

CHAPITRE 10. COMPLÉMENTS DE RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX.....	- 10.1 -
10.1. Contraintes de compression au contact de surfaces courbes : formules de Hertz	- 10.1 -
10.1.1. Introduction	- 10.1 -
10.1.2. Formules de Hertz	- 10.2 -
A) Sphère sur surface plane	- 10.2 -
B) Sphère sur sphère	- 10.3 -
C) Cylindre de rayon r sur surface plane	- 10.3 -
D) Cylindre sur cylindre	- 10.4 -
E) Cas général : contact de deux surfaces courbes	- 10.4 -
10.1.3. Contraintes admissibles	- 10.6 -
10.2. Plaques	- 10.11 -
10.2.1. Introduction, définitions et hypothèses	- 10.11 -
10.2.2. Flexion des plaques circulaires symétriquement chargées : charge uniformément répartie	- 10.11 -
A) Pour les surfaces planes circulaires encastrées sur tout le pourtour	- 10.12 -
B) Pour les surfaces planes circulaires appuyées sur tout le pourtour	- 10.12 -
10.2.3. Flexion des plaques circulaires symétriquement chargées : charge "ponctuelle"	- 10.13 -
A) Pour les surfaces planes circulaires encastrées sur tout le pourtour	- 10.13 -
B) Pour les surfaces planes circulaires appuyées sur tout le pourtour	- 10.13 -
10.2.4. Flexion des plaques rectangulaires : Charge uniformément répartie	- 10.16 -
A) Pour les surfaces planes rectangulaires encastrées sur tout le pourtour ..	- 10.16 -
B) Pour les surfaces planes rectangulaires appuyées sur tout le pourtour ..	- 10.16 -
10.3. Remarque concernant les fonds de réservoir	- 10.17 -
10.4. Tubes à parois épaisses	- 10.18 -
10.4.1. Cylindre soumis à une pression intérieure	- 10.19 -
10.4.2. Cylindre soumis à une pression extérieure	- 10.20 -
10.4. Barres à forte courbure initiale	- 10.23 -

CHAPITRE 10. COMPLÉMENTS DE RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

10.1. Contraintes de compression au contact de surfaces courbes : formules de Hertz

10.1.1. Introduction

Nous avons vu que la contrainte de traction (compression) se définissait comme étant le rapport d'une force sur la surface de contact, soit : $\sigma = \frac{N}{A}$.

Lorsque nous avons une surface courbe (exemple : rouleau, bille,...) qui appuie sur une autre surface, plane par exemple, la formule définie plus haut n'a plus aucun sens.

En effet, comme hypothèse de base de la résistance des matériaux, nous avons définis que les matériaux utilisés étaient "*indéformables*". De ce fait, la surface de contact :

- ▶ entre un rouleau et un plan : c'est une ligne
- ▶ entre une sphère et un plan : c'est un point.

La "*surface*" d'une ligne ou d'un point est **nulle**, et donc la formule de la contrainte de traction - compression devient :

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{N}{0} = \infty !!!$$

C'est pourquoi, dans le cas qui nous préoccupe, il nous faut chercher la réponse dans une autre théorie qui ne tient pas compte de l'indéformabilité des matériaux, c'est la théorie de l'élasticité.

Les formules données ci-dessous sont connues sous le nom de "**formules de Hertz**"⁽¹⁾.

Hypothèses :

- [H1] Les solides sont élastiques, homogènes et isotropes.
- [H2] Les dimensions des surfaces en contact entre les deux corps considérés sont faibles, en particulier par rapport aux rayons de courbure aux points de contact.
- [H3] Les contraintes sont telles que la limite élastique de compression n'est pas atteinte.
- [H4] Dans les surfaces sous pression, ne se produisent que des contraintes de compression et pas de contraintes de cisaillement.

Remarques :

- 1) Dans les formules, E^* représente le module d'élasticité longitudinale réduit des matériaux des corps en contact. Soit :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (\text{éq. 10.3})$$

⁽¹⁾ Hertz Heinrich Rudolf (1857 [Hambourg] - 1894 [Bonn]) : ingénieur et physicien allemand.

Notations : ν_1, ν_2 coefficient de Poisson des matériaux en contact -
 E_1, E_2 module de Young des matériaux en contact N/mm^2

2) De plus, $r_{\text{éq}}$ représente un rayon de courbure équivalent (variable suivant chaque cas envisagé).

10.1.2. Formules de Hertz

A) Sphère sur surface plane

A.1) Surface de contact

Les actions de la surface plane sur la sphère, conséquence de la déformation des solides en contact, sont inégalement réparties sur un cercle de rayon a tel que :

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \frac{P r_{\text{éq}}}{E^*}} \quad (\text{éq. 10.4})$$

Avec, dans ce cas-ci : $r_{\text{éq}} = r_{\text{sphère}}$.

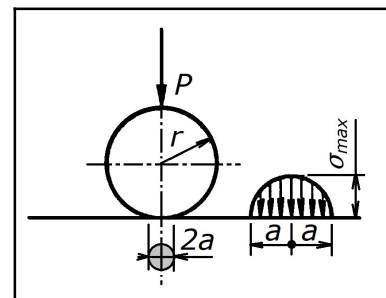


fig.10.1. - Contact sphère - surface plane.

A.2) Rapprochement des 2 solides

La contrainte (et donc la déformation) est localisée au voisinage du point de contact. les solides se comportent donc globalement comme des corps rigides et on peut caractériser la déformation au contact par le rapprochement δ “dans la direction de la charge” de 2 points situés loin de la zone de contact. Soit :

$$\delta = \frac{a^2}{r_{\text{éq}}} \quad (\text{éq. 10.6})$$

A.3) Pression de contact

La forme de la répartition des pressions le long de l’aire de contact est définie par un ellipsoïde, donc la surface plane du contact est le plan de symétrie, la pression maximale p_{max} , aussi appelé pression de Hertz, vaut :

$$p_{\text{max}} = 1.5 p_{\text{moy}} = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a^2} \quad (\text{éq. 10.7})$$

Remarque :

Dans le cas où le coefficient de Poisson est égal à 0.3 et que les 2 solides ont même E (cas de 2 contacts “acier” par exemple), les formules ci-dessus deviennent :

$$a = 1.109 \sqrt[3]{\frac{P r_{\text{éq}}}{E}} \quad (\text{éq. 10.8})$$

Et pour la pression de Hertz :

$$p_{\max} = 0.3880 \sqrt[3]{\frac{P E^2}{r_{\text{eq}}^2}} \quad (\text{éq. 10.9})$$

B) Sphère sur sphère

Utiliser les relations précédentes en prenant pour r_{eq} la valeur donnée par la relation :

$$\frac{1}{r_{\text{eq}}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \Rightarrow r_{\text{eq}} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \quad (\text{éq. 10.10}) \quad (r_1 \text{ et } r_2 \text{ les rayons des sphères en contact})$$

La surface de contact étant toujours un *cercle de rayon a*.

C) Cylindre de rayon r sur surface plane

C.1) Surface de contact

La zone de contact, conséquence de la déformation des solides, est un rectangle de côtés :

l (longueur du cylindre)
 $2b$ (la largeur)

La demi largeur b est donnée par la relation suivante :

$$b = \sqrt{\frac{4 P r_{\text{eq}}}{\pi E^* l}} \quad (\text{éq. 10.11})$$

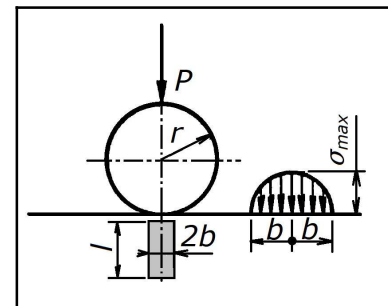


fig.10.2. - Contact cylindre - surface plane.

C.2) Rapprochement des 2 solides

Pour ce type de contact, la théorie de Hertz ne donne aucune valeur. A. Palmgren⁽²⁾ donne des résultats assez proche de l'expérience. Soit :

$$\delta \approx 3 \cdot 10^{-4} \varepsilon_E^{2.7} \left(\frac{P^{0.9}}{l^{0.8}} \right) \quad (\text{éq. 10.12})$$

Avec : δ en mm P en daN l en mm

De plus :

$$\varepsilon_E = \sqrt[3]{11550 \frac{(E_{01} + E_{02})}{E_{01} E_{02}}}$$

$$E_{01} = \frac{E_1}{(1 - \nu_1^2)}$$

et

$$E_{02} = \frac{E_2}{(1 - \nu_2^2)}$$

avec : E_1 et E_2 en daN/mm²

⁽²⁾ Palmgren, Arvid Nils (1890 [Falun] - 1971 [Lerum] : ingénieur suédois.

Remarque :

Si nous avons 2 même matériaux, $\varepsilon_E = 1$.

C.3) Pression de contact

$$p_{\max} = \frac{4}{\pi} p_{\text{moy}} = \frac{4}{\pi} \frac{P}{l(2b)} \quad (\text{éq. 10.17}) \quad (\text{la largeur} = 2b)$$

Remarque :

Dans le cas où le coefficient de Poisson est égal à 0.3 et que les 2 solides ont même E (cas de 2 contacts "acier" par exemple), les formules ci-dessus deviennent :

$$b = 1.522 \sqrt{\frac{P r_{\text{cylindre}}}{E l}} \quad (\text{éq. 10.18})$$

Et pour la pression de Hertz :

$$p_{\max} = 0.4182 \sqrt{\frac{P E}{l r_{\text{cylindre}}}} \quad (\text{éq. 10.19})$$

D) Cylindre sur cylindre

Utiliser les relations précédentes (cylindre sur surface plane) en prenant pour $r_{\text{éq}}$ la valeur donnée par la relation :

$$\frac{1}{r_{\text{éq}}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \Rightarrow r_{\text{éq}} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \quad (\text{éq. 10.20})$$

(r_1 et r_2 les rayons des cylindres en contact)

Notons de plus que dans le cas de la figure **fig. 10.3** ci-contre, il faut donner à r_2 , une valeur négative dans la formule de ρ . Soit :

$$r_{\text{éq}} = \frac{r_1 (-r_2)}{r_1 + (-r_2)} = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad (\text{éq. 10.21})$$

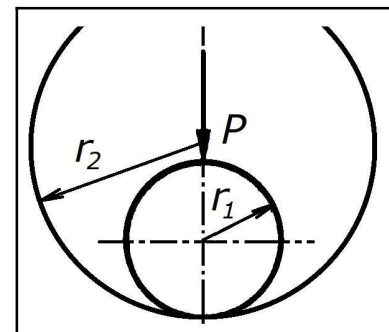


fig.10.3. - Contact cylindre - cylindre.

E) Cas général : contact de deux surfaces courbes

E.1) Surface de contact

Considérons le cas général de la compression de deux solides. Désignons par $\rho_1 = 1/r_1$ et $\rho'_1 = 1/r'_1$ les courbures principales de l'un des corps au point de contact et par $\rho_2 = 1/r_2$ et $\rho'_2 = 1/r'_2$ les courbures principales de l'autre. Ces courbures principales sont les courbures maximum et minimum qui se trouvent dans des plans orthogonaux. La courbure d'un corps est considérée comme positive lorsque le centre de courbure correspondant se trouve à l'intérieur du corps. Soit l'angle φ des plans normaux contenant les courbures ρ_1 et ρ_2 . La surface de contact, dans le cas général, est une ellipse dont

les demi-axes a et b sont donnés par les relations suivantes :

$$a = k_1 \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{P}{E^*} \frac{1}{\sum \rho}} \quad (\text{éq. 10.26})$$

et

$$b = k_2 \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{P}{E^*} \frac{1}{\sum \rho}} = a \frac{k_2}{k_1} \quad (\text{éq. 10.27})$$

Notations : P effort de compression N
 E^* module d'élasticité longitudinale réduit N/mm^2
 $k_1 ; k_2$ constantes (voir *tableau 10.1.*) -
 $\sum \rho$ $\sum \rho = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2'}$ mm^{-1}

Les constantes k_1 et k_2 sont données dans le tableau ci-dessous :

θ (°)	k_1	k_2	θ (°)	k_1	k_2
(0)	(∞)	(0)	55	1.611	0.678
10	6.61	0.32	60	1.486	0.717
20	3.778	0.408	65	1.378	0.759
30	2.731	0.493	70	1.284	0.802
35	2.397	0.530	75	1.202	0.846
40	2.136	0.567	80	1.128	0.893
45	1.926	0.604	85	1.061	0.944
50	1.734	0.641	90	1.000	1.000

Tableau 10.1. - Constantes pour le calcul des demi-axes de l'ellipse de contact.

Ou sous forme d'abaque :

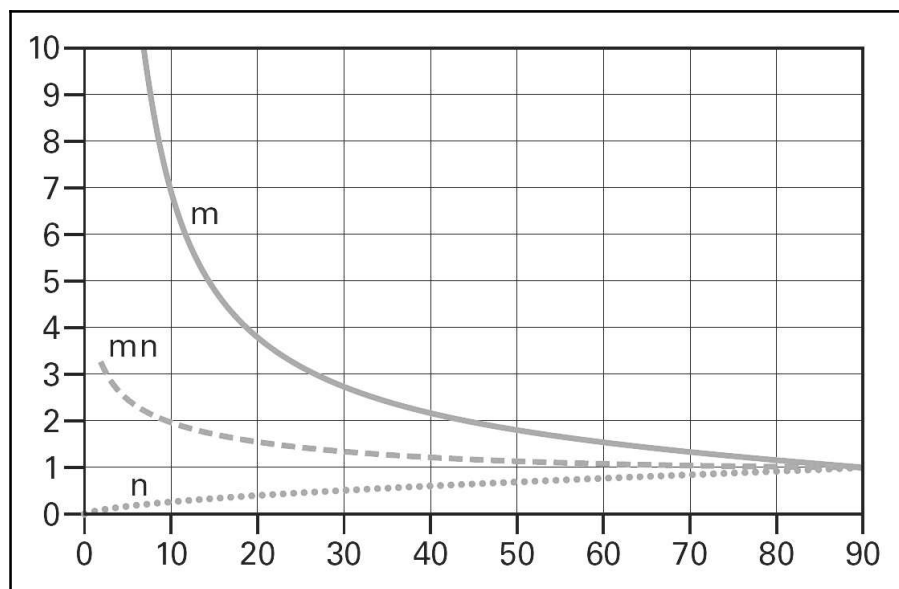


fig.10.4. - Constantes mises sous forme d'abaque ($m = k_1$ et $n = k_2$).

L'angle θ , dans la première colonne du tableau, se calcule par la relation suivante :

$$\cos \theta = \pm \frac{F(\rho)}{\sum \rho} \quad (\text{éq. 10.30})$$

dans laquelle :

$$F(\rho) = \sqrt{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2'}\right)^2} + 2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2'}\right) \cos(2\varphi) \quad (\text{éq. 10.31}) \quad [mm^{-1}]$$

Remarques :

- 1) Dans la formule **éq. 10.31**, ci-dessus, on supposera $r_1 \leq r_1'$ et $r_2 \leq r_2'$. De plus, on s'arrangera pour que $\cos \theta$ soit positif.
- 2) Les formules générales ci-dessus ne sont plus valables pour $\theta = 0^\circ$ ($\theta \leq 10^\circ$); le zéro et l'infini ne font pas bon ménage. En fait, il faut, dans la résolution des intégrales qui ont servis à l'obtention de ces formules, passer aux "limites" et donc nous aurons un des cas particuliers cités plus haut.

E.2) Rapprochement des 2 solides

La formule générale du rapprochement des 2 solides peut être mise sous la forme :

$$\delta = A a^2 + B b^2 \quad (\text{éq. 10.36})$$

Avec :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \sum \rho \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ B &= \frac{1}{2} \sum \rho \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{éq. 10.37})$$

E.3) Pression de contact

La pression maximale, au centre de la surface de contact est :

$$p_{\max} = 1.5 p_{\text{moy}} = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a b} \quad (\text{éq. 10.38})$$

10.1.3. Contraintes admissibles

En surface, les contraintes normales sont égales à la pression de contact.

Pour dimensionner et choisir le matériau devant servir à réaliser les surfaces de contact, la première étape consiste à comparer la pression maximale à la pression admissible par le matériau.

$$p_{\max} \leq p_{\text{adm}}$$

Cette pression admissible est renseigné dans le tableau suivant :

★ **Tableau de différentes contraintes admissible (pression de Hertz) (Annexe 1 : Tableau 10.2. - Pression admissible de Hertz.)**

Application 10.1. L'action d'une roue de pont roulant sur le rail est de 50 kN ; le diamètre de la roue $d = 600\text{ mm}$; la largeur du rail $l = 50\text{ mm}$, la roue et le rail sont en acier.

- Calculer la contrainte maximale de contact entre la roue et le rail.
- Calculer la largeur de la surface rectangulaire de contact par la formule de Hertz.

Solution :

a) *Formule concernant un cylindre sur un plan*

avec : $r = 300\text{ mm}$ et $E = 210\,000\text{ N/mm}^2$. Soit :

$$p_{\max} = 0.4182 \sqrt{\frac{P E}{l r_{\text{cylindre}}}} = 0.4182 \sqrt{\frac{50\,000 \times 210\,000}{50 \times 300}} = 349.9\text{ N/mm}^2$$

La valeur trouvée est élevée, mais l'expérience montre qu'elle est acceptable, car elle peut atteindre et même dépasser, sans dommage pour la construction, la valeur de la limite élastique (de traction) du matériau.

Une autre méthode (empirique) consiste à considérer entre rail et galet un rectangle de contact correspondant à un angle au centre du galet de 1° . La surface de ce rectangle vaut :

$$\begin{aligned} A &= l_{\text{rail}} (\theta r) \\ &= 50 \times \left(\frac{1 \times \pi}{180} \times 300 \right) = 261.8\text{ mm}^2 \end{aligned}$$

La pression vaut dans ce cas :

$$p = \frac{N}{A} = \frac{50\,000}{261.8} = 191\text{ N/mm}^2$$

Dans le cas empirique, on peut prendre comme pression admissible :

Galets en fonte sur rails en acier : 300 à 400 N/mm^2

Galets en acier sur rails en acier : 600 N/mm^2

D'où, dans notre cas : $191 < 600\text{ N/mm}^2$ OK

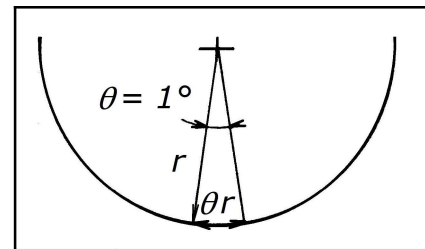


fig.10.5. - Application 10.1. Méthode empirique.

b) *La demi-largeur est donnée par la formule :*

$$b = 1.522 \sqrt{\frac{P r_{\text{cylindre}}}{E l}} = 1.522 \sqrt{\frac{50\,000 \times 300}{210\,000 \times 50}} = 1.82\text{ mm}$$

La largeur vaut donc :

$$\text{largeur} = 2b = 2 \times 1.82 = 3.64\text{ mm}$$

Dans le cas de la méthode empirique, la largeur vaut :

$$\text{largeur} = \theta r = \frac{1 \times \pi}{180} \times 300 = 5.24\text{ mm}$$

Application 10.2. Le roulement a une rangée de rouleaux est un roulement NU 1014 ML. Le diamètre des rouleaux est de 10 mm. La charge statique que peut supporter le roulement est donnée par le constructeur : $P = 67 \text{ kN}$. Le roulement comporte $Z = 21$ rouleaux. Le matériaux est un acier 100C6 ($E = 205 \text{ GPa}$; $\nu = 0.3$). Cet acier peut supporter, d'après la norme ISO, des pressions en surface de l'ordre de 4000 MPa sans matage. Calculez la pression de Hertz p_{\max} entre le rouleau et les bagues intérieure et extérieure.

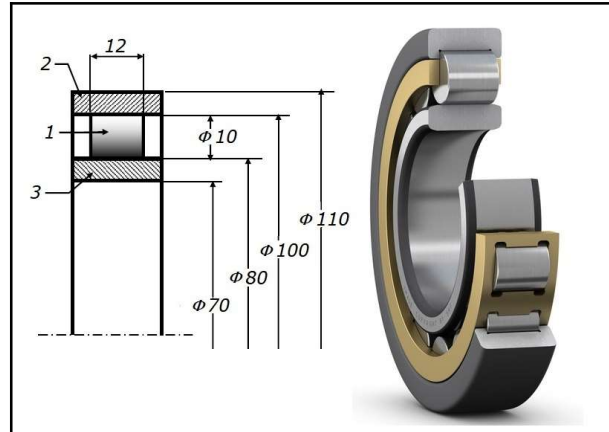


fig.10.6. - Application 10.2.

Solution :

Nous sommes dans le cas du contact de deux cylindres

Recherche de la force maximale sur un rouleau

La force maximale sur un rouleau est donné par la formule suivante :

$$P_{1\text{rouleau}} = 4.08 \frac{P_{\text{tot}}}{Z} \text{ s'il n'y a aucun jeu entre rouleau et chemin de roulement..}$$

$$P_{1\text{rouleau}} = 4.6 \frac{P_{\text{tot}}}{Z} \text{ avec jeu.}$$

Bague intérieure

Calcul du rayon équivalent :

$$r_{\text{eq}} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{40 \times 5}{40 + 5} = 4.444 \text{ mm}$$

Calcul de la contrainte (pression) maximale de Hertz sur un rouleau :

$$p_{\max} = 0.4182 \sqrt{\frac{P_{1\text{rouleau}} E}{l r_{\text{eq}}}} = 0.4182 \sqrt{\frac{4.6 (67 \cdot 10^3 / 21) \times 205000}{12 \times 4.444}} = 3141 < 4000 \text{ MPa}$$

Bague extérieure

Calcul du rayon équivalent :

$$r_{\text{eq}} = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} = \frac{40 \times 5}{40 - 5} = 5.714 \text{ mm}$$

Calcul de la contrainte (pression) maximale de Hertz sur un rouleau :

$$p_{\max} = 0.4182 \sqrt{\frac{P_{1\text{rouleau}} E}{l r_{\text{eq}}}} = 0.4182 \sqrt{\frac{4.6 (67 \cdot 10^3 / 21) \times 205000}{12 \times 5.714}} = 2770 < 4000 \text{ MPa}$$

Application 10.3. Déterminer la pression maximale, à la surface de contact C, dans le roulement à billes simples ($z = 8$ billes), type 6200, représenté ci-contre. Le diamètre des billes est $D_w = 4.8 \text{ mm}$, le rayon des gorges est estimé à $r_C = 0.515 D_w$. Le diamètre du chemin de roulement extérieur D_r peut se calculer comme suit :

$$D_r = \frac{D+d}{d} + D_w, \text{ avec : } D = 30 \text{ mm et } d = 10 \text{ mm}$$

L'effort de compression statique C_0 maximum est égal à 2.36 kN.

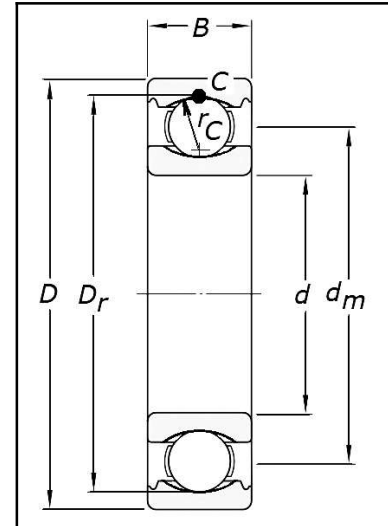


fig.10.7. - Application 10.3.

Solution :

Nous sommes dans le cas général de 2 solides

En acier :

$$E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

Recherche de la variable θ

Détermination des divers paramètres :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} = 2 \frac{1-0.3^2}{210\,000} = \frac{1}{115\,384.6} \left(\text{N/mm}^2 \right)^{-1}$$

$$r_1 = r'_1 = 4.8/2 = 2.4 \text{ mm}$$

$$r'_2 = -0.515 D_w = -0.515 \times 4.8 = -2.45 \text{ mm}$$

$$r_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{D+d}{d} + D_w \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{30+10}{2} + 4.8 \right) = -12.4 \text{ mm},$$

$$F(\rho) = \sqrt{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r'_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_1} \right) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r'_2} \right) \cos(2\varphi)}$$

$$= \sqrt{0 + \left(-\frac{1}{12.4} + \frac{1}{2.45} \right)^2 + 0} = 0.32752 \text{ mm}^{-1}$$

$$\sum \rho = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r'_2} = \frac{1}{2.4} + \frac{1}{2.4} - \frac{1}{2.45} - \frac{1}{12.4} = 0.34452 \text{ mm}^{-1}$$

$$\cos \theta = \frac{F(\rho)}{\sum \rho} = \frac{0.32752}{0.34452} = 0.95066 \Rightarrow \theta = 18.07^\circ$$

Détermination des coefficient k_1 et k_2

Par interpolation linéaire du **tableau 10.1** :

$$k_1 = 4.324576$$

$$k_2 = 0.391016$$

Recherche de la force maximale sur une bille

La force maximale sur une bille de roulement à bille est donné par la formule suivante :

$$P_{\text{bille}} = 4.37 \frac{P_{\text{tot}}}{Z} \quad \text{s'il n'y a aucun jeu entre bille et chemin de roulement..}$$

$$P_{1\text{ bille}} = 5 \frac{P_{\text{tot}}}{Z} \quad \text{avec jeu.}$$

Recherche des demi-axes de l'ellipse

Prenons le cas réel avec jeu :

$$a = k_1 \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{P_{1\text{ bille}}}{E^*} \frac{1}{\sum \rho}} = 4.24576 \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{5 \left(\frac{2.36 \cdot 10^3}{8} \right)}{115384.6} \frac{1}{0.34452}} = 1.62 \text{ mm}$$

$$b = a \frac{k_2}{k_1} = 1.62 \times \frac{0.391016}{4.24576} = 0.149 \text{ mm}$$

Calcul de la pression au point

$$p_{\text{max}} = \frac{3}{2} \frac{P_{1\text{ bille}}}{\pi a b} = \frac{3}{2} \frac{5 \left(\frac{2.36 \cdot 10^3}{8} \right)}{\pi \times 1.62 \times 0.149} = 2918 < 4200 \text{ MPa} \quad \text{OK!}$$

10.2. Plaques

10.2.1. Introduction, définitions et hypothèses

La plupart des éléments de constructions devant être calculés à la résistance peuvent être réduits aux schémas de la barre ou de l'enveloppe.

Comme nous l'avons déjà dit, nous appellerons *barre* tout corps dont une des dimensions (la longueur) est bien plus grande que les autres. Nous avons considéré jusqu'à présent principalement des éléments de construction se réduisant au schéma de la barre (exception faite des enveloppes cylindriques minces vues au chapitre "*Traction - Compression*"). Passons maintenant aux enveloppes.

Définissons le terme "*enveloppe*" :

Une **enveloppe** est un corps dont une des dimensions (l'épaisseur) est bien plus petite que les deux autres.

Avant d'entamer l'étude proprement dite, définissons le terme de "*plaque*".

Le lieu géométrique des points équidistants des deux surfaces de l'enveloppe est la **surface moyenne**.
Si la **surface moyenne** de l'enveloppe est un **plan**, nous avons alors **une plaque**.

Hypothèses :

- [H1] Epaisseur d'enveloppe constante;
- [H2] Symétrie géométrique (pas de point d'inflexion, ni anguleux);
- [H3] Contraintes réparties uniformément suivant l'épaisseur;
- [H4] La flèche est petite par rapport à l'épaisseur;

Plaques ou *enveloppes minces* impliquent :

- [H5] Epaisseur petite par rapport au rayon de courbure moyen : $r/e \geq 10$

10.2.2. Flexion des plaques circulaires symétriquement chargées : charge uniformément répartie

<u>Notations</u> :	p_s	pression (charge surfacique répartie)	N/mm^2
	e	épaisseur de la plaque	mm
	f	flèche de la plaque	mm
	d	diamètre de la plaque	mm
	r	rayon de la plaque	mm
	σ_{adm}	contrainte admissible	N/mm^2
	E	module d'élasticité longitudinal	N/mm^2
	ν	coefficient de Poisson	-

A) Pour les surfaces planes circulaires encastrées sur tout le pourtour

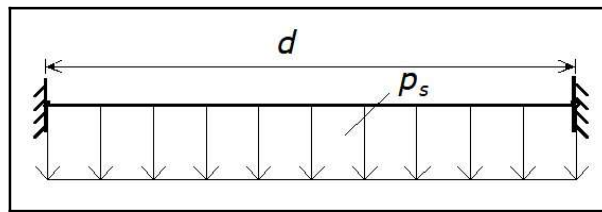


fig.10.8. - Plaque circulaire encastrée : charge répartie.

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{4} \frac{p_s r^2}{e^2} \quad (\text{éq. 10.71}) \quad (\text{Formule liant contrainte et épaisseur})$$

La contrainte maximale se situe sur le bord encastré.

et donc :

$$e_{\min} \geq r \sqrt{\frac{3}{4} \frac{p_s}{\sigma_{adm}}} \quad (\text{éq. 10.72})$$

$$f_{\max} = \frac{3}{16} (1 - \nu^2) \frac{p_s r^4}{E e^3} \quad (\text{éq. 10.73}) \quad (\text{Formule liant flèche et épaisseur})$$

B) Pour les surfaces planes circulaires appuyées sur tout le pourtour

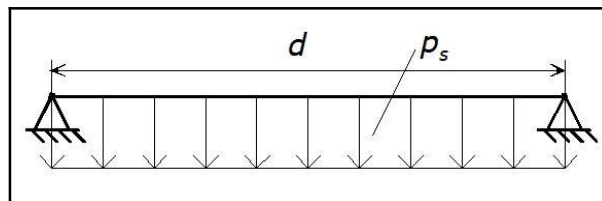


fig.10.9. - Plaque circulaire appuyée : charge répartie.

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{8} (3 + \nu) \frac{p_s r^2}{e^2} \quad (\text{éq. 10.74}) \quad (\text{Formule liant contrainte et épaisseur})$$

La contrainte maximale se situe au centre de la plaque.

et donc :

$$e_{\min} \geq r \sqrt{\frac{3}{8} (3 + \nu) \frac{p_s}{\sigma_{adm}}} \quad (\text{éq. 10.75})$$

$$f_{\max} = \frac{3}{16} (5 + \nu) (1 - \nu) \frac{p_s r^4}{E e^3} \quad (\text{éq. 10.76}) \quad (\text{Formule liant flèche et épaisseur})$$

10.2.3. Flexion des plaques circulaires symétriquement chargées : charge “ponctuelle”

Notations : F charge ponctuelle N
 r_1 rayon de la petite surface sur laquelle la force “ponctuelle” est appliquée mm

A) Pour les surfaces planes circulaires encastrées sur tout le pourtour

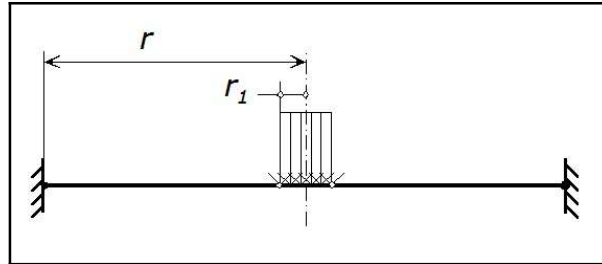


fig.10.10. - *Plaque circulaire encastrée : charge ponctuelle.*

$$\sigma_{\max} \approx \frac{3}{2\pi} (1 + \nu) \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \frac{F}{e^2} \quad (\text{éq. 10.77}) \quad (\text{Formule liant contrainte et épaisseur})$$

La contrainte maximale se situe au centre de la plaque.

et donc :

$$e_{\min} \geq \sqrt{\frac{3}{2\pi} (1 + \nu) \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \frac{F}{\sigma_{\max}}} \quad (\text{éq. 10.78})$$

$$f_{\max} \geq \frac{3}{4\pi} (1 - \nu^2) \frac{F r^2}{E e^3} \quad (\text{éq. 10.79}) \quad (\text{Formule liant flèche et épaisseur})$$

B) Pour les surfaces planes circulaires appuyées sur tout le pourtour

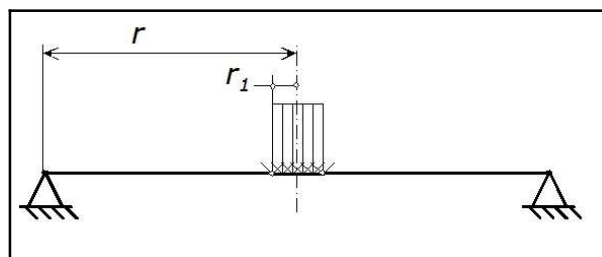


fig.10.11. - *Plaque circulaire appuyée : charge ponctuelle.*

$$\sigma_{\max} \approx \frac{3}{2\pi} \left((1 + \nu) \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + 1 \right) \frac{F}{e^2} \quad (\text{éq. 10.80}) \quad (\text{Formule liant contrainte et épaisseur})$$

La contrainte maximale se situe au centre de la plaque.

et donc :

$$e_{\min} \geq \sqrt{\frac{3}{2\pi} \left((1+\nu) \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + 1 \right) \frac{F}{\sigma_{\max}}} \quad (\text{éq. 10.81})$$

$$f_{\max} \geq \frac{3}{4\pi} (1-\nu) (3+\nu) \frac{F r^2}{E e^3} \quad (\text{éq. 10.82}) \quad (\text{Formule liant flèche et épaisseur})$$

Application 10.4. Calculer l'épaisseur du fond plat d'un réservoir en acier d'air comprimé soumis à une pression intérieure de 11 bars, sachant que le diamètre du réservoir est de 1.25 m. Nous prendrons comme contrainte admissible $\sigma_{adm} = 60 \text{ N/mm}^2$.

Solution :

Formule des surfaces planes encastrées :

$$e_{\min} \geq r \sqrt{\frac{3}{4} \frac{p_s}{\sigma_{adm}}} = \frac{1250}{2} \times \sqrt{\frac{3}{4} \times \frac{11}{60}} = 73.3 \text{ mm}$$

Application 10.5. Un hublot d'avion de 250 mm de diamètre est soumis à 10000 m d'altitude à une pression extérieure de 200 mm de mercure et intérieurement de 1 bar. Quelle sera l'épaisseur du hublot sachant que la tension admise dans le plexiglas est de 20 N/mm². Dans ces conditions quelle sera la flèche maximale du hublot ? On donne :

$$\rho_{\text{Hg}} = 13.6 \text{ kg/dm}^3 ; \nu_{\text{plexiglas}} = 0.4 ; E_{\text{plexiglas}} = 2.9 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 .$$

Solution :

Recherche de la différence de pression

Pression extérieure :

$$p_{\text{ext}} = \rho g h = 13600 \times 9.81 \times 0.2 = 26683.2 \text{ Pa}$$

Variation de pression :

$$\Delta p = p_s = 100000 - 26683.2 = 73316.8 \text{ Pa}$$

Formule des surfaces planes encastrées :

$$e_{\min} \geq r \sqrt{\frac{3}{4} \frac{p_s}{\sigma_{adm}}} = \frac{250}{2} \times \sqrt{\frac{3}{4} \times \frac{0.0733168}{20}} = 6.6 \text{ mm}$$

Recherche de la flèche maximale

$$f_{\max} = \frac{3}{16} (1-\nu^2) \frac{p_s r^4}{E e^3} = \frac{3}{16} \times (1-0.4^2) \times \frac{0.0733168 \times \left(\frac{250}{2}\right)^4}{2900 \times 6.6^3}$$

$$= 3.38 \text{ mm} \Rightarrow \text{inadmissible!}$$

Posons comme flèche admissible maximum :

$$f_{\max} = \frac{d}{350} = \frac{250}{350} = 0.714 \text{ mm}$$

Recherchons maintenant l'épaisseur correspondante :

$$f_{\max} = \frac{3}{16} (1 - \nu^2) \frac{p_s r^4}{E e^3} \Rightarrow e = \sqrt[3]{\frac{3}{16} (1 - \nu^2) \frac{p_s r^4}{E f_{adm}}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3}{16} \times (1 - 0.4^2) \times \frac{0.0733168 \times 125^4}{2900 \times 0.714}} = 11 \text{ mm}$$

Application 10.6. Une plaque circulaire en tôle d'acier S 355 assure la fermeture autoclave d'un réservoir de diamètre intérieur de 200 mm sous pression effective de 200 N/cm². Calculer l'épaisseur de la plaque ainsi que sa flèche. Nous prendrons un coefficient de sécurité égal à 4.5.

Solution :

Contrainte admissible

$$\sigma_{adm} = \frac{R_e}{S} = \frac{355}{4.5} = 80 \text{ N/mm}^2$$

Recherche de l'épaisseur minimale

$$e_{\min} \geq r \sqrt{\frac{3}{8} (3 + \nu) \frac{p_s}{\sigma_{adm}}} = 100 \times \sqrt{\frac{3}{8} \times (3 + 0.3) \times \frac{2}{80}}$$

$$= 17.6 \text{ mm} \Rightarrow e = 18 \text{ mm}$$

Recherche de la flèche correspondante

$$f_{\max} = \frac{3}{16} (5 + \nu) (1 - \nu) \frac{p_s r^4}{E e^3}$$

$$= \frac{3}{16} \times (5 + 0.3) \times (1 - 0.3) \times \frac{2 \times 100^4}{205000 \times 18^3}$$

$$= 0.12 \text{ mm}$$

Remarquons que l'épaisseur de la tôle du réservoir cylindrique serait, pour la même valeur de la contrainte admissible de :

$$e_{\min} = \frac{p d}{2 \sigma_{adm}} = \frac{2 \times 100}{80} = 2.5 \text{ mm} \leftrightarrow 18 \text{ mm}!$$

Il en résulte une disproportion très nette entre les épaisseurs du fond et du réservoir; une plaque plane ne constitue pas une solution économique au problème.

10.2.4. Flexion des plaques rectangulaires : Charge uniformément répartie

<u>Notations :</u>	a	largeur de la plaque	mm
	b	longueur de la plaque	mm
	α, α_1	coefficients	-
	β, β_1	coefficients	-

Remarque importante :

De plus, les différentes relations ont été obtenues avec un coefficient de Poisson égal à 0.3, c'est-à-dire pour les aciers. On peut encore les appliquer aux alliages d'aluminium ($\nu = 0.33$) et en alliage de cuivre ($\nu = 0.31 \dots 0.33$) et pour tout autre alliage qui possède un coefficient de Poisson tel que : $0.27 \dots \nu \dots 0.33$; mais le résultat est entaché d'une erreur, d'ailleurs faible, donc acceptable.

A) Pour les surfaces planes rectangulaires encastrées sur tout le pourtour

$$\sigma_{\max} = 6 \beta_1 \frac{p_s a^2}{e^2} \quad (\text{éq. 10.96}) \quad (\text{Formule liant contrainte et épaisseur})$$

La contrainte maximale se situe sur le bord encastré en $b/2$.

et donc :

$$e \geq \sqrt{6 \beta_1 \frac{p_s a^2}{\sigma_{\max}}} \quad (\text{éq. 10.97})$$

$$f_{\max} = \alpha_1 \frac{p_s a^4}{E e^3} \quad (\text{éq. 10.98}) \quad (\text{Formule liant flèche et épaisseur})$$

b/a	1	1.20	1.25	1.40	1.50	1.60	1.75	1.80	2	∞
α_1	0.0138	0.0188	0.0199	0.0226	0.0240	0.0251	0.0264	0.0267	0.0277	0.0284
β_1	0.0513	0.0639	0.0665	0.0726	0.0757	0.0780	0.0817	0.0812	0.0829	0.0833

B) Pour les surfaces planes rectangulaires appuyées sur tout le pourtour

$$\sigma_{\max} = 6 \beta \frac{p_s a^2}{e^2} \quad (\text{éq. 10.99}) \quad (\text{Formule liant contrainte et épaisseur})$$

La contrainte maximale se situe au centre de la plaque.

et donc :

$$e \geq \sqrt{6 \beta \frac{p_s a^2}{\sigma_{\max}}} \quad (\text{éq. 10.100})$$

$$f_{\max} = \alpha \frac{p_s a^4}{E e^3} \quad (\text{éq. 10.101}) \quad (\text{Formule liant flèche et épaisseur})$$

b/a	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	3	4	5	∞
α	0.0443	0.0616	0.0770	0.0906	0.1017	0.1106	0.1336	0.1400	0.1416	0.1422
β	0.0479	0.0626	0.0753	0.0862	0.0948	0.1017	0.1189	0.1235	0.1246	0.1250

10.3. Remarque concernant les fonds de réservoir

A l'endroit de l'interaction de certaines enveloppes, il existe une augmentation brutale des contraintes (concentration de contraintes). Il en est ainsi à l'endroit de la jonction du cylindre avec son fond sphérique.

Afin de réduire l'effet de bord, on fait un raccordement dans les zones d'interaction des enveloppes, comme on l'a montré à titre d'exemple à la figure **fig 10.12**. (Courbe en anse de panier). Dans ce cas les contraintes de flexion sont notablement réduites. D'après les calculs, la contrainte maximale devient :

$$\sigma_{\max} = 0.145 \frac{p R^2}{e R_2} \quad (\text{éq. 10.102})$$

p étant la pression effective en N/mm^2 régnant dans le réservoir.

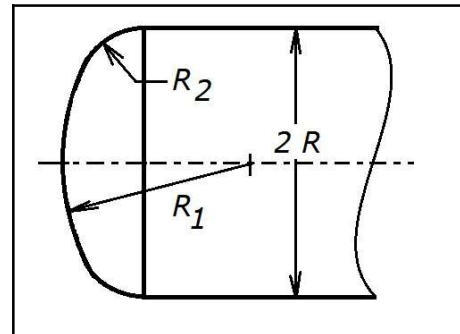


fig.10.12. - Fond de réservoir en anse de panier.

Mais dans le cas d'une conception, nous connaissons l'épaisseur de l'enveloppe cylindrique, ainsi que la contrainte admissible. Il est dès lors possible, au moyen de l'équation précédente, de trouver le rayon de raccordement R_2 pour qu'il y ait iso-contrainte. Soit :

$$R_2 = 0.145 \frac{p R^2}{e \sigma_{\max}} \quad (\text{éq. 10.103})$$

Application 10.7. Reprenons l'**Application 10.6.** et déterminons l'épaisseur ainsi que l'arrondi du fond du réservoir.

Solution :

Détermination du rayon R_2

Comme l'épaisseur du réservoir a été déterminé par la formule des tube à parois minces ($e = 2.5 \text{ mm}$) attention sans tenir compte d'une surépaisseur de sécurité qui dans ce cas-ci pourrait quand même s'élever à 1...2 mm en plus (!), mais cela ne change rien au procédé de calcul. Soit :

$$R_2 = 0.145 \frac{p R^2}{e \sigma_{\max}} = 0.145 \frac{2 \times 100^2}{2.5 \times 80} = 14.5 \text{ mm}$$

Il suffit donc d'un petit rayon de 14.5 mm pour garder une épaisseur de 2.5 mm au lieu des 18 mm trouvé précédemment !

10.4. Tubes à parois épaisses

Nous allons considérer dans ce paragraphe la question de la résistance d'un tube à paroi épaisse. C'est-à-dire, un corps de révolution cylindrique telle que l'épaisseur rapportée au rayon est (voir sinon § 3.8. *Enveloppe mince*) :

$$\boxed{e/r_{\text{moyen}} > 0.10} \text{ (éq. 10.106)}$$

Dans le cas de *parois épaisses* nous avons un objet en 3 dimensions et donc 3 contraintes. Les poutre et colonne n'ont qu'une dimension principale et donc qu'une seule contrainte longitudinale. Les plaques sont en 2 dimensions et donc 2 contraintes. Dans le § 10.2. *Plaques*, nous n'avons donné que la contrainte maximale. En fait il faudrait faire la théorie complète et tenir compte, via un critère de résistance, des 2 contraintes (en "longueur" et en "largeur").

Les 3 contraintes existant dans un objet en 3 dimensions sont :

- σ_r : la *contrainte radiale* (dans la direction du rayon)
- σ_t : la *contrainte tangentielle* (ou circonférentielle) (perpendiculaire au rayon)
- σ_l : la *contrainte longitudinale*, c'est-à-dire dans le sens de la longueur.

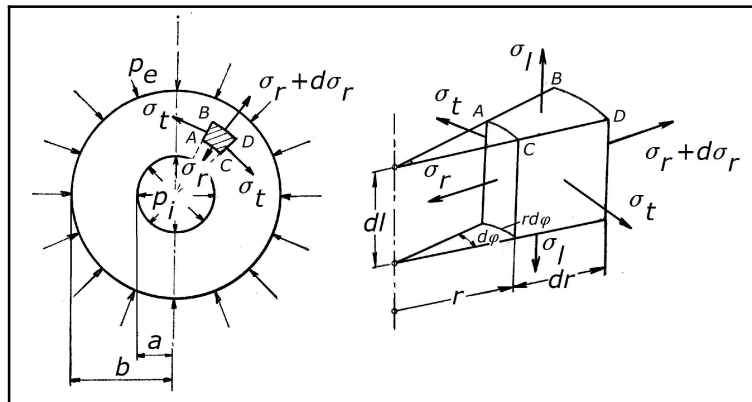


fig.10.13. - Contraintes dans une paroi épaisse.

Sans rentrer dans le développement des diverses formules, on peut dire que :

$$\boxed{\sigma_l = \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2}} \text{ (éq. 10.107)}$$

Cette contrainte n'existe pas toujours. Par exemple, dans le cas b) de la figure *fig. 10.14.*, **cette contrainte n'existe pas.**

De plus, il importe de noter que le cylindre est alors supposé suffisamment long pour que l'on puisse admettre que cette contrainte est uniformément répartie dans la section droite et que l'on puisse négliger l'influence des fonds (concentration de contraintes) (Voir § 10.4.).

$$\boxed{\sigma_r = \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2} \mp \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{p_i - p_e}{b^2 - a^2}} \text{ (éq. 10.108)}$$

Les expressions de σ_r et σ_t ont été condensées en une seule formule. Le signe (-) correspond à

σ_r et le signe (+) à σ_t .

<u>Notations :</u>	p_i	pression relative intérieure	N/mm^2
	p_e	pression relative extérieure	N/mm^2
	a	rayon intérieur du tube	mm
	b	rayon extérieur du tube	mm
	r	rayon ($a \leq r \leq b$) pour lequel on cherche les contraintes	mm

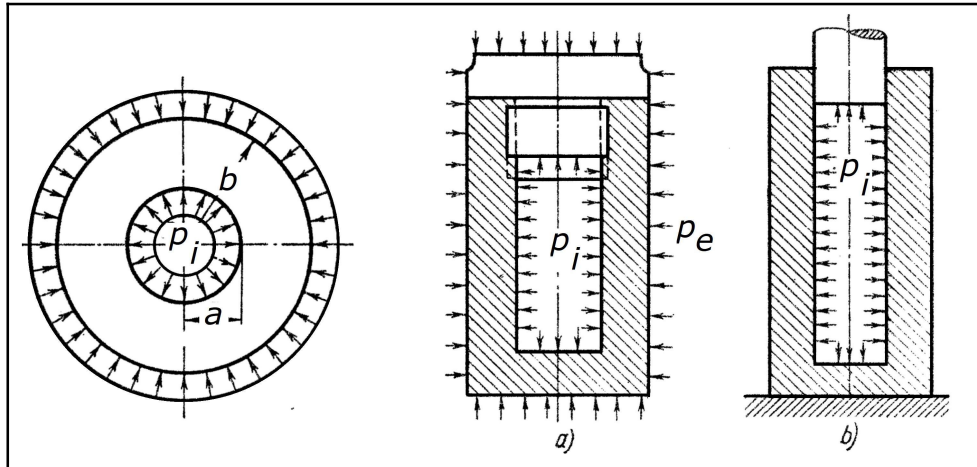


fig.10.14. - Tubes à parois épaisses.

10.4.1. Cylindre soumis à une pression intérieure

Alors dans ce cas :

$$p_e = 0$$

L'expression **éq. 10.108.** s'écrit alors :

$$\sigma_r = \frac{p_i a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (\text{éq. 10.111})$$

On a représenté sur la figure **fig.15.** les épures des variations de contrainte radiales et circonférentielles dans l'épaisseur du cylindre soumis à un pression intérieure.

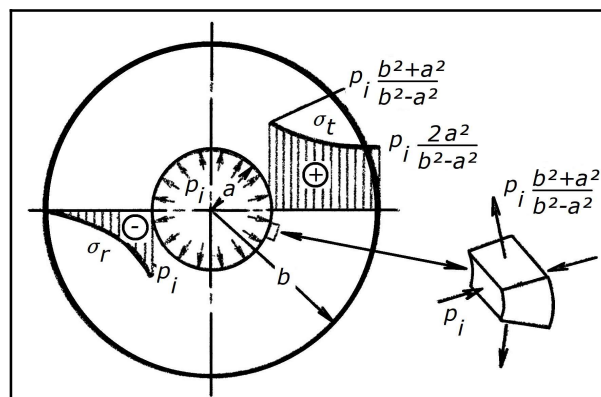


fig.10.15. - Contraintes dans un cylindre soumis à pression inférieure.

En résumé, s'il n'y a pas de contrainte axiale, la contrainte équivalente maximale à considérer est :

$$\sigma_{\text{équi max}} = p_i \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \quad (\text{éq. 10.112})$$

10.4.2. Cylindre soumis à une pression extérieure

Alors dans ce cas :

$$p_i = 0$$

L'expression *éq. 10.108.* s'écrit alors :

$$\sigma_r = -\frac{p_e b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (\text{éq. 10.114})$$

On a représenté sur la figure *fig.16.* les épures des variations de contrainte radiales et circonférentielles dans l'épaisseur du cylindre soumis à une pression extérieure.

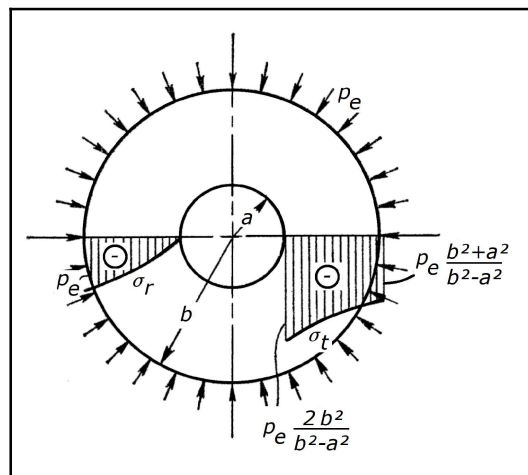


fig.10.16. - Répartition des contraintes.

En résumé, s'il n'y a pas de contrainte axiale, la contrainte équivalente maximale à considérer est :

$$\sigma_{\text{équi max}} = p_e \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \quad (\text{éq. 10.115})$$

Formule qui est tout-à-fait comparable à la formule développée pour une pression interne seule.

Application 10.8. Dans un catalogue d'un marchand de tubes d'acier E355 sans soudure étiré à froid pour la fabrication de vérins hydrauliques, on trouve, notamment, les caractéristiques suivantes :

$$d_{ext} = 40 \text{ mm} ; d_{int} = 30 \text{ mm} ; R_m > 600 \text{ N/mm}^2 ; R_e > 520 \text{ N/mm}^2 .$$

On demande quelle serait la pression interne que l'on pourrait appliquer à l'intérieur de ce tube si on prend un coefficient de sécurité de 3 (pour tenir compte de la fatigue du matériau) ?

Solution :

Hypothèse : parois épaisses

Il faut au préalable vérifier si nous sommes dans la théorie des "parois épaisses".

$$\frac{e}{r_{moy}} > 0.1 \Rightarrow \frac{(40 - 30)/2}{(40 + 30)/4} = 0.29 > 0.1 \quad OK$$

Calcul de la pression interne admissible

Partons de la formule générale pour les tuyaux avec pression interne :

$$\sigma_{\text{équi max}} = p_i \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \leq \sigma_{adm} = \frac{R_e}{S}$$

$$\Rightarrow p_i < \frac{(R_e/S)(b^2 - a^2)}{2b^2} = \frac{(520/3)(20^2 - 15^2)}{2 \times 20^2} = 37.9 \text{ N/mm}^2 = 37.9 \text{ bars}$$

Application 10.9. Dans un guide de bonne pratique concernant les vérins hydrauliques, on trouve le paragraphe suivant :

4.2 Quels tuyaux hydrauliques sont utilisés?

Il est recommandé d'utiliser pour le raccordement des tubes hydrauliques sans soudure et galvanisé selon DIN 2391, nuance St 45.

L'épaisseur de la paroi dépend de la pression nominale comme démontré dans le tableau suivant.

Épaisseur de la paroi recommandée en mm.

Pression nominale PN (bars)	Diamètre extérieur du tube (mm)				
	6	8	10	12	15
100	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
160	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
250	1.0	1.0	1.5	1.5	1.5
320	1.0	1.0	1.5	1.5	2.0
400	1.0	1.5	2.0	2.0	2.5
500	1.5	2.0	2.5	2.5	3.0

Si la limite élastique de cet acier St 45 est $R_e > 265 \text{ N/mm}^2$, quelle est le coefficient de sécurité minimum utilisé ?

Solution :

Cas 1 : $d_e = 6 \text{ mm}$; $PN = 100 \text{ bars}$

Hypothèse : parois épaisses

Il faut au préalable vérifier si nous sommes dans la théorie des “parois épaisses”.

$$\frac{e}{r_{\text{moy}}} > 0.1 \Rightarrow \frac{1}{(6+4)/4} = 0.4 > 0.1 \quad \text{OK}$$

Calcul du coefficient de sécurité utilisé

Partons de la formule générale pour les tuyaux avec pression interne :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{équi max}} &= p_i \frac{2 b^2}{b^2 - a^2} \leq \sigma_{\text{adm}} = \frac{R_e}{S} \\ \Rightarrow S &= \frac{R_e (b^2 - a^2)}{p_i 2 b^2} = \frac{265 (3^2 - 2^2)}{10 \times 2 \times 3^2} = 7.36 \end{aligned}$$

Cas 2 : $d_e = 15 \text{ mm}$; $PN = 500 \text{ bars}$

Hypothèse : parois épaisses

Il faut au préalable vérifier si nous sommes dans la théorie des “parois épaisses”.

$$\frac{e}{r_{\text{moy}}} > 0.1 \Rightarrow \frac{3}{(15+9)/4} = 0.5 > 0.1 \quad \text{OK}$$

Calcul du coefficient de sécurité utilisé

Partons de la formule générale pour les tuyaux avec pression interne :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{équi max}} &= p_i \frac{2 b^2}{b^2 - a^2} \leq \sigma_{\text{adm}} = \frac{R_e}{S} \\ \Rightarrow S &= \frac{R_e (b^2 - a^2)}{p_i 2 b^2} = \frac{265 (7.5^2 - 4.5^2)}{50 \times 2 \times 7.5^2} = 1.70 \end{aligned}$$

10.4. Barres à forte courbure initiale

Jusqu'à présent on ne considérait que des problèmes liés à la flexion d'une barre droite. Venons-en maintenant à la flexion d'une barre à courbure initiale, en supposant que les forces extérieures soient appliquées dans le plan de la courbure.

On convient de distinguer les barres à faible et à forte courbure initiale. Le critère fondamental d'une telle classification est donné par le rapport de la hauteur de la section h dans le plan de la courbure et du rayon de courbure de la barre r_G . Si ce rapport est très petit par rapport à l'unité ($h/r_G \leq 0.2$), on admet que la barre est à faible courbure initiale. Pour une barre à forte courbure initiale le rapport ($h/r_G > 0.2$) est comparable à l'unité. Ainsi, cette classification est conventionnelle et n'a pas de limite bien déterminée.

Les formules établies précédemment pour une barre droite conviennent également à une barre à faible courbure initiale.

Passons maintenant à la barre à forte courbure initiale. Le problème du calcul de la résistance du crochet d'un monte-charge ou des maillons d'une chaîne métallique (fig.17.) se ramène au schéma d'une telle barre.

Sans entrer dans le détail de la démonstration, on peut dire que dans le cas des barres à fortes courbures, la répartition des contraintes n'est plus linéaire, parce qu'on peut démontrer que la fibre neutre ne passe plus par le centre de gravité de la section.

La contrainte de flexion, dans ce cas, est donnée par la formule générale suivante :

$$\sigma_{trans} = \frac{M_f}{A_l e r_{fn} - y} \quad (\text{éq. 10.128})$$

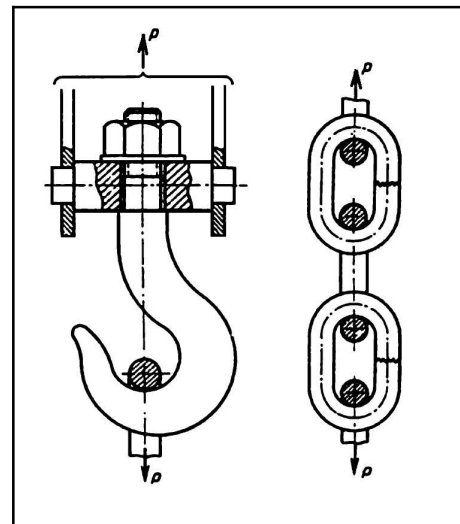


fig.10.17. - Exemples de barres à forte courbure.

<u>Notations</u> :	σ_{trans}	contrainte transversale due à la flexion	N/mm^2
	M_f	moment fléchissant	Nmm
	A_l	section longitudinale	mm^2
	r_{fn}	rayon de la fibre neutre : $r_{fn} = r_G - e$	mm
	r_G	rayon du centre de gravité de la section	mm
	r_i	rayon intérieur	mm
	r_e	rayon extérieur	mm
	e	excentricité (distance entre la position du centre de gravité de la section et la fibre neutre)	mm
	y	distance : $y = r_{fn} - r_y$	mm
	r_y	distance (rayon) pour laquelle on cherche la contrainte	mm
	σ		

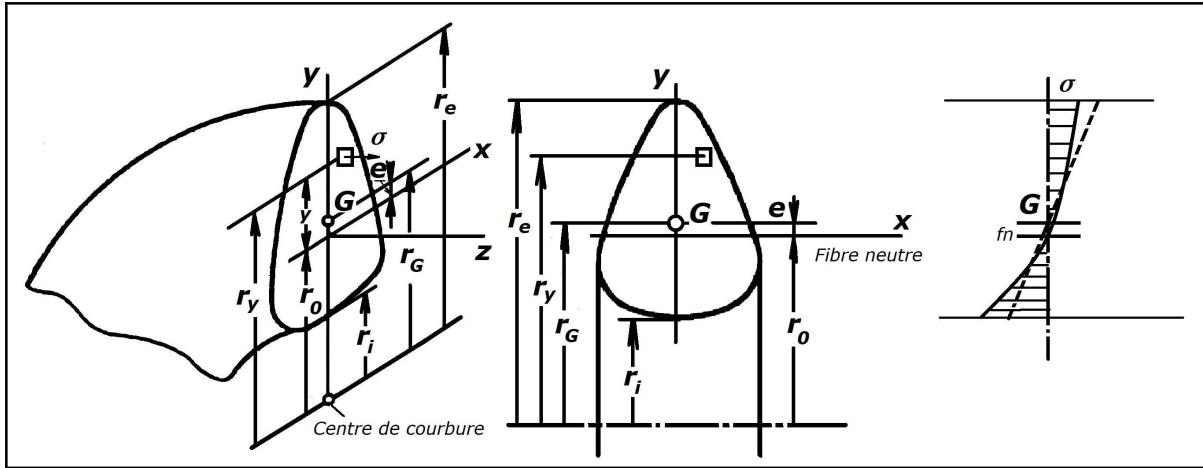


fig.10.18. - Notations et allure des contraintes.

et les contraintes dans les fibres extrêmes, qui sont les tensions maximales, valent respectivement :

a) au rayon intérieur r_i (contrainte maximale) :

$$\sigma'_{trans} = \frac{M_f}{A_l e} \frac{r_{fn} - r_i}{r_i} \quad (\text{éq. 10.131})$$

b) au rayon extérieur r_e :

$$\sigma''_{trans} = \frac{M_f}{A_l e} \frac{r_{fn} - r_e}{r_e} \quad (\text{éq. 10.132})$$

Quant à l'excentricité e , elle vaut pour une section transversale :

1) rectangulaire :

$$e = \bar{r} - \frac{(r_e - r_i)}{\ln(r_e - r_i)} \approx \frac{(r_e - r_i)^2}{12 \bar{r}} \quad (\text{éq. 10.133})$$

Notation : \bar{r} rayon moyen : $\bar{r} = \frac{r_e + r_i}{2}$ mm

2) circulaire de rayon r_0 :

$$e = \frac{1}{2} \left(\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - r_0^2} \right) \quad (\text{éq. 10.136})$$

3) circulaire creuse de diamètre extérieur d et de diamètre intérieur d_i

$$e = \frac{d^2 - d_i^2}{8 \left(\sqrt{r_G^2 - d_i^2/4} - \sqrt{r_G^2 - d^2/4} \right)} \quad (\text{éq. 10.137})$$

4) quelconque :

$$e \approx \frac{I_x}{\bar{r} A_t} \quad (\text{éq. 10.138})$$

Notation : I_x moment d'inertie de la section par rapport à l'axe central mm^4
donc passant par la fibre neutre .

Remarque :

Le calcul de la quantité e , en tant que différence entre r_G et r_{fn} , est très incommode, notamment dans le cas d'une barre a courbure initiale relativement faible. Le fait est que la différence des grandes quantités r_G et r_{fn} est très petite, mais elle doit être calculée avec précision, puisqu'elle influe directement sur le résultat du calcul des contraintes σ . Aussi est-on obligé de calculer r_{fn} avec un grand nombre de décimales.

Quant aux contraintes de traction associées, nous aurons, classiquement :

$$\sigma_{tr} = \frac{N}{A_t}$$

Notation : N effort normal N