CHAPITRE 1. INTRODUCTION & VECTEURS

1.1. *Introduction à la mécanique générale*

1.1.1. Historique

La mécanique se perd dans la nuit des temps puisque le levier et la roue remontent à 150.000 ans. L'antiquité codifie les lois sur les leviers en statique (Archimède en 250 av. J.-C.). Le moyen-age ne fait aucun apport. Il faut attendre la Renaissance et les Temps Modernes pour voir naître, coup sur coup, la cinématique avec la chute des corps (Galilée en 1600) et la dynamique avec la gravitation universelle (Newton en 1700 et Bernouilli avec la liaison de la dynamique aux mathématiques). Vers 1750 d'Alembert ramène la dynamique à la statique. Les Temps Contemporains remettent la Mécanique en cause avec la relativité (Einstein en 1900).

1.1.2. Système d'unités

Alphabet grec			
Lettres romaines	*Lettres grecques*		
	Majuscules	Minuscules	Appellation
a	Α	α	alpha
b	Β	β	bêta
g	Γ	γ	gamma
d	Δ	δ	delta
e	Ε	ε	epsilon
z	Ζ	ζ	dzêta
ê	Η	η	êta
th	Θ	θ	thêta
i	Ι	ι	iota
k, c	Κ	κ	kappa
l	Λ	λ	lambda
m	Μ	μ	mu
n	Ν	ν	nu
x	Ξ	ξ	ksi
o	Ο	ο	omicron
p	Π	π	pi
r	Ρ	ρ	rhô
s	Σ	σ	sigma
t	Τ	τ	tau
u, y	Υ	υ	upsilon
ph, f	Φ	φ ou φ	phi
ch	Χ	χ	khi
s	Ψ	ψ	psi
o	Ω	ω	oméga

Tableau 1.1. -

A) *Unités fondamentales*

Les grandeurs définies par une unités arbitrairement choisie, sans référence à d'autres grandeurs mesurables, sont appelées : "*grandeurs fondamentales*" et l'unité correspondante est dite "*unité fondamentale"* (ce qui ne signifie pas que ces grandeurs ont plus d'importance que les autres!).

Le système d'unités généralement adopté en physique est le "*Système International*" (SI), aussi appelé MKSA. dont les unités fondamentales sont :

▸ le mètre	m	comme unité de longueur
▸ le kilogramme	kg	comme unité de masse
▸ la seconde	s	comme unité de temps
▸ l'ampère	A	comme unité de courant électrique
▸ le kelvin	K	comme unité de température
▸ la mole	mol	comme unité de quantité de matière
▸ le candela	cd	comme unité d'intensité lumineuse.

Les unités fondamentales définissent un système d'unités; elles font l'objet d'un choix. Des notions fondamentales d'espace, de masse et de temps, exprimées par ces unités fondamentales se déduisent des notions physiques précitées.

B) *Unités dérivées*

L'unité employée pour exprimer une notion dérivée ne peut plus faire l'objet d'un choix; elle se déduit en effet des unités fondamentales choisies. C'est une unité dérivée, et elle est définie au moyen de relations algébriques entre les grandeurs fondamentales. Citons par exemple les unités de :

- surface m^2
- volume m^3
- vitesse linéaire m/s
- accélération linéaire m/s^2
- force $N = kgm/s^2$ (newton)
- énergie, travail $J = Nm$ (joule)
- puissance J/s ou W (watt)
- moment d'une force Nm
- moment d'inertie kgm^2

Rappelons la particularité relative à la mesure des angles : on admet en physique que l'angle est une grandeur *sans dimension*. définie par le rapport de la longueur de l'arc à la longueur du rayon de la circonférence, ce que l'on spécifie par l'appellation "*radian*" ($rad = m/m$). Dans certains cas, on sera amené à exprimer l'angle au moyen de différentes unités (tour, degré,...)

C) *Ecriture des unités*

Signalons quelques règles d'écriture :

▸ pas de point final	15 W
▸ pas de pluriel	30 km
▸ invariable avec la langue	6 m
▸ majuscule si l'unité provient d'un nom propre	9 N (mais 9 newtons)
▸ minuscule aux noms communs	32 s
▸ grandeurs produits, (sans point ni signe ×)	25 kWh

- grandeurs quotients (barre oblique ou horizontale) 72 *m/s* ou $72\,\frac{m}{s}$

Remarques :

1) on écrit : 3.75 *m/s* et non 3 *m/s* 75

2) 5.3 et non $5.^{3}$

Symboles des multiples et des sous-multiples		
Giga	*G*	10^9
Méga	*M*	10^6
kilo	*k*	10^3
hecto	*h*	10^2
déca	*da*	10^1
déci	*d*	10^{-1}
centi	*c*	10^{-2}
milli	*m*	10^{-3}
micro	*µ*	10^{-6}
nano	*n*	10^{-9}
pico	*p*	10^{-12}

Tableau 1.2. -

Exemples :

$125\ MW = 125\,10^6\ W = 125\,000\,000\,W$

$6\,daN = 60\ N$

$9\ \mu s = 10^{-6}\ s = 0.000009\,s\ 9$

D) *Analyse dimensionnelle*

Il résulte de ce qui précède qu'il est possible d'additionner que des grandeurs ayant même dimension et même unité. En particulier, tous les termes d'une équation physique devront avoir mêmes dimensions. *Cela doit devenir un véritable réflexe que de faire cette vérification.*

LA VÉRIFICATION DE LA DIMENSION DES TERMES D'UNE ÉQUATION EST TOUJOURS UN CONTRÔLE TRÈS UTILE

1.1.3. Les trois parties de la Mécanique

1) *La Statique* — La Statique étudie les conditions qui régissent l'équilibre des corps. La Statique examine donc les conditions pour que les corps reste, soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

2) *La Cinématique* — La Cinématique étudie les mouvement des corps sans s'occuper des forces qui les provoquent. La Cinématique s'occupe cependant du temps qui régit les mouvements.

3) *La Dynamique* — La Dynamique étudie les mouvements, mais en tenant compte, cette fois, des forces qui les provoquent. La Dynamique recherche donc les lois de liaison entre forces et mouvements.

1.1.4. Principes fondamentaux

1) *Corps soumis à l'action d'une force*

Un corps soumis à l'action d'une force, constante en grandeur et en sens, prend un mouvement rectiligne uniformément accéléré, ayant même direction et même sens que la force agissante.

2) *Corps soumis à l'action d'un couple*

Un corps soumis à l'action d'un couple, constant en grandeur et en sens, prend un mouvement circulaire uniformément accéléré, ayant même sens que le couple agissant.

3) *Corps non soumis à l'action de forces, ni à l'action de couples*

Un corps qui n'est soumis à l'action d'aucune force ni d'aucun couple (ou à un ensemble de forces ou de couples dont la résultante est nulle) est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

1.2. *Vecteurs*

1.2.1. Définitions

A) *Scalaires*

Ce sont des grandeurs qu'un simple nombre suffit à déterminer, lorsque l'unité de mesure à été choisie. Exemple : une surface, un volume une masse... Ces grandeurs n'ont pas de "*direction*". Le nombre peut néanmoins être affecté d'un signe "+" ou "−", après une convention de "*valeur 0*" de la grandeur considérée.

B) *Vecteurs*

Une grandeur vectorielle dépend, outre d'un nombre qui mesure la grandeur, d'un élément supplémentaire : une direction qui est un élément géométrique. Pour avoir un vecteur il faut les éléments suivant :

- *un module* : c'est-à-dire une grandeur (intensité)
- *une direction* : ou droite d'action
- *un sens* : positif ou négatif
- *un point d'application* (ou origine du vecteur)

Tel est le cas par exemple pour un déplacement, pour une force, pour une accélération,... Ces grandeurs physiques sont représentées par des vecteurs; on les notera par exemple $\vec{V}$, ou $\overrightarrow{AB}$.

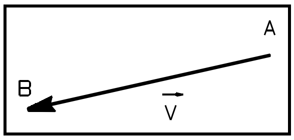


fig. 1.1. -

La "*flèche*" permettant effectivement de distinguer le vecteur d'un scalaire. Le module du vecteur $\vec{V}$ sera noté $\|\vec{V}\|$; le module d'un vecteur est un scalaire !

1.2.2. <u>Opérations élémentaires sur les vecteurs</u>

Les opérations d'addition, de soustraction et de multiplication habituelles dans l'algèbre des nombres réels sont généralisables à l'algèbre des vecteurs à condition d'avoir des définitions convenables, à savoir :

A) Deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont égaux s'ils ont même module, même direction et même sens, quelles que soient leurs origines.

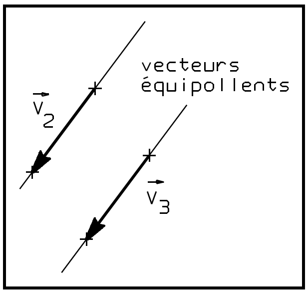


fig. 1.2. -

B) Un vecteur de sens opposé à $\vec{V}_8$, mais ayant la même longueur, est représenté par $\vec{V}_9 = -\vec{V}_8$.

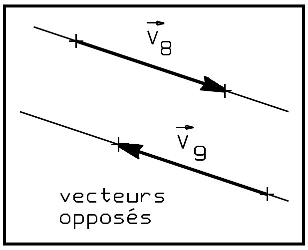


fig. 1.3. -

C) La somme (ou résultante) de $\vec{V}_1$ et de $\vec{V}_2$, est un vecteur $\vec{R}$ formé en plaçant l'origine de $\vec{V}_2$, à l'extrémité de $\vec{V}_1$ et en joignant l'origine de $\vec{V}_1$ à l'extrémité de $\vec{V}_2$. On écrit : $\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ (par ex. : $\vec{3} + \vec{4} = \vec{5}$). Cette définition est équivalente pour l'addition vectorielle à la construction du parallélogramme comme cela est indiqué également à la figure ci-dessous.

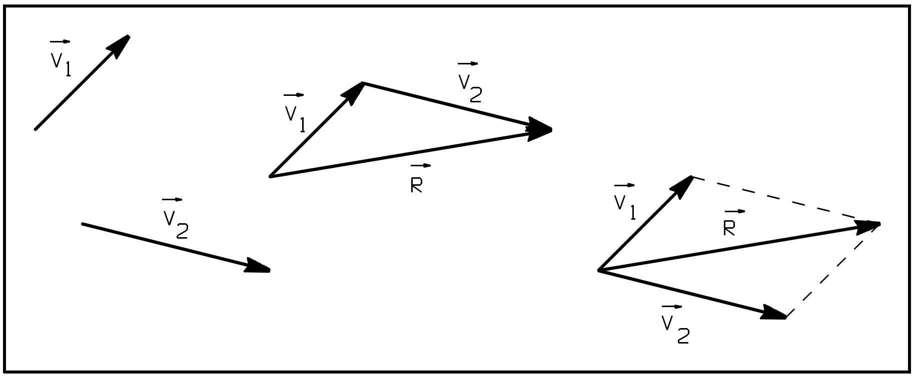


fig. 1.4. -

Les extensions aux sommes de plus de deux vecteurs sont immédiates. Par exemple, la ***fig. 1.5.*** montre comment obtenir la somme ou résultante $\vec{R}$ des vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ et $\vec{V}_4$ (l'ordre dans lequel on exécute la somme n'a pas d'importance : *commutativité*).

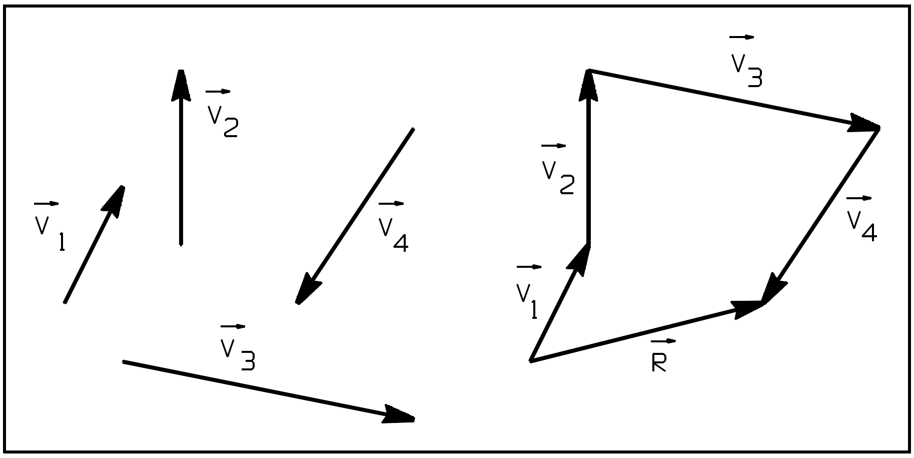


fig. 1.5. -

D) La différence de $\vec{V}_1$ et de $\vec{V}_2$ notée : $\vec{R} = \vec{V}_1 + \left(-\vec{V}_2\right)$, est obtenue en faisant la somme de $\vec{V}_1$ et de $\left(-\vec{V}_2\right)$ vecteur opposé à $\vec{V}_2$. La différence de deux vecteurs est non commutative $\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = -\left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right)$.

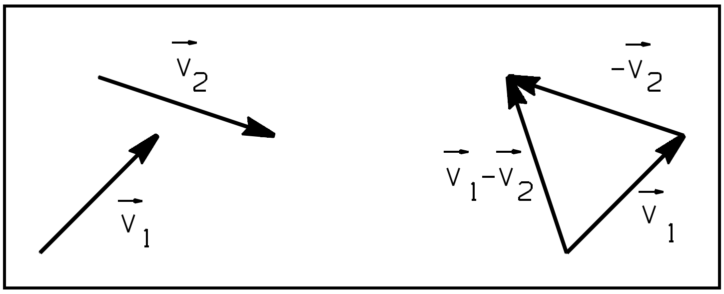


fig. 1.6. -

1.3. ***<u>Notions de “force”</u>***

1.3.1. <u>Généralités</u>

La définition précise d’une force ne pourra être donnée que dans la partie “*Dynamique*”. Cependant, dès le chapitre consacré à la “*statique*”, nous aurons à manipuler cette notion de force.

Nous admettrons pour l’instant une notion intuitive de force, déduite de notre expérience quotidienne (la notion de force est donnée par la sensation d’effort musculaire) il faut exercer un tel effort :

1) pour modifier l’état de repos ou de mouvement d’un corps (exemples : mettre en mouvement un objet en le faisant glisser sur une table, arrêter un chariot qui dévale une pente,...);

2) pour déformer un corps (plier une branche d’arbre, allonger un fil de caoutchouc,...).

Cette notion suggère que la force est une grandeur vectorielle possédant une *direction*, un *sens*, une *intensité* (ou module) et un *point d’application*.

Les forces déployées par d’autres corps matériels sur les particules du corps donné sont dites “*extérieures*”. Les forces avec lesquelles les particules du corps donné agissent les unes sur les autres sont dites “*intérieures*”.

Nous pouvons ainsi classifier les différentes forces soit :

1) *<u>D’après le sens</u>* :

Force motrice :	même sens que le mouvement (le vent dans les voiles d’un navire)
Force résistante :	sens contraire à celui du mouvement (les forces de frottements)

2) *<u>D’après l’action</u>* :

Forces de contact :	*action directe* : elles sont appliquées, soit en un point (forces “*concentrées*” ou “*ponctuelles*”), soit sur une partie ou sur l’entièreté de la surface du corps (forces “*réparties*”).
Forces à distance :	*action à distance* : elles n’ont pas besoin de zone de contact pour être appliquées; ce sont les forces de pesanteur, forces magnétiques, forces électrostatiques ...
“*Forces*” d’inertie :	elles résultent d’une variation dans le mouvement d’un corps de masse non nulle; elles seront abordées dans la partie dynamique du cours.

1.3.2. Unités de forces

Dans le système international (SI), l'unité de force est le : *newton N*.

> *Définition* : le newton N est la force qui communique à une masse de un kilogramme une accélération de 1 m/s^2.

Dans l'ancien système des mécaniciens (MKpS), l'unité de force était le : *kilogramme-force (kgf) ou kilogramme-poids (kg')*.

> *Définition* : le kilogramme-force kgf ou kilogramme-poids kg' est la force qui communique à une masse de un kilogramme une accélération de 9.81 m/s^2.

La relation entre les deux systèmes est :

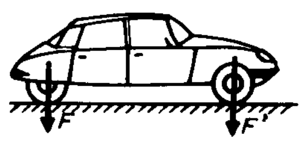
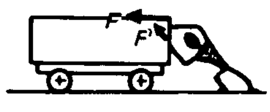
$$\boxed{\begin{cases} 1\ N = 0.102\ kgf \\ 1kgf = 9.81\ N \approx 10\ N \end{cases}}$$

Remarque importante :
Il ne faut pas confondre la notion de "*masse*" avec celle de "*poids*". En effet, **la masse** est l'ensemble des molécules qui composent un corps tandis que **le poids** est la force que cette masse exerce sur le sol (terre). Lorsque votre docteur vous demande votre poids et que vous lui répondez : 90 *kg*, vous le lui donnez en fait dans les anciennes unités de force *kg'*.

1.3.3. Système de forces

> *Définition* : un corps est soumis à l'action d'un système de forces quand il est sollicité simultanément par plusieurs forces.

Nous avons des systèmes de forces :

concourantes	**parallèles**	**quelconques**
		

Un *système de forces* est *en équilibre* lorsque, appliqué à un corps libre, il ne modifie ni son état de repos ni son état de mouvement rectiligne uniforme.

La *résultante d'un système de force* est la force unique qui a le même effet que toutes les autres ensemble. Les forces constituant le système sont appelées forces composantes.

1.4. ***Notions de “moment de forces”***

L’expérience quotidienne nous montre que la seule notion de *force* ne suffit pas : par exemple, pour soulever un poids $\vec{P}$ au moyen d’un levier coudé $\overline{ACB}$, on a tout intérêt à appliquer l’effort $\vec{f}$ le plus possible à l’extrémité B du levier, si on désire que le module de $\vec{f}$ soit le plus faible possible.

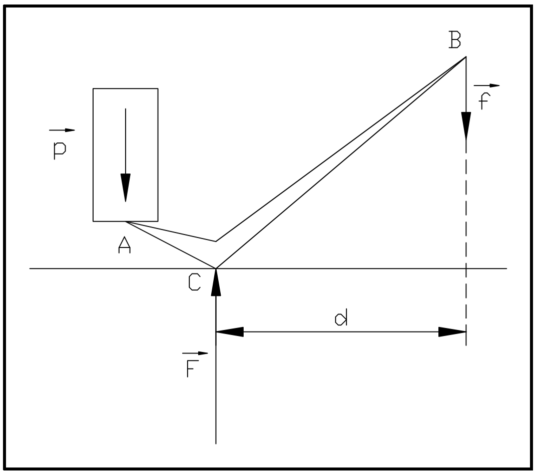


fig. 1.10. -

Ainsi donc, le “*bras de levier*” de $\vec{f}$ joue un rôle dans la composition des forces en présence; ce bras de levier d, distance entre le point d’appui C et la ligne d’action de $\vec{f}$, permettra d’introduire la notion de “*moment de la force $\vec{f}$ par rapport au point C*”, noté $\vec{m}_C(f)$ et qui vaut en module :

$$\boxed{\left\|\vec{m}_C(f)\right\| = \left\|\vec{f}\right\| d} \quad \textbf{\textit{(éq. 1.46.)}}$$

Lorsque plusieurs forces sont en présence, on peut calculer le moment résultant M_C du système de forces par rapport au point donné C.

Cette notion de “*moment de force*”, parfois moins facile à comprendre que la notion de force elle-même, est cependant d’une importance primordiale en mécanique.

1.5. *Composition de forces concourantes et parallèles coplanaires*

1.5.1. Composition de deux forces concourantes quelconques

A) *Enoncé*

Données : point A, forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$.

Inconnues : résultante $\vec{F}$, angle *θ*.

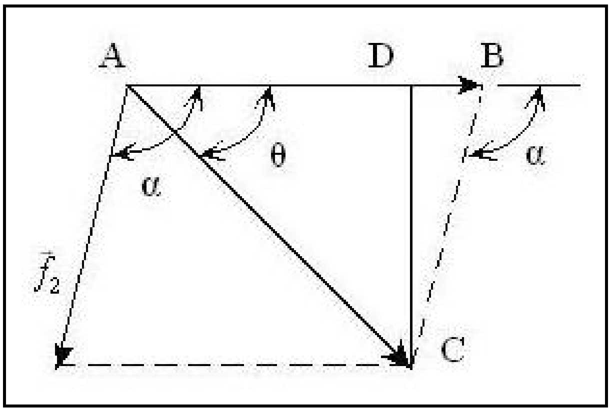


fig. 1.11. -

B) *Résolution : méthode analytique*

Dans le triangle $A\hat{B}C$, nous avons :

$$F^2 = f_1^2 + f_2^2 - 2\, f_1\, f_2 \cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \cos\left(180° - \alpha\right) = -\cos\alpha$$

Le module de $\vec{F}$ vaut dès lors :

$$\boxed{F = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + 2\, f_1\, f_2 \cos\alpha}}\ \textit{(éq. 1.54.)}$$

Dans le triangle $D\hat{B}C$, nous avons :

$$\overline{DC} = R\sin\theta = f_2 \sin\gamma$$

et $\sin\gamma = \sin\alpha$

Quant à l'angle *θ*, il peut être déterminé par :

$$\boxed{\sin\theta = \left|\frac{\left\|\vec{f}_2\right\| \sin\alpha}{\left\|\vec{F}\right\|}\right|}\ \textit{(éq. 1.58.)}$$

Cependant, nous pouvons aussi utiliser la règle des sinus dans le triangle $A\hat{B}C$:

$$\boxed{\frac{F}{\sin\gamma} = \frac{f_2}{\sin\theta} = \frac{f_1}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{f_2 \sin\gamma}{F} = \frac{f_2 \sin\alpha}{F}}\ \textit{(éq. 1.60.)}$$

C) *Résolution : méthode graphique*

$\vec{F}$ est définie par :

- point d'application : A ;
- direction, sens et module sont donnés par la diagonale du parallélogramme construit sur $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$. D'où l'angle *θ*.

D) *Quelques cas particuliers*

- Forces de modules égaux $\|\vec{f}_1\| = \|\vec{f}_2\| = \|\vec{f}\|$: le parallélogramme des forces est un losange avec :

  $\theta = \alpha/2$ et $F = 2\, f_1 \cos \alpha/2$

- Forces perpendiculaires $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$: le parallélogramme est un rectangle avec :

  $\tan\theta = f_2 / f_1$ et $F = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$

- Forces alignées : si $\alpha = 0$ alors $F = f_1 + f_2$

  si $\alpha = \pi$ alors $F = f_1 - f_2$

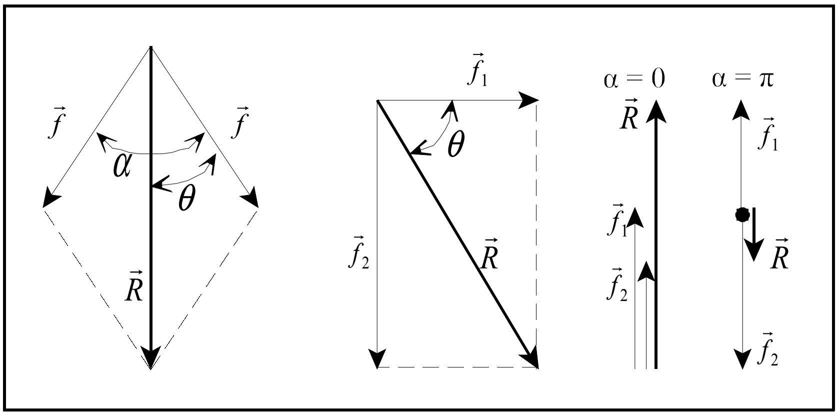


fig. 1.12. -

Application 1.1. Trouver la résultante des deux forces ci-contre.
$f_1 = 500\ N$; $f_2 = 300\ N$; $\alpha = 120\,°$.

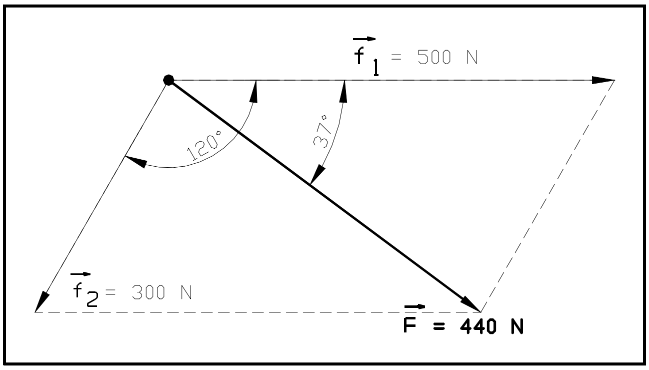


fig. 1.13. -

Solution :

Appliquons la formule générale

$$F = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + 2\, f_1\, f_2 \cos\alpha}$$

$$F = \sqrt{500^2 + 300^2 + 2 \times 500 \times 300 \times \cos 120°}$$
$$= 435.9\ N$$

$$\sin\theta = \frac{|f_2|\sin\alpha}{|F|} = \frac{300\times\sin 120°}{435.9} = 0.596 \quad \Rightarrow \qquad \theta = \arcsin 0.596 = 36.6°$$

Application 1.2. Trouver la résultante des deux forces ci-contre.
$f_1 = 6\,200\ N$; $f_2 = 2\,400\ N$; $\alpha = 90\,°$.

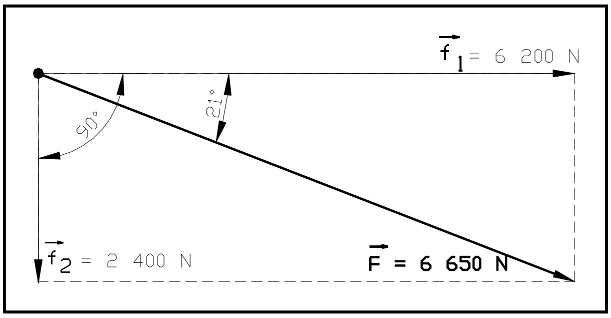


fig. 1.15. -

Solution :

$$F = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{6\,200^2 + 2\,400^2} = 6\,648\ N$$

$$\tan\theta = f_2/f_1 = 2\,400/6\,200 = 0.387 \quad \Rightarrow \quad \theta = 21.16°$$

1.5.2. Composition de plusieurs forces concourantes

A) *Enoncé*

Données : point A, forces $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ et $\vec{f}_4$.

Inconnues: résultante $\vec{R}$, angle θ.

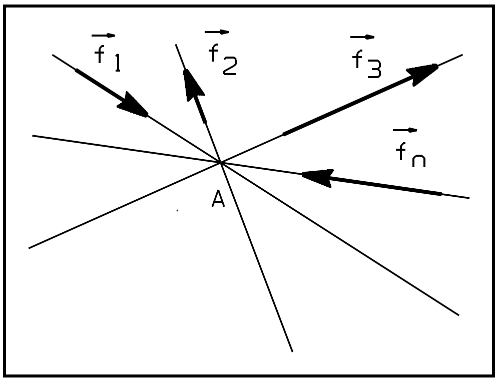


fig. 1.16. -

B) *Première méthode de résolution* :
parallélogrammes successifs.

Dans cette méthode, on utilise successivement la résultante de 2 vecteurs. C'est-à-dire : on compose $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ qui donnent $\vec{f}_{12}$; on compose ensuite $\vec{f}_3$ et $\vec{f}_4$ qui donnent $\vec{f}_{34}$. Et pour terminer, on compose $\vec{f}_{12}$ et $\vec{f}_{34}$ qui donnent la résultante $\vec{R}$.

Cette méthode est rapidement fastidieuse et manque de précision (erreurs successives).

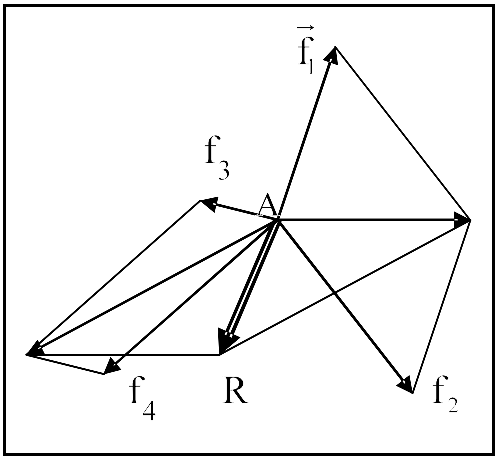


fig. 1.17. -

C) *Deuxième méthode de résolution* : *polygone des forces.*

On trace, à partir d'un point M quelconque, les vecteurs $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ et $\vec{f}_4$ équipollents aux vecteurs d'origine ("*équipollent*" : même vecteur que le vecteur initial, mais point d'application différents).

La résultante $\vec{R}'$ de $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ et $\vec{f}_4$ est le vecteur qui a pour origine l'origine M du premier vecteur et comme extrémité l'extrémité S du dernier.

La résultante $\vec{R}'$ n'est pas en place; elle doit être reportée en A, ce qui donne $\vec{R}$.

Remarquons que l'ordre de succession des vecteurs équipollents n'a aucune influence sur la détermination de la résultante $\vec{R}$.

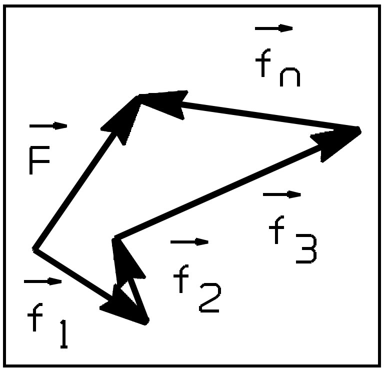


fig. 1.18. -

1.5.3. <u>Composition de forces parallèles de même sens</u>

A) *<u>Enoncé</u>*

Données : forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$, segment $\overline{AB}$.

Inconnues : résultante $\vec{F}$ et point X.

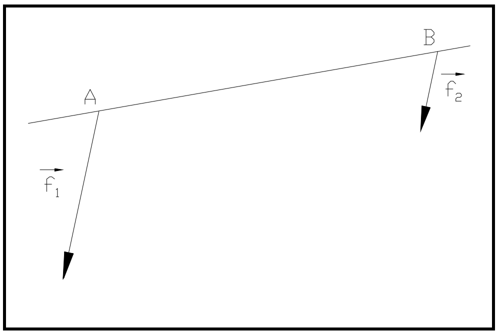


fig. 1.19. -

B) *<u>Résolution</u> : méthode analytique*

On montre que $\vec{F}$ a les caractéristiques suivantes :

- direction : parallèles à $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$;
- sens : celui de $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$;
- module : $\|\vec{R}\| = \|\vec{f}_1\| + \|\vec{f}_2\|$;
- point d'application X tel que :

$$\|\vec{f}_1\|\,\overline{AX} = \|\vec{f}_2\|\,\overline{BX} \quad ou \quad \|\vec{f}_1\|\,d_1 = \|\vec{f}_2\|\,d_2$$

Avec : $d_1 + d_2 = \overline{AB}$ connu

$$\rightarrow \boxed{d_1 = \overline{AB}\,\frac{\|\vec{f}_2\|}{\|\vec{f}_1\| + \|\vec{f}_2\|}} \textit{(éq. 1.117.)}$$

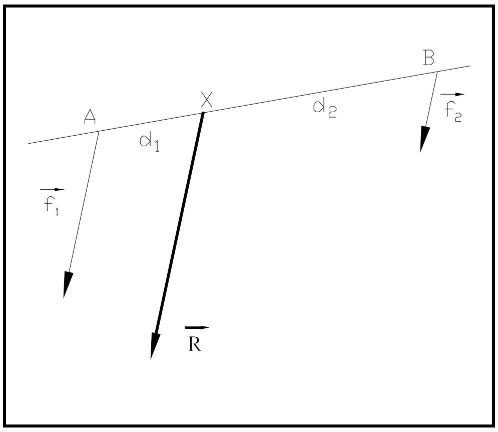


fig. 1.20. -

C) *<u>Résolution</u> : méthode graphique*

Pour trouver le point d'application de $\vec{F}$, on trace :

- $\overline{BN} = \|\vec{f}_1\|$
- $\overline{AM} = -\|\vec{f}_2\|$

Les triangles $X\hat{A}M$ et $X\hat{N}B$ sont semblables, donc :

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BN}} = \frac{f_2}{f_1} \text{ avec : } d_1 + d_2 = \overline{AB} \text{ connu}$$

$$\rightarrow \boxed{d_1 = \overline{AB}\,\frac{\|\vec{f}_2\|}{\|\vec{f}_1\| + \|\vec{f}_2\|}} \textit{(éq. 1.125.)}$$

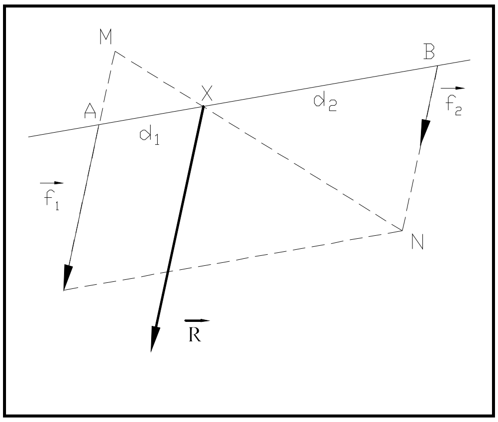


fig. 1.21. -

1.5.4. Composition de forces parallèles de sens opposés

A) *Enoncé*

Données : forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$, segment $\overline{AB}$.

Inconnues : résultante $\vec{F}$ et point X.

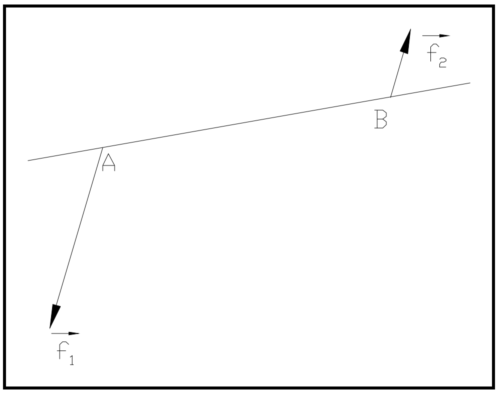


fig. 1.22. -

B) *Résolution : méthode analytique*

On montre que $\vec{F}$ a les caractéristiques suivantes :

- direction : parallèles à $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$;
- sens : celui de la plus grande composante;
- module : $\left\|\vec{R}\right\| = \left\|\vec{f}_1\right\| - \left\|\vec{f}_2\right\|$;
- point d'application X en dehors de $\overline{AB}$ *du côté de la plus grande des composante* tel que :

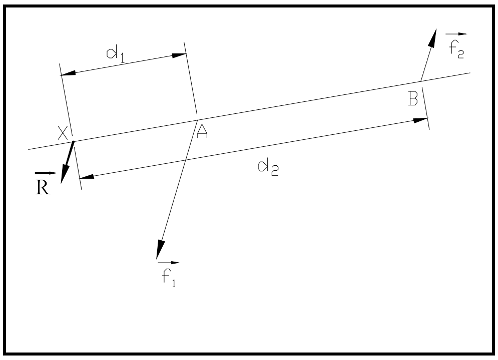


fig. 1.23. -

$$\left\|\vec{f}_1\right\| \overline{AX} = \left\|\vec{f}_2\right\| \overline{BX} \quad ou \quad \left\|\vec{f}_1\right\| d_1 = \left\|\vec{f}_2\right\| d_2$$

avec : $d_2 - d_1 = \overline{AB}$ connu

$$\rightarrow \boxed{d_1 = \overline{AB}\,\frac{\left\|\vec{f}_2\right\|}{\left\|\vec{f}_1\right\| - \left\|\vec{f}_2\right\|}} \textbf{\textit{(éq. 1.137.)}}$$

C) *Résolution : méthode graphique*

Pour trouver le point d'application de $\vec{F}$, on trace :

- $\overline{BN} = -\left\|\vec{f}_1\right\|$
- $\overline{AM} = \left\|\vec{f}_2\right\|$

Le résultat est obtenu en exprimant que les triangles $X\hat{A}M$ et $X\hat{B}N$ sont semblables :

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{f_2}{f_1} \text{ avec : } d_1 + d_2 = \overline{AB} \text{ connu}$$

$$\rightarrow \boxed{d_1 = \overline{AB}\,\frac{\left\|\vec{f}_2\right\|}{\left\|\vec{f}_1\right\| - \left\|\vec{f}_2\right\|}} \textbf{\textit{(éq. 1.145.)}}$$

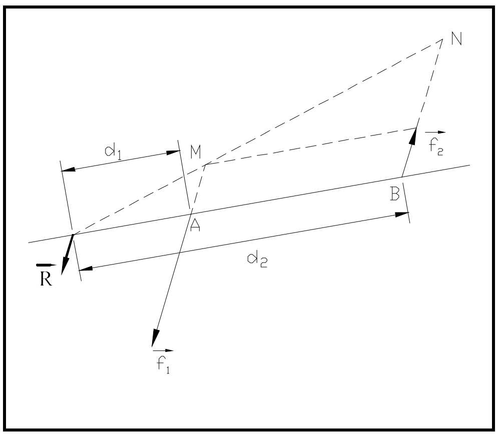


fig. 1.24. -

1.5.5. Remarques

A) *Point d'application de la résultante de deux forces parallèles*

Les formules fournissant d_1 peuvent être résumée par la formule :

$$\boxed{d_1 = \overline{AB}\,\frac{\|\vec{f}_2\|}{\|\vec{R}\|}}$$ ***(éq. 1.146.)*** où $\vec{F}$ est la résultante des forces.

B) *Cas particulier : le couple de forces*

Deux forces parallèles égales et de sens opposés mais non alignées forment un couple de forces.

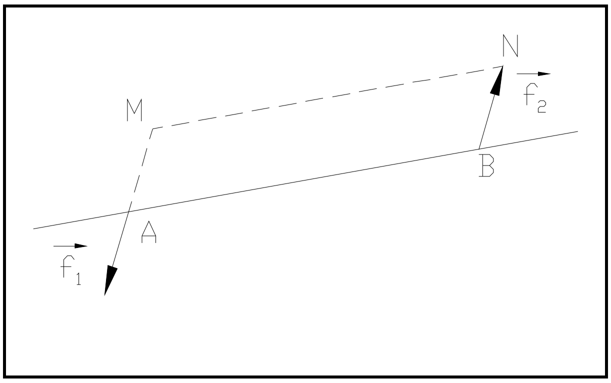


fig. 1.25. -

- La résultante de ces forces est : $\boxed{\vec{R} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}}$;
- Le point d'application de cette résultante, qui est nulle est rejeté à l'infini, puisque $\overline{MN}$ est parallèle à $\overline{AB}$.

Le "*zéro*" et "*l'infini*" ne faisant pas bon ménage, il faudra certainement reparler de cette notion de couple de forces!!!

1.6. *Décomposition des forces*

1.6.1. Définition

On entend par décomposition d'une force le remplacement de cette force par plusieurs autres qui ont, ensemble, le même effet que la force initiale seule.

Nous remplacerons la force unique :
a) par des forces concourantes
b) par des forces parallèles.

De nombreuses applications techniques découlent de ces procédés de décomposition. Nous en donnerons quelques exemples.

1.6.2. Décomposer une force suivant deux directions concourantes

A) *Enoncé*

Données : force $\vec{F}$; direction xx; direction yy (On connaît donc l'angle α et θ).

Inconnues : les projections $\vec{F}_x$ et $\vec{F}_y$.

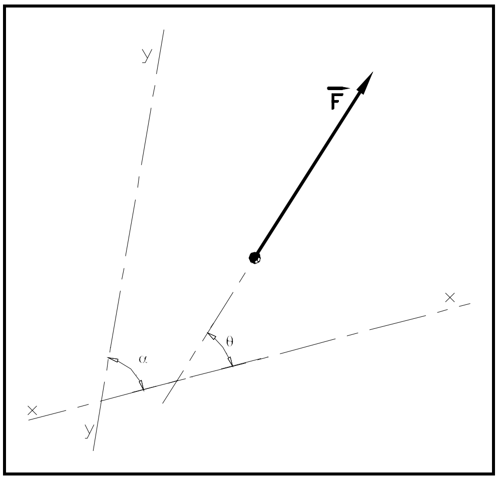


fig. 1.26. -

B) *Résolution : méthode analytique*

Le triangle rectangle $A\hat{C}E$ donne :

$$\sin\theta = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \overline{CE} = F_y \sin\alpha \\ \overline{AC} = F \end{cases}$$

d'où : $$\boxed{F_y = F\,\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}}$$

De la même manière, on trouve :

$$\boxed{F_x = F\,\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\alpha}}$$

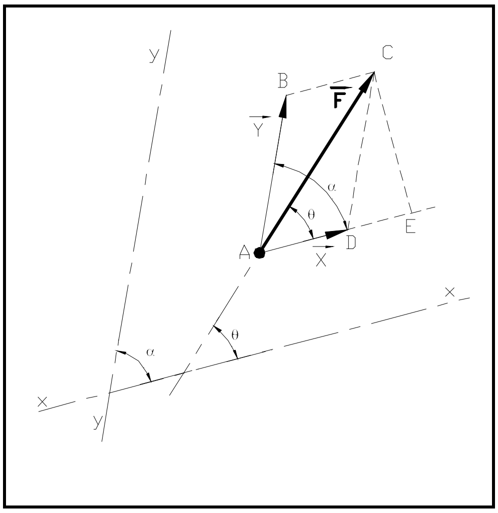


fig. 1.27. -

C) *Résolution : méthode graphique*

On construit un parallélogramme $\overline{ABCD}$ dont les côtés sont parallèles à xx et à yy et dont $\vec{F}$ est la diagonale.

Les côtés du parallélogramme représentent les intensités des forces cherchées.

Les forces sont telles que $\vec{F}_x$ et $\vec{F}_y$ ont même point d'application que la force proposée.

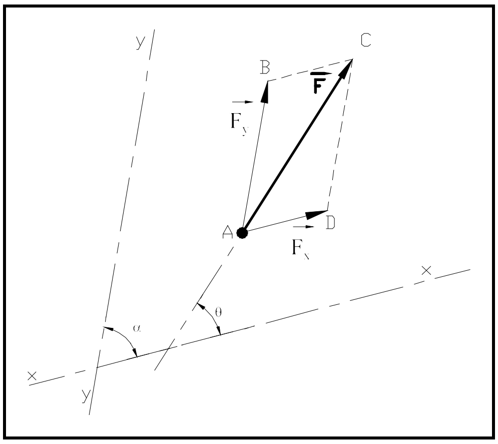


fig. 1.28. -

D) *Remarque*

La solution analytique est moins utilisée que la solution graphique sauf :

- dans le cas où $\vec{F}$ est bissectrice de l'angle α.

  Dans ce cas : $$\boxed{F_x = F_y = \frac{F}{2\cos\alpha/2}} \quad \textit{(éq. 1.164.)}$$

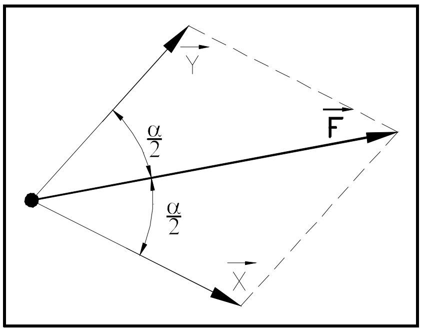


fig. 1.29. -

- dans le cas où l'angle α est égal à 90°.

  Dans ce cas :

$$\boxed{F_x = F\cos\alpha \quad et \quad F_y = F\sin\alpha} \quad \textit{(éq. 1.165.)}$$

Application 1.3. Un plan incliné à 20° reçoit une charge de 4000 N agissant verticalement. Effectuez la décomposition de cette charge normalement et tangentiellement.

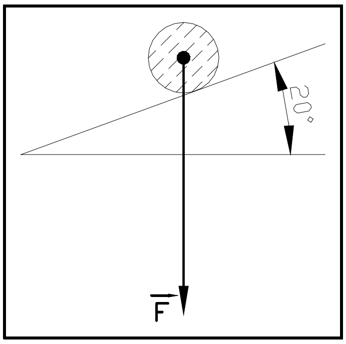


fig. 1.30. -

Solution :
Méthode analytique :
Nous avons :

$$T = F\cos\alpha = 4\,000 \times \cos 20° = 1368\ N$$
$$N = F\sin\alpha = 4\,000 \times \sin 20° = 3\,760\ N$$

Méthode graphique :

Le parallélogramme est un rectangle.
La décomposition graphique donne :

$$T = 1400\ N$$
$$N = 3\,750\ N$$

Ces résultats correspondent bien à ceux obtenus analytiquement.

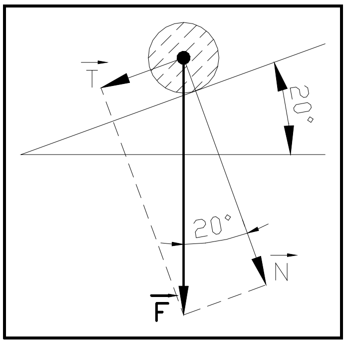


fig. 1.31. -

1.6.3. Décomposer une force en deux autres qui lui sont parallèles (même sens)

A) *Enoncé*

Données : force $\vec{F}$; distance a et b.
Inconnues : les projections $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$.

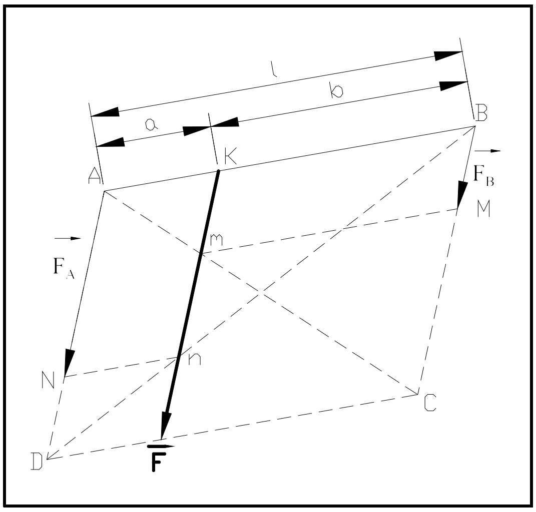


fig. 1.32. -

B) *Résolution : méthode analytique*

On sait que :

$$
\begin{aligned}
F_A\, a &= F_b\, b \\
&= \left(F - F_A\right) b \\
&= F\, b - F_A\, b
\end{aligned}
$$

D'où : $F_A\left(a+b\right) = F\, b$ avec : $a+b=l$

Et donc : $\boxed{F_A = F\,\dfrac{b}{l} \quad et \quad F_B = F\,\dfrac{a}{l}}$ ***(éq. 1.175.)***

C) *Résolution : méthode graphique*

On construit un parallélogramme $\overline{ABCD}$ ayant comme côtés :

$\overline{AB} = l$

$\overline{BC} = \left\|\vec{F}\right\|$

On trace les diagonales $\overline{AC}$ et $\overline{BD}$ qui coupent la direction de $\vec{F}$ en m et n.
Par m et n, on trace les parallèles à $\overline{AB}$ qui donnent M et N.

On a : $\begin{cases} \overline{AN} = F_A \\ \overline{BM} = F_B \end{cases}$

En effet, les triangles $A\hat{K}m$ et $A\hat{B}C$ sont semblables et on en tire :

$$\boxed{F_B = \overline{BM} = \overline{Km} = F\,\frac{a}{l}}$$ ***(éq. 1.185.)***

Application 1.4. Une poutre horizontale $\overline{AB}$ de 6 *m* de portée est chargée en C ($\overline{AC} = 2\ m$) par une force de 230000 *N*. Cherchez les actions sur les murs de soutènement.

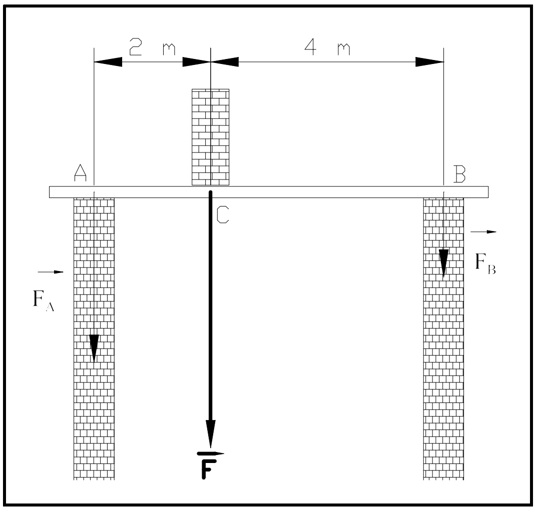


fig. 1.33. -

Solution :

Solution analytique :

$$F_A = F\,\frac{b}{l} = 230\,000 \times \frac{4}{6} = 153\,333\ N$$

$$F_B = F\,\frac{a}{l} = 230\,000 \times \frac{2}{6} = 76\,666\ N$$

Solution graphique :

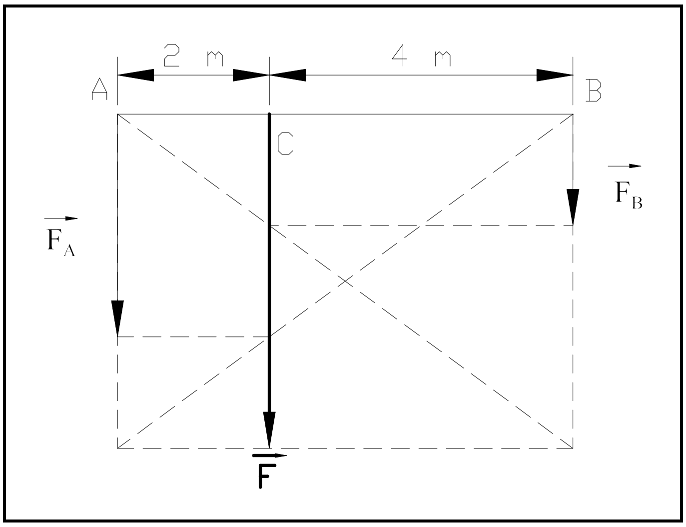


fig. 1.34. -
