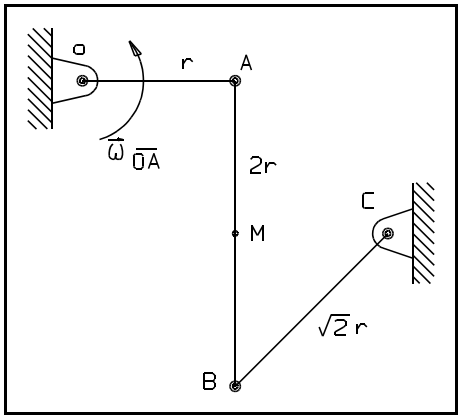

fig. 9.35. *- Application 9.12.*

Solution :
La résolution peut être purement géométrique, puisque les vitesses et accélérations ont des directions immédiatement déterminées (voir dessin).

Recherche des expressions de la vitesse et de l'accélération du point A

Le C.I.R. de la manivelle $\overline{OA}$ est le point I_1, confondu avec O; pour le mouvement circulaire de A, on trouve :

$$\left\|\vec{v}_A\right\| = \left\|\vec{\omega}_{\overline{OA}}\right\| r = 4 \times 0.5 = 2\ m/s$$

et donc : $\vec{v}_A = 2\ \vec{1}_y$

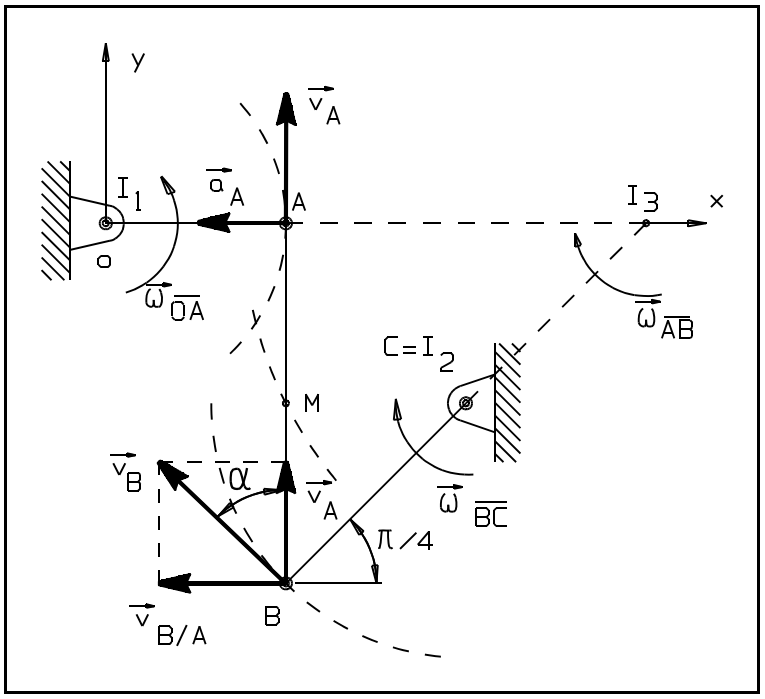

fig. 9.36. *- Application 9.12. : détermination des vitesses.*

et :

$$\begin{cases} \left\| \vec{a}_{A\,n} \right\| = \omega_{\overline{OA}}^2 \; r = 4^2 \times 0.5 = 8 \; m/s^2 \\ \left\| \vec{a}_{A\,t} \right\| = \left\| \vec{\varepsilon}_{\overline{OA}} \right\| r = 0 \; m/s^2 \end{cases}$$

Recherche de la vitesse et de l'accélération du point B

Le C.I.R. du culbuteur $\overline{BC}$ est le point $I_2 = C$; pour le mouvement circulaire de B, on trouve :

$$\left\| \vec{v}_B \right\| = \left\| \vec{\omega}_{\overline{BC}} \right\| \sqrt{2} \; r = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \vec{\omega}_{\overline{BC}} \right\|$$

et :

$$\begin{cases} \left\| \vec{a}_{B\,n} \right\| = \omega_{\overline{BC}}^2 \; \sqrt{2} \; r = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \; \omega_{\overline{BC}}^2 \\ \left\| \vec{a}_{B\,n} \right\| = \left\| \vec{\varepsilon}_{\overline{BC}} \right\| \sqrt{2} \; r = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left\| \vec{\varepsilon}_{\overline{BC}} \right\| \end{cases}$$

mais $\left\| \vec{\omega}_{\overline{BC}} \right\|$ et $\left\| \vec{\varepsilon}_{\overline{BC}} \right\|$ ne sont pas encore connus !

Recherche de la vitesse du point B

<u>1ère *méthode*</u>

Le C.I.R. de la bielle $\overline{AB}$ est connu, puisque $\vec{v}_A$ et la direction de $\vec{v}_B$ le sont !

I_3 est l'intersection du prolongement de $\overline{OA}$ avec le prolongement de $\overline{BC}$.
Ce point I_3 n'est pas fixe (au contraire de I_1 et I_2).
A l'instant considéré :

$\overline{I_3 A} = 2 \; r$ et $\overline{I_3 B} = 2 \sqrt{2} \; r$

Ainsi, on trouve, pour l'instant considéré :

$$\left\| \vec{v}_A \right\| = \left\| \vec{\omega}_{\overline{AB}} \right\| \overline{I_3 A} \quad \Rightarrow \quad \left\| \vec{\omega}_{\overline{AB}} \right\| = \frac{\left\| \vec{v}_A \right\|}{\overline{I_3 A}} = \frac{2}{2 \times 0.5} = 2 \; rad/s$$

et dès lors, la vitesse du point B vaut :

$$\left\| \vec{v}_B \right\| = \left\| \vec{\omega}_{\overline{AB}} \right\| \overline{I_3 B} = 2 \times 2 \sqrt{2} \; r = 2 \sqrt{2} \; m/s$$

et donc : $\vec{v}_B = -2 \; \vec{1}_x + 2 \; \vec{1}_y$

<u>2ième *méthode*</u>

Par équiprojectivité des vitesses. En effet, comme l'angle $\alpha = \pi/4$, nous pouvons en déduire immédiatement que :

$$\left. \begin{cases} \vec{v}_{B\,y} = \vec{v}_A = 2 \; \vec{1}_y \\ \vec{v}_{B\,x} = -\left\| \vec{v}_A \right\| \tan \alpha \; \vec{1}_x = -2 \; \vec{1}_x \end{cases} \right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_B = -2 \; \vec{1}_x + 2 \; \vec{1}_y$$

Recherche de $\left\| \vec{\omega}_{\overline{BC}} \right\|$

<u>1ère *méthode*</u>

D'autre part, on a que :

$$\left\| \vec{v}_B \right\| = \left\| \vec{\omega}_{\overline{BC}} \right\| \overline{BC} \quad \Rightarrow \quad \left\| \vec{\omega}_{\overline{BC}} \right\| = \frac{\left\| \vec{v}_B \right\|}{\overline{BC}} = \frac{2 \sqrt{2}}{\sqrt{2} \; r} = 4 \; rad/s$$

<u>2ième *méthode*</u>

Dans ce cas-ci aussi on aurait aussi pu utiliser l'équation ***éq. 9.211.*** avec les points B et C, sachant qu'ici $\left\| \vec{v}_C \right\| = 0$:

$$\left\|\vec{\omega}_{\overline{BC}}\right\| = \left|\frac{\left\|\vec{v}_B\right\| \sin 90 - 0}{\overline{BC}}\right| = \left|\frac{2\sqrt{2}\,\sin 90 - 0}{\sqrt{2} \times 0.5}\right| = 4\ rad/s$$

Recherche de l'accélération du point B

Pour trouver l'accélération de B, on ne peut plus utiliser le C.I.R. de $\overline{AB}$, il faut passer à la formule analytique de l'accélération. Donc, dans un premier temps, on peut écrire ($B \in \overline{AB}$) :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A + \left(\vec{a}_{B/A}\right)_t + \left(\vec{a}_{B/A}\right)_n$$

avec :

$$\left\|\vec{a}_A\right\| = \omega^2_{\overline{OA}}\ \overline{OA} = 4^2 \times 0.5 = 8\ m/s^2$$

$$\left\|\vec{a}_{B/A}\right\|_t = \left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{AB}}\right\|\ \overline{AB} = \left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{AB}}\right\| \times 2\ r \qquad \text{mais :} \quad \left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{AB}}\right\| \ ?$$

$$\left\|\vec{a}_{B/A}\right\|_n = \omega^2_{\overline{AB}}\ \overline{AB} = 2^2 \times 1 = 4\ m/s^2$$

Ensuite, pour le même point B, on peut aussi écrire ($B \in \overline{BC}$) :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{B/C} = \vec{a}_C + \left(\vec{a}_{B/C}\right)_t + \left(\vec{a}_{B/C}\right)_n$$

avec :

$$\left\|\vec{a}_C\right\| = 0$$

$$\left\|\vec{a}_{B/C}\right\|_t = \left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{BC}}\right\|\ \overline{BC} = \left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{BC}}\right\| \times \sqrt{2}\ r \qquad \text{mais :} \quad \left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{BC}}\right\| \ ?$$

$$\left\|\vec{a}_{B/C}\right\|_n = \omega^2_{\overline{BC}}\ \overline{BC} = 4^2 \times \sqrt{2} \times 0.5 = 8\sqrt{2}\ m/s^2$$

<u>1ère *méthode*</u>

Géométriquement, si on combine ces 2 résultats, on trouve :

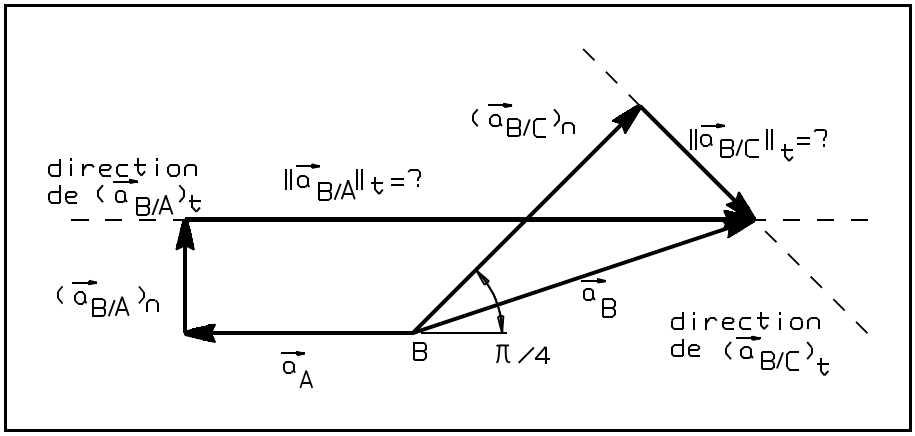

fig. 9.37. *- Application 9.12. : détermination de l'accélération.*

Les deux termes $\left\|\vec{a}_{B/C}\right\|_t$ et $\left\|\vec{a}_{B/C}\right\|_n$ sont connus en direction mais pas en grandeur; mais l'intersection de leurs directions fixe leur grandeur, et par la même occasion, $\vec{a}_B$; on obtient :

$$\left\|\vec{a}_{B/C}\right\|_t = \frac{8\sqrt{2}\,\sin\frac{\pi}{4} - 4}{\cos \pi/4} = 4\sqrt{2} = \left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{BC}}\right\|\sqrt{2}\ r \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{BC}}\right\| = 8\ rad/s^2$$

$$\left\|\vec{a}_{B/A}\right\|_t = 8 + 8\sqrt{2}\,\cos\frac{\pi}{4} + 4\sqrt{2}\,\cos\frac{\pi}{4} = 20 = \left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{AB}}\right\| 2\ r \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{AB}}\right\| = 20\ rad/s^2$$

Dans la position considérée, et dans le système d'axes représenté, on a ainsi :

$$\vec{a}_B = 12\,\vec{1}_x + 4\,\vec{1}_y$$

et :

$$\|\vec{a}_B\| = \sqrt{12^2 + 4^2} = 12.65\,m/s^2$$

2ième méthode

Analytiquement, exprimons l'accélération de B ($B \in \overline{AB}$) :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A + \left(\vec{a}_{B/A}\right)_t + \left(\vec{a}_{B/A}\right)_n$$

avec :

$$\vec{a}_A = \left(\omega^2_{\overline{OA}}\ \overline{OA}\right)\left(-\vec{1}_x\right) = -8\,\vec{1}_x$$

$$\left(\vec{a}_{B/A}\right)_t = \left(\left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{AB}}\right\|\overline{AB}\right)\vec{1}_x = \left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{AB}}\right\|\vec{1}_x \qquad \text{mais :} \quad \left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{AB}}\right\| \ ?$$

$$\left(\vec{a}_{B/A}\right)_n = \left(\omega^2_{\overline{AB}}\ \overline{AB}\right)\vec{1}_y = 4\,\vec{1}_y$$

Ensuite, pour le même point B, on peut aussi écrire ($B \in \overline{BC}$) :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{B/C} = \vec{a}_C + \left(\vec{a}_{B/C}\right)_t + \left(\vec{a}_{B/C}\right)_n$$

avec :

$$\vec{a}_C = \vec{0}$$

$$\left(\vec{a}_{B/C}\right)_t = \left(\left\|\varepsilon_{\overline{BC}}\right\|\overline{BC}\right)\sin(\pi/4)\,\vec{1}_x + \left(\left\|\varepsilon_{\overline{BC}}\right\|\overline{BC}\right)\cos(\pi/4)\left(-\vec{1}_y\right)$$

$$= -0.5\left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{BC}}\right\|\vec{1}_x - 0.5\left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{BC}}\right\|\vec{1}_y \qquad \text{mais :} \quad \left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{BC}}\right\| \ ?$$

$$\left(\vec{a}_{B/C}\right)_n = \left(\omega^2_{\overline{BC}}\ \overline{BC}\right)\cos(\pi/4)\,\vec{1}_x + \left(\omega^2_{\overline{BC}}\ \overline{BC}\right)\sin(\pi/4)\,\vec{1}_y = 8\,\vec{1}_x + 8\,\vec{1}_y$$

On égale les 2 expressions de l'accélération de B, soit :

$$\vec{a}_B \in \overline{AB} = \vec{a}_B \in \overline{BC}$$

$$-8\,\vec{1}_x + 4\,\vec{1}_y + \left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{AB}}\right\|\vec{1}_x = 0 + \left(8\,\vec{1}_x + 8\,\vec{1}_y\right) + \left(0.5\left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{BC}}\right\|\vec{1}_x - 0.5\left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{BC}}\right\|\vec{1}_y\right)$$

$$\left.\begin{cases}\left(\vec{1}_x\right) & -8 + \left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{AB}}\right\| = 8 + 0.5\left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{BC}}\right\| \\ \left(\vec{1}_y\right) & 4 = 8 - 0.5\left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{BC}}\right\|\end{cases}\right\rangle \ \Rightarrow \ \begin{cases}\left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{BC}}\right\| = \dfrac{8-4}{0.5} = 8\ rad/s^2 \\ \left\|\vec{\varepsilon}_{\overline{AB}}\right\| = 8 + 4 + 8 = 20\ rad/s^2\end{cases}$$

Finalement :

$$\vec{a}_B = 12\,\vec{1}_x + 4\,\vec{1}_y \qquad \text{et :} \qquad \|\vec{a}_B\| = \sqrt{12^2 + 4^2} = 12.65\,m/s^2$$

Recherche de la vitesse et de l'accélération du point M milieu de $\overline{AB}$

Application des relations de Roger.

$$\vec{v}_M = \frac{1}{2}\vec{v}_A + \frac{1}{2}\vec{v}_B = \frac{1}{2}\left(2\,\vec{1}_y\right) + \frac{1}{2}\left(-2\,\vec{1}_x + 2\,\vec{1}_y\right)$$

$$= -\vec{1}_x + 2\,\vec{1}_y$$

et :

$$\vec{a}_M = \frac{1}{2}\vec{a}_A + \frac{1}{2}\vec{a}_B = \frac{1}{2}\left(-8\,\vec{1}_x\right) + \frac{1}{2}\left(12\,\vec{1}_x + 4\,\vec{1}_y\right)$$

$$= 2\,\vec{1}_x + 2\,\vec{1}_y$$

9.4. *Mouvement composé du solide*

9.4.1. Introduction

La définition de la composition du mouvement est identique à celle du ***chapitre 8.*** : le solide est en *mouvement relatif* par rapport à un système d'axes $O_1x_1y_1z_1$ et simultanément ce système est en *mouvement d'entraînement* par rapport à un système d'axes Oxyz, considéré comme immobile.

Le mouvement du solide *S* par rapport à Oxyz est dit *mouvement absolu* de *S*.

Nous limiterons l'étude à la détermination des vitesses.

9.4.2. Expression analytique de la vitesse

Pour exprimer la vitesse nous avons deux approches possibles :

- soit partir de l'expression du mouvement simple du solide (***§ 9.1.5.***);
- soit partir de l'expression du mouvement composé du point (***§ 8.2.2.***).

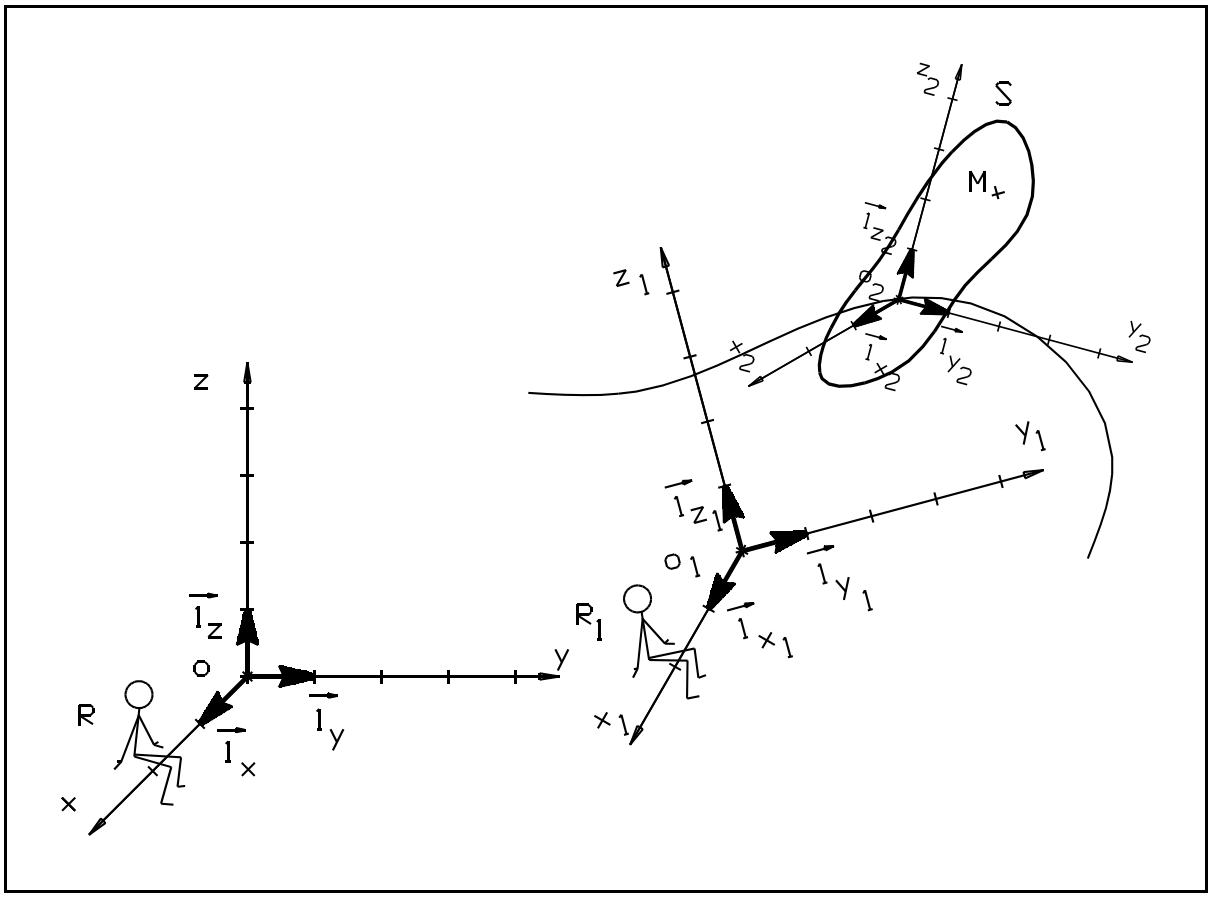

fig. 9.38. *- Mouvement composé du solide.*

A) *Première approche*

La formule ***(éq. 9.40.)*** développée précédemment (mouvement simple du solide) et adaptée au cas de figure présent, reste bien sûr valable. M étant un point du solide *S*, nous avons :

$$ou \begin{cases} \vec{v}_M = \vec{v}_{O_2} + \vec{\omega}_P \times \overrightarrow{O_2 M} \\ \dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{\overrightarrow{OO_2}} + \vec{\omega}_P \times \overrightarrow{O_2 M} \end{cases} \textbf{(éq. 9.360.)}$$

Mais elle n'est applicable que si on peut déterminer $\vec{\omega}_P$, vecteur vitesse instantanée de rotation du solide en mouvement par rapport au repère fixe Oxyz ou encore *vecteur de Poisson* d'un trièdre $O_2x_2y_2z_2$ lié au solide.

Nous cherchons donc à identifier $\vec{\omega}_P$ pour les différents mouvements composés du solide.

B) *Seconde approche*

Introduisons un trièdre fixe Oxyz dans le référentiel inertiel $\mathfrak{R}$ et un autre trièdre $O_1x_1y_1z_1$ en mouvement et auquel sera associé le vecteur de Poisson $\vec{\omega}_{P1}$ (vecteur vitesse de rotation du trièdre $O_1x_1y_1z_1$ par rapport au trièdre Oxyz).

Le solide en mouvement composé dans $\mathfrak{R}$ pourra être donc considéré en mouvement relatif par rapport au trièdre $O_1x_1y_1z_1$ qui lui-même est en mouvement par rapport à $\mathfrak{R}$.

L'équation du mouvement composé du point $\vec{v}_{Ma} = \vec{v}_{Me} + \vec{v}_{Mr}$ devient :

- La *vitesse d'entraînement* est en fait la vitesse du point M considéré comme fixe dans le trièdre $O_1x_1y_1z_1$:

$$\vec{v}_{Me} = \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega}_{P1} \times \overrightarrow{O_1 M} = \dot{\overrightarrow{OO_1}} + \vec{\omega}_{P1} \times \overrightarrow{O_1 M}$$

- Quant à la *vitesse relative*, c'est la vitesse du point M dans le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ *considéré comme fixe*. Cela revient à un mouvement simple du solide. Soit :

$$\vec{v}_{Mr} = \vec{v}_{O_2/O_1} + \vec{\omega}_{P2/1} \times \overrightarrow{O_2 M}$$

  $\vec{v}_{O_2/O_1}$ étant la vitesse de O_2 par rapport au trièdre $O_1x_1y_1z_1$ considéré comme fixe;
  $\vec{\omega}_{P2/1}$ étant le vecteur vitesse de rotation du solide *S* (du repère $O_2x_2y_2z_2$) par rapport au trièdre $O_1x_1y_1z_1$ (considéré comme fixe).

Nous avons donc l'expression analytique de la vitesse :

$$\vec{v}_{Ma} = \dot{\overrightarrow{OM}} = \underbrace{\dot{\overrightarrow{OO_1}} + \vec{\omega}_{P1} \times \overrightarrow{O_1 M}}_{\text{vitesse d'entraînement}} + \underbrace{\vec{v}_{O_2/O_1} + \vec{\omega}_{P2/1} \times \overrightarrow{O_2 M}}_{\text{vitesse relative}} \textbf{(éq. 9.369.)}$$

Dès lors, nous pouvons établir l'égalité entre les deux relations (***éq. 9.360.*** et ***éq. 9.369.***) :

$$\begin{aligned}\dot{\overrightarrow{OM}} &= \dot{\overrightarrow{OO_2}} + \vec{\omega}_P \times \overrightarrow{O_2M} \\ &= \underbrace{\dot{\overrightarrow{OO_1}} + \vec{\omega}_{P1} \times \overrightarrow{O_1M}}_{\text{vitesse d'entraînement}} + \underbrace{\vec{v}_{O_2/O_1} + \vec{\omega}_{P\,2/1} \times \overrightarrow{O_2M}}_{\text{vitesse relative}}\end{aligned} \qquad \textbf{(éq. 9.370.)}$$

9.4.3. Composition de deux translations

Nous avons vu (***§ 9.2.1.***) que le mouvement de translation du solide est entièrement défini par la vitesse $\dot{\overrightarrow{OM}}$ et l'accélération $\ddot{\overrightarrow{OM}}$ d'un de ses points. Elles sont identiques pour tous les points du solide.

- Le solide est en mouvement de translation par rapport au trièdre $O_1x_1y_1z_1$, d'où : $\vec{\omega}_{P\,2/1} = \vec{0}$
- Le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ est lui-même en mouvement de translation dans Oxyz, d'où : $\vec{\omega}_{P\,1} = \vec{0}$

La formule de base (***éq. 9.369.***) devient dès lors :

$$\boxed{\dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{\overrightarrow{OO_1}} + \vec{v}_{O_2/O_1}}$$

avec : $\vec{v}_{O_2/O_1} = \dot{\overrightarrow{O_1O_2}}$ (simple translation)

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{\overrightarrow{OO_1}} + \dot{\overrightarrow{O_1O_2}} = \dot{\overrightarrow{OO_2}}}$$

Le mouvement absolu de S dans $\Re$ est une *translation* :

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_P = \vec{0}}$$

9.4.4. Composition de deux mouvements de rotation

Dans la composition de deux mouvements de rotation, nous aurons donc :

- Un solide S en rotation autour d'un axe a_2 avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}_{P\,2/1}$ (vitesse relative);
- L'axe a_2 lui-même mobile, en rotation autour d'un axe a_1 avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}_{P\,1}$ (vitesse d'entraînement).

Le mouvement absolu sera le mouvement de S par rapport à l'axe de rotation a_1 considéré comme immobile.

Divers cas peuvent se présenter :

1) Les axes a_1 et a_2 sont parallèles : $\vec{\omega}_{P\,1}$ et $\vec{\omega}_{P\,2/1}$ de même sens ou $\vec{\omega}_{P\,1}$ et $\vec{\omega}_{P\,2/1}$ de sens contraires;
2) Les axes a_1 et a_2 sont concourants;
3) Les axes a_1 et a_2 sont deux droites gauches l'une par rapport à l'autre.

A) *Composition de deux rotations d'axes parallèles*

Le solide *S* tourne autour de l'axe a_2 qui lui-même tourne autour de l'axe a_1. Le mouvement absolu de *S* est un *mouvement plan*.

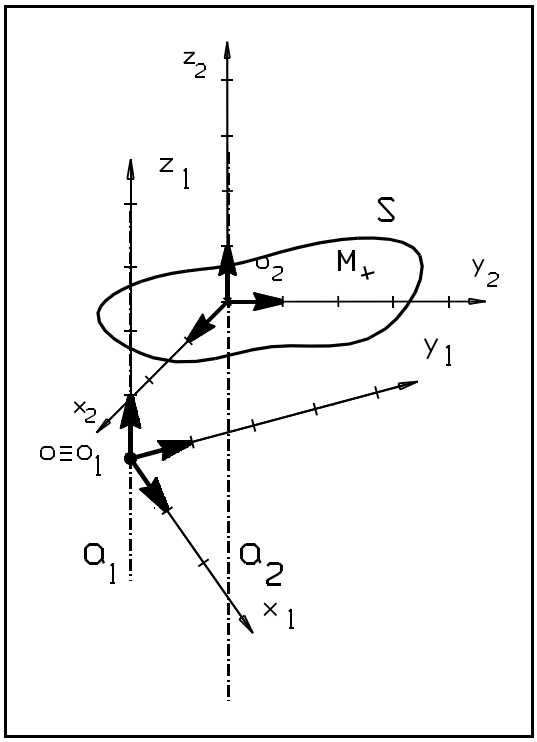

fig. 9.39. *- Composition de 2 rotations d'axes parallèles.*

Prenons l'équation générale (***éq. 9.369.***) :

$$\dot{\overrightarrow{OM}} = \underbrace{\dot{\overrightarrow{OO_1}} + \vec{\omega}_{P1} \times \overrightarrow{O_1M}}_{\text{vitesse d'entraînement}} + \underbrace{\vec{v}_{O_2/O_1} + \vec{\omega}_{P2/1} \times \overrightarrow{O_2M}}_{\text{vitesse relative}}$$

avec : $\dot{\overrightarrow{OO_1}} = \vec{0}$ (les 2 centres sont confondus)

$\vec{v}_{O_2/O_1} = \vec{0}$

$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M}$

L'équation devient :

$$\dot{\overrightarrow{OM}} = \vec{\omega}_{P1} \times \left(\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M} \right) + \vec{\omega}_{P2/1} \times \overrightarrow{O_2M}$$

ou : $$\boxed{\dot{\overrightarrow{OM}} = \vec{\omega}_{P1} \times \overrightarrow{O_1O_2} + \left(\vec{\omega}_{P1} + \vec{\omega}_{P2/1} \right) \times \overrightarrow{O_2M}}$$ ***(éq. 9.390.)***

Et utilisant la première approche (***éq. 9.360.***), adaptée à notre cas, on obtient :

$$\dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{\overrightarrow{O_1M}} = \dot{\overrightarrow{O_1O_2}} + \vec{\omega}_P \times \overrightarrow{O_2M}$$

Et sachant que O_2 n'effectue qu'une rotation autour de l'axe a_1 :

$$\dot{\overrightarrow{O_1O_2}} = \vec{\omega}_{P1} \times \overrightarrow{O_1O_2}$$

on obtient :

$$\boxed{\dot{\overrightarrow{OM}} = \vec{\omega}_{P1} \times \overrightarrow{O_1O_2} + \vec{\omega}_P \times \overrightarrow{O_2M}} \textbf{\textit{(éq. 9.393.)}}$$

Conclusion (en comparant avec ***éq. 9.390.***) :

$$\boxed{\vec{\omega}_P = \vec{\omega}_{P1} + \vec{\omega}_{P2/1}}$$

Exprimons la vitesse d'une autre manière, repartons de l'équation (***éq. 9.390.***) :

$$\begin{aligned}
\dot{\overrightarrow{OM}} &= \vec{\omega}_{P1} \times \overrightarrow{O_1O_2} + \left(\vec{\omega}_{P1} + \vec{\omega}_{P2/1}\right) \times \overrightarrow{O_2M} \\
&= \vec{\omega}_{P1} \times \left(\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M}\right) + \vec{\omega}_{P2/1} \times \overrightarrow{O_2M} \\
&= \vec{\omega}_{P1} \times \overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega}_{P2/1} \times \overrightarrow{O_2M} \\
&= \vec{\omega}_{P1} \times \overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega}_{P2} \times \left(\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_1O_2}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\dot{\overrightarrow{OM}} = \left(\vec{\omega}_{P1} + \vec{\omega}_{P2/1}\right) \times \overrightarrow{O_1M} - \vec{\omega}_{P2/1} \times \overrightarrow{O_1O_2}} \textbf{\textit{(éq. 9.396.)}}$$

a) Si $\vec{\omega}_{P1} + \vec{\omega}_{P2/1} = \vec{0}$

Les vecteurs $\vec{\omega}_{P1}$ et $\vec{\omega}_{P2/1}$ sont opposés, leur somme vectorielle est nulle : $\vec{\omega}_P = \vec{0}$. Il n'y a donc pas de rotation "*absolue*". La somme de ces 2 mouvements de rotation se ramène donc à un mouvement de translation.

Si on compare (***éq. 9.396.***) avec (***éq. 9.393.***) on peut en déduire que :

$$\vec{\omega}_{P1} \times \overrightarrow{O_1O_2} = -\vec{\omega}_{P2/1} \times \overrightarrow{O_1O_2}$$

b) Si $\vec{\omega}_{P1} + \vec{\omega}_{P2/1} \neq \vec{0}$

On a une rotation autour d'un axe parallèle à a_1 et à a_2 passant par un point (fixe) I appartenant à la droite passant par O_1 et O_2. La position de ce point I est donné par (***éq. 9.396.***) :

$$\vec{v}_I = \dot{\overrightarrow{OI}} = \vec{0} = \left(\vec{\omega}_{P1} + \vec{\omega}_{P2/1}\right) \times \overrightarrow{O_1I} - \vec{\omega}_{P2/1} \times \overrightarrow{O_1O_2}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{O_1 I} = \frac{\left\|\vec{\omega}_{P\,2/1}\right\|}{\left\|\vec{\omega}_{P\,1}\right\| + \left\|\vec{\omega}_{P\,2/1}\right\|} \overline{O_1 O_2}$$

Ce point I est en fait un point de l' "*axe instantané de rotation*", axe qui est parallèle aux axes a_1 et a_2.

La vitesse absolue d'un point M appartenant au solide *S*, s'obtient aisément à partir de cet axe instantané de rotation.

$$\vec{v}_{M\,a} = \dot{\overrightarrow{OM}} = \vec{\omega}_P \times \vec{IM} = \left(\vec{\omega}_{P\,1} + \vec{\omega}_{P\,2/1}\right) \times \vec{IM}$$

Et comme $\vec{\omega}_P \perp \vec{IM}$, $\left\|\vec{v}_M\right\| = \left\|\vec{\omega}_P\right\| \overline{IM}$.

En *conclusion*, la composition de 2 rotations d'axes parallèles est :

- soit une *rotation d'axe parallèle* aux deux autres $\vec{\omega}_P \neq \vec{0}$;
- soit une *translation* de vitesse perpendiculaire aux axes de rotation $\vec{\omega}_P = \vec{0}$.

Application 9.13. *La pédale de bicyclette* :
Soit la vitesse angulaire d'entraînement du pédalier : $\vec{\omega}_{P\,1}$.

Soit la vitesse angulaire relative de la pédale par rapport au pédalier : $\vec{\omega}_{P\,2/1}$.

Les deux vitesses angulaires ont même norme et on suppose que la pédale reste horizontale dans ce mouvement composé.

Solution :

Positionnement du système d'axe et projection des vecteurs

$$\vec{\omega}_{P\,1} = \left\|\vec{\omega}_{P\,1}\right\| \vec{1}_x = \left\|\vec{\omega}_{\overline{O_1 O_2}}\right\| \vec{1}_x$$

$$\vec{\omega}_{P\,2/1} = -\left\|\vec{\omega}_{P\,2/1}\right\| \vec{1}_x = -\left\|\vec{\omega}_{pédale}\right\| \vec{1}_x$$

$$\left\|\vec{\omega}_{P\,1}\right\| = \left\|\vec{\omega}_{P\,2/1}\right\|$$

On remarquera que les vecteurs $\vec{\omega}_{P\,1}$ et $\vec{\omega}_{P\,2/1}$ forment un couple.

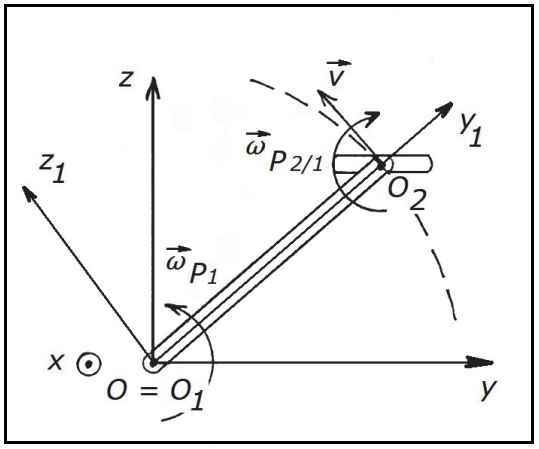

fig. 9.40. *- Application 9.13.*

Recherche de la vitesse

Comme la pédale est constamment horizontale, cela veut dire que tous les points du solide "*pédale*" ont la même vitesse de translation circulaire.

Cette vitesse ($\vec{v} = \dot{\overrightarrow{OO_2}} = \dot{\overrightarrow{O_1 O_2}}$) est, à tout instant perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\left\{\vec{\omega}_{P\,1}; \vec{\omega}_{P\,2/1}\right\}$ et vaut :

$$\left\|\vec{v}\right\| = \left\|\vec{\omega}_{P\,1}\right\| \overline{O_1 O_2}$$

et comme $\left\|\vec{\omega}_{P1}\right\| = \left\|\vec{\omega}_{P2/1}\right\|$, nous avons :

$$\left\|\vec{v}\right\| = \left\|\vec{\omega}_{P1}\right\| \overline{O_1O_2} = \left\|\vec{\omega}_{P2/1}\right\| \overline{O_1O_2}$$

Conclusion : la vitesse de translation circulaire du solide vaut le moment formé par les deux vecteurs $\vec{\omega}_{P1}$ et $\vec{\omega}_{P2/1}$.

> *Conclusion importante* :
> On peut dire qu'un couple de vecteurs "*vitesses angulaires*" est équivalent à un vecteur "*vitesse de translation*" et inversement.

B) *Composition de deux rotations d'axes concourants*

Soient :

- a_1 un axe de rotation immobile et a_2 un axe de rotation en mouvement autour de a_1;
- O_1 étant le point d'intersection des deux axes a_1 et a_2;
- $\vec{\omega}_{P1}$ la vitesse de rotation autour de l'axe a_1;
- $\vec{\omega}_{P2/1}$ la vitesse de rotation autour de l'axe a_2.

Prenons un exemple :

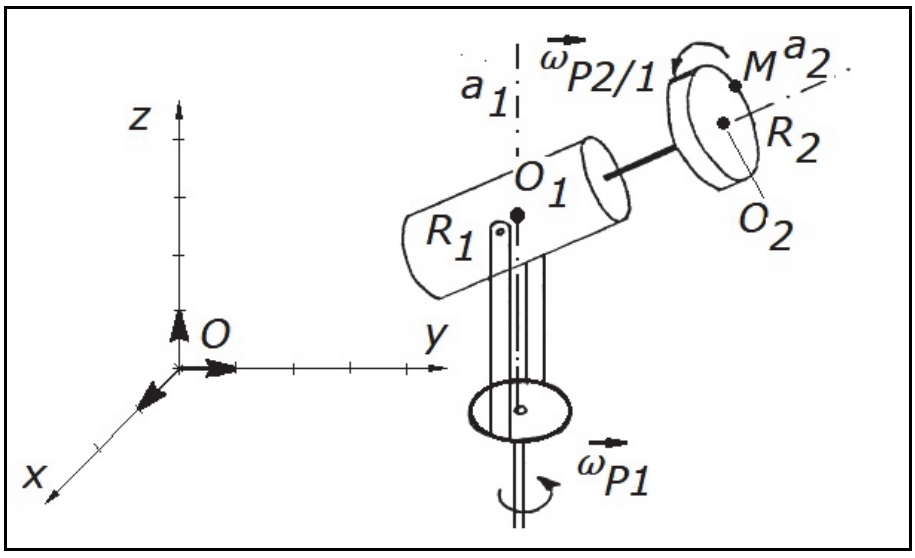

fig. 9.41. *- Composition de 2 rotations d'axes concourants.*

Le robot R_1 fait tourner la meule R_2 autour de l'axe a_2 avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}_{P2/1}$ et il a lui-même un mouvement de rotation autour de l'axe a_1 caractérisé par la vitesse angulaire $\vec{\omega}_{P1}$.

Si les axes de rotation a_1 et a_2 se coupent en un point O_1, on a $\vec{v}_{O_1} = \dot{\overrightarrow{OO_1}} = \vec{0}$. Ce point appartient donc à l'axe instantané de rotation du mouvement absolu.

Recherche la vitesse d'un point M appartenant à la meule. Soit la formule générale :

$$\vec{v}_{M\,a} = \dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{\overrightarrow{OO_1}} + \vec{\omega}_{P1} \times \vec{O_1M} + \vec{v}_{O_2/O_1} + \vec{\omega}_{P2/1} \times \vec{O_2M}$$

avec, sachant que nous avons que des mouvement de rotations :

$$\begin{cases} \dot{\overrightarrow{OO_1}} = \vec{0} \\ \vec{v}_{O_2/O_1} = \vec{0} \end{cases}$$

d'où :

$$\dot{\overrightarrow{OM}} = \vec{\omega}_{P1} \times \left(\vec{O_1O_2} + \vec{O_2M} \right) + \vec{\omega}_{P2/1} \times \vec{O_2M}$$

$$= \vec{\omega}_{P1} \times \vec{O_1O_2} + \left(\vec{\omega}_{P1} + \vec{\omega}_{P2/1} \right) \times \vec{O_2M}$$

Si on compare cette dernière équation avec (***éq. 9.360.***) :

$$\dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{\overrightarrow{OO_2}} + \vec{\omega}_P \times \vec{O_2M}$$

$$= \left(\dot{\overrightarrow{OO_1}} + \dot{\overrightarrow{O_1O_2}} \right) + \vec{\omega}_P \times \vec{O_2M}$$

$$= \left(\vec{0} + \vec{\omega}_{P1} \times \vec{O_1O_2} \right) + \vec{\omega}_P \times \vec{O_2M}$$

on constate que :

$$\boxed{\vec{\omega}_P = \vec{\omega}_{P1} + \vec{\omega}_{P2/1}}$$

<u>*Conclusion*</u> :
La composition de deux rotations d'axes concourants, est une rotation d'axe passant par le point d'intersection, ligne d'action de la résultante des vecteurs $\vec{\omega}_{P1}$ et $\vec{\omega}_{P2/1}$ (ligne d'action du vecteur de Poisson du solide qui est aussi l'axe instantané de rotation).

Etant donné que le point O_1 est un point de l'axe instantané de rotation, nous pouvons aussi écrire que la vitesse d'un point M est égale à :

$$\boxed{\dot{\overrightarrow{OM}} = \vec{\omega}_P \times \vec{O_1M} = \left(\vec{\omega}_{P1} + \vec{\omega}_{P2/1} \right) \times \vec{O_1M}}$$

9.4.5. <u>Composition d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation</u>

Lors de l'étude du mouvement plan, nous avons décomposé celui-ci en une translation suivie d'une rotation.

En passant à la limite ($\Delta t \to 0$), le mouvement était en fait décomposé en une translation et une rotation instantanée.

Nous avons également vu que le même mouvement plan pouvait être décomposé en une suite de rotation infinitésimale autour d'un CIR.

Il s'agit ici du problème inverse de composition d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation.

Cette composition se ramène donc à la recherche d'une *rotation simple* du solide autour d'un *axe instantané de rotation*.

Une façon simple d'aborder ce problème est de considérer les vecteurs $\vec{v}$ pour la translation et $\vec{\omega}$ pour la rotation.

A) <u>*La vitesse et la vitesse angulaire sont perpendiculaires*</u>

Nous avons vu (***§ 9.4.4.***) qu'un couple de vecteurs $\vec{\omega}$ représentait une translation et pouvait donc être remplacé par le vecteur $\vec{v}$ de cette translation.

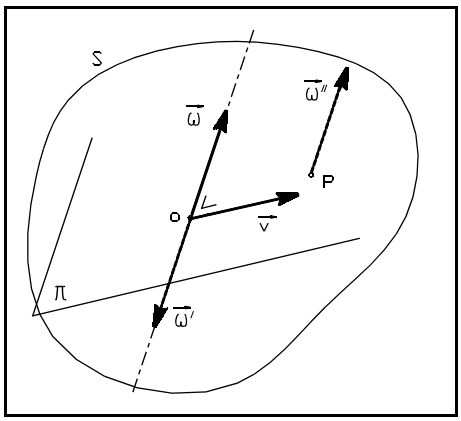

fig. 9.42. *- $\vec{v}$ et $\vec{\omega}$ sont perpendiculaires.*

La réciproque est vraie. Nous pouvons remplacer le vecteur $\vec{v}$ par un couple de vecteurs $\vec{\omega}'$ et $\vec{\omega}''$ égaux en module à $\vec{\omega}$, distant d'une longueur $\overline{OP}$ telle que :

$$\|\vec{v}\| = \|\vec{\omega}''\|\,\overline{OP} \quad \Rightarrow \quad \overline{OP} = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{\omega}''\|} = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{\omega}\|}$$

leurs sens résultant du sens de $\vec{v}$. Appliquons $\vec{\omega}'$ (de sens opposé à $\vec{\omega}$) en O.

Nous nous trouvons devant un ensemble de 3 vecteurs $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}'$ et $\vec{\omega}''$ dont deux $\vec{\omega}$ et $\vec{\omega}'$ sont réciproques et s'annulent donc.

Le système ($\vec{v}$; $\vec{\omega}$) se ramène donc à une rotation $\vec{\omega}''\left(=\vec{\omega}_P\right)$ autour d'un axe instantané de rotation passant par P.

Remarque :
Ce résultat concorde avec l'étude du mouvement plan : $\vec{\omega}_P$ est indépendant du pôle choisi pour la décomposition en translation + rotation.

B) *La vitesse et la vitesse angulaire sont parallèles*

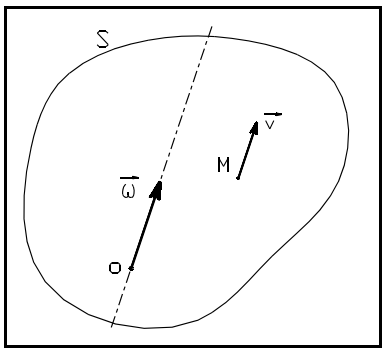

fig. 9.43. *- $\vec{v}$ et $\vec{\omega}$ sont parallèles.*

On voit immédiatement qu'il s'agit d'un *mouvement hélicoïdal* du solide.

Un point M quelconque du solide parcourt une trajectoire, sur une surface cylindrique, dont l'axe est l'axe de rotation du mouvement.

La distribution des vitesses des points du solide est alors :

$$\vec{v}_{M\,a} = \overrightarrow{\dot{OM}} = \overrightarrow{\dot{OO}_1} + \vec{\omega}_{P\,1} \times \vec{O_1M} + \vec{v}_{O_2/O_1} + \vec{\omega}_{P\,2/1} \times \vec{O_2M}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_{O_2/O_1} = \vec{0} \\ \vec{\omega}_{O_2/O_1} = \vec{0} \\ \vec{\omega}_{P_1} = \vec{\omega}_P \end{cases}$$

D'où :

$$\vec{v}_{M\,a} = \overrightarrow{\dot{OO}_1} + \vec{\omega}_P \times \vec{O_1M}$$

et comme $\vec{v}$ et $\vec{\omega}$ sont parallèles, on peut remplacer $\overrightarrow{\dot{OO}_1}$ par $k\,\vec{\omega}$ ($k \in \Re$) et donc :

$$\boxed{\vec{v}_{M\,a} = k\,\vec{\omega}_P + \vec{\omega}_P \times \vec{O_1M}}$$

C) *La vitesse et la vitesse angulaire sont de directions quelconques*

Le problème se ramène aux deux cas précédents en décomposant $\vec{v}$ suivant l'axe de rotation et suivant une perpendiculaire à cet axe.

On obtient donc un mouvement hélicoïdal dont l'axe de rotation est un axe instantané d'où le nom *d'axe instantané hélicoïdal*.

9.5. *Travaux virtuels et conservation de la puissance*

9.5.1. Introduction

Nous avons abordé le principe des travaux virtuels dans le chapitre 5 consacré à la statique des corps indéformables. C'est donc une approche de recherche de forces (couples) qui s'applique très bien aux "mécanismes". En effet, avec cette technique, on peut connaître la relation entre la force (couple) à la sortie d'un système mécanique en fonction de la force (couple) à l'entrée, sans avoir à connaître le processus de transmission.

Partons de l'expression des travaux virtuels. Soit :

$$\delta W = \vec{f} \bullet \delta\vec{r}$$

En divisant par un petit delta de temps, nous trouvons :

$$\frac{\delta W}{\delta t} = \frac{\vec{f} \bullet \delta\vec{r}}{\delta t} \quad \Rightarrow \quad P = \vec{f} \bullet \vec{v}$$

Autrement dit, on pourrait, connaissant les forces (couples) à l'entrée et à la sortie d'un mécanisme et, connaissant, par exemple, la vitesse à l'entrée, trouver très facilement la vitesse de sortie, sans passer par la connaissance de toute la transmission.

En effet, dans un mécanisme, la puissance se transmet intégralement, dans l'hypothèse des pertes par frottement négligeable par rapport aux puissances transmisses.

Il y a donc conservation de la puissance.

On peut évidemment, connaissant les vitesses à l'entrée et sortie du mécanisme, retrouver la force (couple) en sortie en fonction de la force (couple) à l'entrée.

Quelques exemples ci-dessous vous montreront la mise en pratique de cette conservation de puissance dans les mécanismes.

9.5.1. Exemples

Application 9.14. Dans le mécanisme "*à parallélogramme*" représenté ci-contre, B, D, E et N sont des articulations parfaites (sans frottement) situées aux extrémités des barres; les deux barres $\overline{AE}$ et $\overline{BD}$ sont de plus articulées en leur milieu C. A est un appui mobile, sans frottement, pouvant se déplacer dans une rainure verticale.

$\overline{AE} = 2\,\overline{AC} = \overline{BD} = 2\,\overline{BC} = 2\,\overline{DN} = 2\,\overline{EN} = 2\,l$.

Sachant que la force $\vec{f}_N$ horizontale égale 1000 *N*, quelle est la relation entre la vitesse du vérin en A et la vitesse de déplacement horizontal de cette force $\vec{f}_N$.

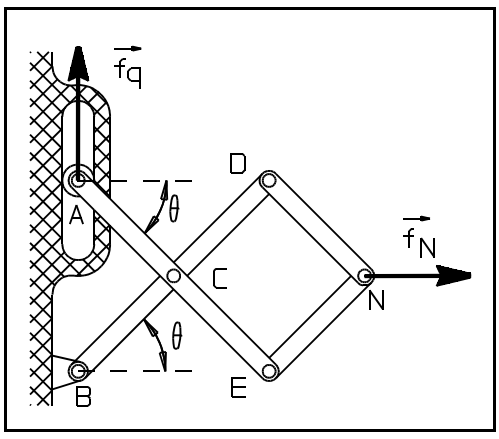

fig. 9.44. *- Application 9.14.*

Solution :
Conservation de la puissance

Dans l'application ***5.12.*** "Mécanisme à parallélogramme", nous avons trouvé, au moyen des travaux virtuels, la relation entre la force $\left\|\vec{f}_N\right\|$ et la force du vérin $\left\|\vec{f}_q\right\|$. Soit :

$$\left\|\vec{f}_q\right\| = \frac{3}{2}\tan\theta \left\|\vec{f}_N\right\|$$

Pour trouver la relation entre la vitesse de déplacement de la charge $\left\|\vec{f}_N\right\|$ et celle du vérin, on peut utiliser la notion de conservation de la puissance (si, par hypothèse, ce qui est le cas ici, les divers frottements sont négligeables par rapport au forces en présence).

D'où :

$$\left\|\vec{f}_q\right\| \left\|\vec{v}_A\right\| = \left\|\vec{f}_N\right\| \left\|\vec{v}_N\right\| \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{v}_N\right\| = \left\|\vec{v}_A\right\| \frac{\left\|\vec{f}_q\right\|}{\left\|\vec{f}_N\right\|} = \left\|\vec{v}_A\right\| \frac{\frac{3}{2}\tan\theta \left\|\vec{f}_N\right\|}{\left\|\vec{f}_N\right\|}$$

$$\Rightarrow \quad \left\|\vec{v}_N\right\| = \frac{3}{2}\tan\theta \left\|\vec{v}_A\right\|$$

Application 9.15. Le piston P, dans un cylindre vertical, est actionné par le levier $\overline{OA}$ et la bielle $\overline{BC}$. Les dimensions sont les suivantes : $\overline{OB} = 30\,cm$; $\overline{BC} = 10\sqrt{3}\,cm$; $d = 20\sqrt{3}\,cm$.

Quelle est la relation entre le couple moteur $\left\|\vec{C}_{mot}\right\|$ et la force $\left\|\vec{f}_P\right\|$ exercée sur le piston, sachant que la vitesse angulaire du levier $\overline{OA}$ autour de O est constant.

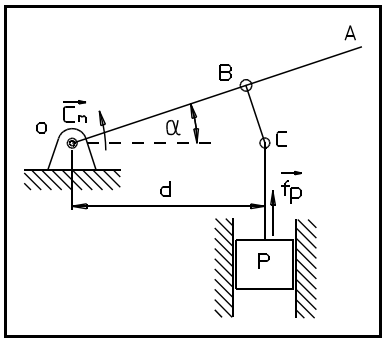

fig. 9.45. *- Application 9.15.*

Solution :

Conservation de la puissance

Dans l'application ***9.1.***, nous avons trouvé la relation entre la vitesse du piston $\left\|\vec{v}_P\right\|$ et la vitesse de rotation $\left\|\vec{\omega}\right\|$ du levier $\overline{OA}$. Soit :

$$\left\|\vec{v}_P\right\| = \left\|\vec{v}_C\right\| = \frac{\left\|\vec{\omega}_{\overline{OA}}\right\| \overline{OB}}{\cos\alpha}$$

Dès lors, en utilisant la conservation de la puissance, on obtient :

$$\left\|\vec{C}_{mot}\right\| \left\|\vec{\omega}_{\overline{OA}}\right\| = \left\|\vec{f}_P\right\| \left\|\vec{v}_P\right\|$$

$$\Rightarrow \quad \left\|\vec{C}_{mot}\right\| = \left\|\vec{f}_P\right\| \frac{\left\|\vec{v}_P\right\|}{\left\|\vec{\omega}_{\overline{OA}}\right\|} = \frac{\left\|\vec{f}_P\right\|}{\left\|\vec{\omega}_{\overline{OA}}\right\|} \frac{\left\|\vec{\omega}_{\overline{OA}}\right\| \overline{OB}}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \left\|\vec{C}_{mot}\right\| = \left\|\vec{f}_p\right\| \frac{\overline{OB}}{\cos\alpha}$$

Application 9.16. Rechercher la relation entre le couple moteur $\left\|\vec{C}_m\right\|$ et la force exercée $\left\|\vec{f}_P\right\|$ sur le piston.

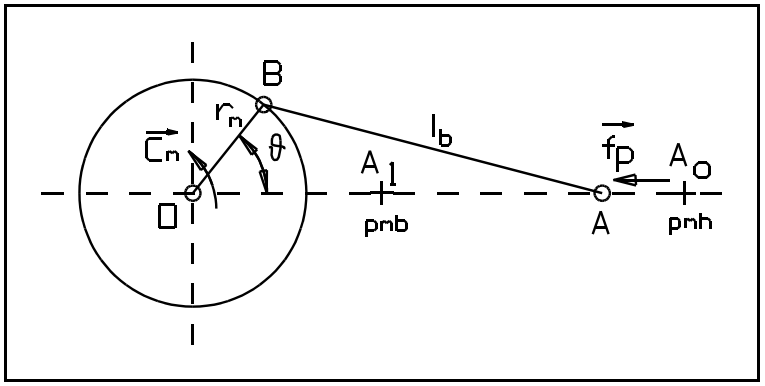

fig. 9.46. *- Principe du système bielle-manivelle*

Solution :

Conservation de la puissance

Utilisons ici encore la conservation de la puissance. Soit :

$$\left\|\vec{C}_m\right\|\left\|\vec{\omega}\right\| = \left\|\vec{f}_P\right\|\left\|\vec{v}_A\right\| \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{C}_m\right\| = \left\|\vec{f}_P\right\|\frac{\left\|\vec{v}_A\right\|}{\left\|\vec{\omega}\right\|}$$

Au ***§ 9A.1.2.***, ***éq. 9A.47.***, nous avons trouvé l'expression (simplifiée) de la vitesse du piston en fonction de la vitesse de rotation $\left\|\vec{\omega}\right\|$. Et donc :

$$\Rightarrow \quad \left\|\vec{C}_m\right\| = \left\|\vec{f}_P\right\|\frac{\left\|\vec{\omega}\right\|\left(\sin\theta + \frac{\sin(2\,\theta)}{k}\right)}{\left\|\vec{\omega}\right\|}$$

$$\Rightarrow \quad \left\|\vec{C}_m\right\| = \left\|\vec{f}_P\right\|\left(\sin\theta + \frac{\sin(2\,\theta)}{k}\right)$$

Avec : $k = l_b / r_m$

Remarques

1) On aurait pu évidemment utiliser la formule exacte pour la vitesse du piston.

2) Dans un moteur à piston, la force $\left\|\vec{f}_P\right\|$ sur le piston est fonction du temps.