

CHAPITRE 2. INTRODUCTION A LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX	- 2.1 -
2.1. But de la résistance des matériaux	- 2.1 -
2.2. Hypothèses générales de la résistance des matériaux	- 2.1 -
2.3. Types de pièces	- 2.2 -
2.4. Forces extérieures et forces intérieures	- 2.2 -
2.4.1. Introduction	- 2.2 -
2.4.2. Forces extérieures (Actions et réactions)	- 2.4 -
A) Introduction	- 2.4 -
B) Charges constituant les actions sur les structures	- 2.5 -
C) Principe général d'équilibre extérieur	- 2.5 -
2.4.3. Forces intérieures (internes) : notion de coupure	- 2.6 -
2.4.4. Modes de sollicitations	- 2.7 -
2.5. Notion de contrainte en un point	- 2.8 -
2.6. Elasticité	- 2.9 -
2.7. Essais de matériaux	- 2.11 -
2.7.1. Essai de traction	- 2.11 -
2.7.2. Essai de compression	- 2.14 -
2.8. Matériaux ductiles et fragiles	- 2.15 -
2.9. Loi de Hooke et distribution des contraintes	- 2.17 -
2.10. Coefficient de Poisson	- 2.20 -
2.11. Résumé des caractéristiques	- 2.23 -
2.12. Notion de coefficient de sécurité	- 2.24 -
2.12.1. Principes	- 2.24 -
2.12.2. Valeurs du coefficient de sécurité S	- 2.25 -
2.12.3. Cas spéciaux	- 2.25 -
2.13. Notion de contrainte admissible	- 2.26 -
2.14. Autre critère de dimensionnement	- 2.29 -
2.15. Appuis et charges	- 2.30 -
2.15.1. Types d'appuis et réactions correspondantes	- 2.30 -
A) Appuis simple ou à rouleau (glissant, mobile)	- 2.30 -
B) Articulation (appui fixe)	- 2.31 -
C) Encastrement	- 2.31 -
2.15.2. Types de charges	- 2.32 -
A) Charges concentrées (ponctuelles)	- 2.32 -
B) Charges réparties	- 2.32 -
2.15.3. Calcul des réactions d'appui	- 2.33 -
A) Premier exemple : poutre sur 2 appuis avec charge ponctuelle	- 2.33 -
B) Deuxième exemple : 3 forces concourantes	- 2.36 -
C) Troisième exemple : poutre avec charge répartie	- 2.36 -
D) Quatrième exemple : poutre console	- 2.37 -
2.16. Principe de superposition	- 2.39 -

CHAPITRE 2. INTRODUCTION A LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

2.1. But de la résistance des matériaux

La **résistance des matériaux** est une science qui traite les méthodes d'ingénieur employées pour le calcul de **résistance**, de **rigidité** et de **stabilité** des éléments de machines et des ouvrages.

On appelle **résistance** la capacité d'une structure, de ses parties et de ses pièces de supporter, sans se détruire, une charge déterminée.

La **rigidité** est la capacité d'une structure et de ses éléments de s'opposer à l'action déformatrice des charges extérieures (modifications de la forme et des dimensions).

La **stabilité** est la capacité d'une structure et de ses éléments de conserver une forme initiale donnée, correspondant à l'état d'équilibre élastique.

L'**objectif** de la résistance des matériaux est de vérifier ou de déterminer (économiquement) les dimensions des pièces de machines ou des ouvrages d'art afin de leur permettre :

- ▶ de supporter sans dommage les efforts qui les sollicitent,
- ▶ de se déformer dans des limites acceptables.

En pratique, on rencontre deux cas de calcul de résistance (et/ou de rigidité) :

- ▶ **Rôle créateur** [Calcul de projet]
Calculer les dimensions à donner à une pièce de nature connue pour qu'elle résiste avec sécurité à l'action de forces connues.
Calculer les dimensions à donner à une pièce de nature connue pour qu'elle présente une déformation connue sous l'action de forces connues.
- ▶ **Rôle vérificateur** [Calcul de contrôle]
Calculer les efforts que l'on peut faire supporter avec sécurité à une pièce de nature et de dimensions connues.
Calculer les déformations que subira une pièce de nature et de dimensions connues soumise à des efforts connus.

2.2. Hypothèses générales de la résistance des matériaux

Nous supposons que les corps sont :

- [H1] **continus** : le matériau remplit entièrement le volume qu'il occupe;
- [H2] **élastiques linéaires** : les déformations sont linéairement proportionnelles aux charges, c'est-à-dire que lorsque les charges disparaissent, les déformations s'annulent;
- [H3] **homogènes** : en chaque point du solide, les propriétés mécaniques du matériau sont identiques;
- [H4] **isotropes** : en un point du solide, les propriétés du matériau sont identiques dans toutes les directions.

Tous les matériaux sont loin de répondre à ces hypothèses : par exemple, le bois est anisotrope et le béton n'est pas élastique linéaire. L'acier, du point de vue microscopique, ne répond pas non plus à ces hypothèses, mais l'expérience prouve que les solutions obtenues par la résistance des matériaux sont en accord avec la réalité (en quelque sorte, le matériau (acier) est, en moyenne, continu, élastique linéaire, homogène et isotrope).

D'autre part, on admettra que :

- [H5] les **déformations** de la pièce sont **faibles** en regard des dimensions de celle-ci; on en déduira que, lors de la déformation, les **dimensions de la pièce** ainsi que la **position des charges ne varient pas**.
- [H6] seules les **déformations d'ensemble** de la pièce seront **considérées**. Les **déformations locales** (dues à l'application des charges concentrées) seront **négligées**.
- [H7] les **charges** appliquées le sont de manière **statique** (les phénomènes de fatigue (charges dynamiques) ne seront pas pris en compte).
- [H8] toutes **sections droites** le reste après **déformation** (Hypothèse de Navier ⁽¹⁾ -Bernoulli ⁽²⁾). (Souvent vérifié par l'expérience).

2.3. Types de pièces

On peut classer les différentes pièces à étudier suivant le nombre de dimensions prépondérantes :

- 1) **Les barres** sont des pièces à une dimension prépondérante.
Exemples : les poutres, les colonnes, les arcs, les ressorts hélicoïdaux, les câbles, etc...
- 2) **Les enveloppes ou plaques** sont des pièces à deux dimensions prépondérantes. C'est-à-dire que l'épaisseur de tels objets est très largement inférieure aux autres dimensions.
Exemples : cuves, réservoirs,... Les plaques étant des cas particuliers des enveloppes.
- 3) **Les massifs** sont des objets sans dimensions prépondérantes et ne seront en général pas étudiés par la résistance des matériaux.

2.4. Forces extérieures et forces intérieures

2.4.1. Introduction

Dans le cours de statique, quand on soumet un corps à l'action de forces, on le suppose indéformable, à savoir que l'on considère invariable la distance entre 2 quelconques de ses points. La statique ne prend en compte que les forces "*extérieures*" sans se soucier ni des déformations ni des tensions qui prennent naissance lors de l'application des dites forces au sein de la matière. Il s'agit là d'une grossière approximation des phénomènes car si l'on examine d'assez près les corps sollicités, on constate qu'ils se déforment et que les molécules sont soumises à l'action de forces de dissociation dites forces "*intérieures*".

⁽¹⁾ Claude-Louis Navier (1785 [Dijon] - 1836 [Paris]) : ingénieur français.

⁽²⁾ Jacques ou Jakob Bernoulli (1654 [Bâle]- 1705[Bâle]) : mathématicien et physicien suisse.

A titre d'exemple, considérons le levier ci-dessous (**fig. 2.1.**).

La statique nous apprend que si l'on applique en A une force $f = 100\text{ N}$, il faudra pour équilibrer le levier appliquer en B une force $f' = 50\text{ N}$ et en C une force $R = 150\text{ N}$.

Mais sur le même levier, la statique écrira $f = 10\text{ kN}$, $f' = 5\text{ kN}$ et $R = 15\text{ kN}$ sans se soucier de la résistance et de la déformation du corps "levier" qui, comme on le présume, n'y sont pas indifférentes.

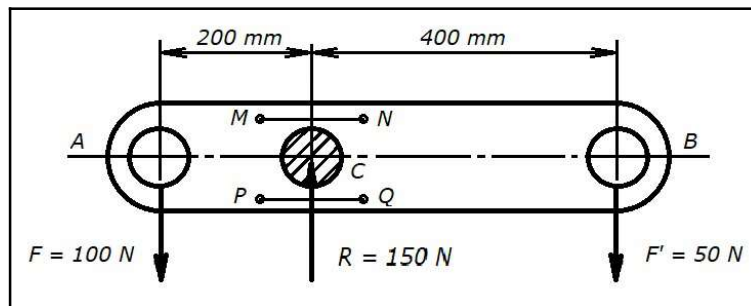


fig. 2.1. - Pièce non déformée.

En regardant les phénomènes d'un peu plus près, nous constatons :

- que le levier se *déforme* dans son ensemble et que cette déformation est d'autant plus importante que les efforts qui le sollicitent sont eux-mêmes élevés, en particulier, on s'aperçoit que la distance entre 2 points M et N ou P et Q, supposée invariable par la statique, est essentiellement variable;

$$\overline{M''N''} > \overline{M'N'} > \overline{MN} \quad \text{et} \quad \overline{P''Q''} < \overline{P'Q'} < \overline{PQ}$$

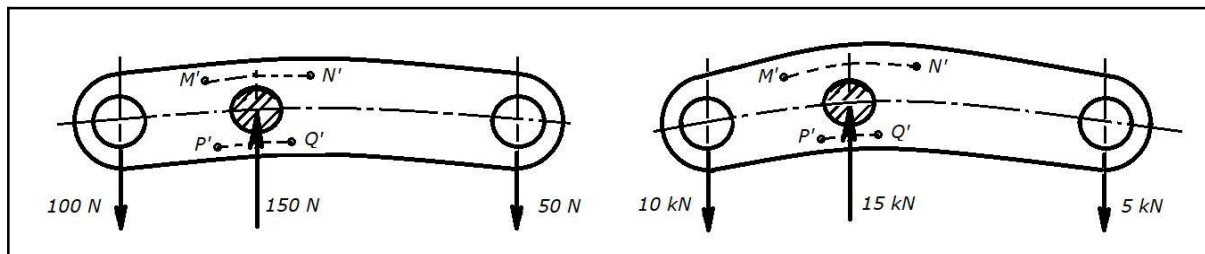
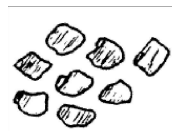


fig. 2.2. - Pièce déformée.

- Que les molécules (cristaux) constituant le levier sont soumises à l'action de forces "intérieures" puisque, en raison de la déformation signalée ci-dessus, les molécules se déplacent les unes par rapport aux autres en tendant à détruire les forces de cohésion qui les unissent.



Avant mise en charge



Charges 100 N, 50 N



Charges 10 kN, 5 kN

Entre M et N



Nous constatons que des relations doivent exister entre les forces “*extérieures*”, les forces “*intérieures*” et les *déformations*.

La résolution de problèmes de Résistance des matériaux nécessite donc la connaissance :

- ▶ **des sollicitations** : intensité et sens des efforts découlant de la “*Mécanique générale*”.
- ▶ **du comportement des matériaux** sous l’action des efforts afin de choisir ces matériaux à bon escient : ce comportement découle du cours de “*Connaissance des matériaux*”.

2.4.2. Forces extérieures (Actions et réactions)

A) Introduction

On appelle *force extérieure* les forces qui sont appliquées **sur** la pièce. On distingue deux types de forces extérieures :

- ▶ les forces directement appliquées sur le solide (*Actions*);
- ▶ les forces de liaison, c’est-à-dire les réactions aux appuis (*Réactions*).

Dans le levier vu précédemment, f et f' peuvent être considérées comme des actions et R est la réaction qui est la force exercée par le pivot sur le levier en réaction aux forces f et f' .

Actions f et f'
Réaction R } = forces *extérieures* ou “*sollicitations*”

La figure (**fig. 2.1.**) est ce qu’on appelle le *schéma du corps* (levier) *rendu libre*, obtenu en faisant le bilan des forces extérieures (ou sollicitations) qui sollicitent le corps en provenance du monde extérieur au corps.

Autre exemple : étude d’une poutre. Le schéma du corps (poutre) rendu libre est obtenu en remplaçant :

- ▶ le wagonnet par les forces qu’il exerce sur la poutre (actions);
- ▶ les appuis par les forces que le sol exerce à travers eux sur la poutre (réactions).

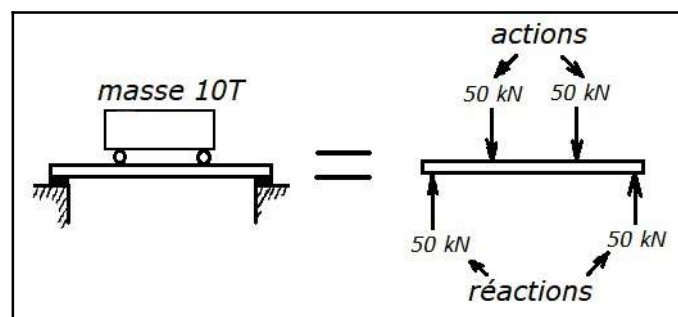


fig. 2.9. - Schéma du solide rendu libre.

Le schéma du corps rendu libre résume et schématise *toutes* les forces extérieures ou sollicitations que le monde extérieur à la poutre impose à celle-ci.

Ajoutons que la recherche des réactions est généralement la première opération à effectuer avant d'étudier le corps selon la résistance des matériaux.

B) Charges constituant les actions sur les structures

Dans ce cours, on ne considérera que les charges dites “*statiques*”, c'est-à-dire celles qui sont supposées ne varier que lentement ou pas du tout avec le temps. Énumération et classification des charges :

- *Les actions permanentes* : poids mort ou poids propre = poids de la structure et poids de toutes les charges *permanentes* agissant sur elle
- *Les actions variables* : charges mobiles = tout sauf poids mort :
 - charges d'exploitation (humains, machines, meubles, cloisons, éléments non structuraux, ...)
 - charges climatiques :
 - › neige
 - › vent ----->
- *Les actions accidentelles* : telles que les explosions, les chocs de véhicules, ...
- *Les sollicitations thermiques* : par exemple les différence de température
- *Les sollicitation de tassement* de l'un des appuis.

forces dues à l'attraction terrestre, donc *verticales*

force horizontale

forces dues à des *déformations* et non à des charges extérieures

Les charges extérieures peuvent être schématisées par des forces ponctuelles ou réparties ou sous forme de couples ponctuels ou répartis. La simplification consistant à considérer des efforts ponctuels (ou concentrés) n'est valable que si les dimensions de la zone où s'exercent les charges réparties sont petites en regard de celles de la pièce.

Remarque :

La reprise des forces horizontales dues au vent est confiée dans toute structure à des dispositifs spéciaux, les contreventements horizontaux et/ou verticaux.

C) Principe général d'équilibre extérieur

Les structures étudiées en construction sont des corps *au repos*. D'après un principe de la Mécanique, un corps ne peut rester au repos que s'il n'est soumis aucune force, ou ce qui revient au même, si l'ensemble des forces qui le sollicitent a une “*résultante nulle*”. Donc, sur n'importe quelle structure au repos, les forces extérieures, c'est-à-dire les actions et les réactions, se font *équilibre*.

En pratique, cela revient généralement dans les calculs à appliquer toutes les forces figurant au schéma du corps rendu libre les *trois équations d'équilibre* :

$$\sum f_{ix} = 0 \quad : \text{somme algébrique des projections horizontales de toutes les forces est nulle,}$$

$$\sum f_{iy} = 0 \quad : \text{somme algébrique des projections verticales de toutes les forces est nulle,}$$

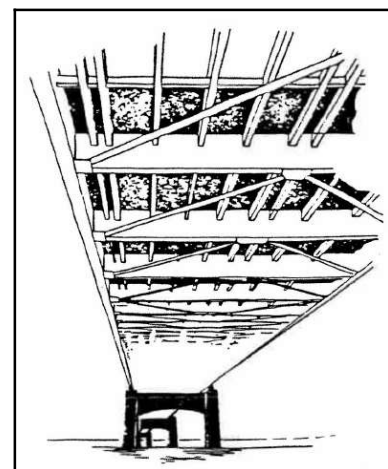


fig. 2.10. - Exemples de contreventements.

$\sum m_p(f_i) = 0$: somme algébrique des moments des forces par rapport à un point P , de toutes les forces est nulle.

Nous reviendrons sur cette importante question.

2.4.3. Forces intérieures (internes) : notion de coupure

Soit un corps en équilibre soumis à un ensemble de forces extérieures. Si on coupe ce corps par une surface plane quelconque, les parties I et II ne seront plus en équilibre.

Pour rétablir l'équilibre de la partie I, il faut placer un certain nombre de forces f_{iI} agissant sur la surface suivant laquelle la coupure a été réalisée. Ces forces (appelées *forces intérieures ou internes*) représentent les forces qu'exerçait la partie II sur la partie I avant coupure.

Un même raisonnement peut être tenu pour la partie II (forces F_{iII}). Bien entendu, les forces intérieures f_{iI} et f_{iII} sont égales et opposées : c'est le **principe d'action et de réaction**.

Du fait du rétablissement de l'équilibre par les petites forces f_i nous pouvons écrire, pour l'une ou l'autre des parties I ou II du corps,

$$\text{effets des } f_e = \text{effets des } f_i$$

où f_e représente les forces extérieures appliquées à l'une des parties du corps. C'est l'équation fondamentale de stabilité élastique.

Lors d'une coupure l'ensemble des forces intérieures peut toujours être réduit en une **force résultante** et un **moment résultant**. Prenons ensuite un système de coordonnées Ox, Oy, Oz . Menons l'axe Oz selon la normale à la section et les axes x et y dans le plan de la section. Projetant la résultante et le moment résultant sur les axes Ox, Oy et Oz , on obtient six composantes : trois de la force et trois du moment.

- La composante des forces intérieures selon la normale à la section est appelée : **Effort normal** à la section et est noté : N .
- Les composantes des forces intérieures se trouvant "dans" la section sont appelées : **Efforts tranchants** et sont notés : V_x et V_y .
- Le moment qui tente de faire tourner la pièce autour de son axe normal est appelé : **Moment de torsion** et est noté : M_t .
- Les moments qui tentent de faire tourner la pièce autour des axes x et y sont appelés : **Moments fléchissants** et sont notés : M_{fx} et M_{fy} .

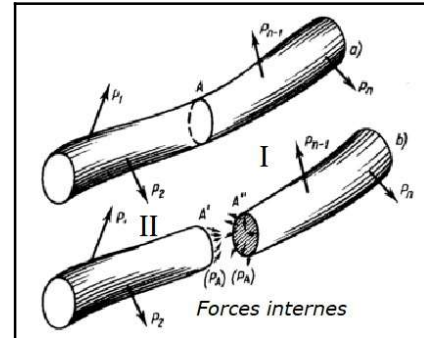


fig. 2.11. - Forces internes.

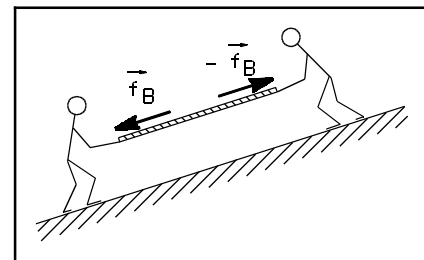


fig. 2.12. - Action = réaction.

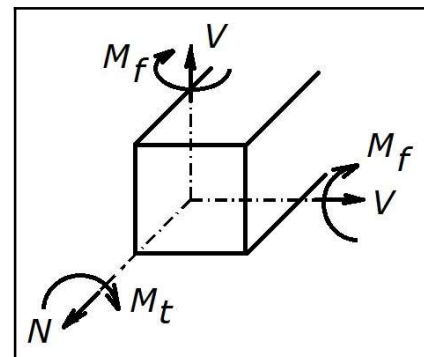


fig. 2.13. - Efforts et moments internes.

2.4.4. Modes de sollicitations

Afin de faciliter l'étude des relations de Résistance des matériaux. on a effectué une classification des sollicitations :

- ▶ sollicitations simples : traction - compression - cisaillement - flexion - torsion.
- ▶ sollicitations composées : flexion + traction (ou compression) - flexion + torsion, .. -

Examinons-les d'un peu plus près :

- 1) Traction : la force F agit dans l'axe de la pièce et provoque son allongement. (*Force normale*).

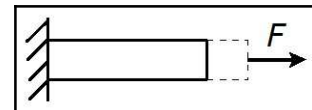


fig. 2.14. - Traction.

- 2) Compression : la force F agit dans l'axe de la pièce et provoque son raccourcissement. La longueur de la pièce n'est pas fort grande par rapport à sa section. (*Force normale*).

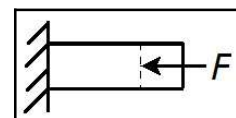


fig. 2.15. - Compression.

Remarque :

Flambage : la force F agit dans l'axe de la pièce dont la longueur est grande par rapport à son diamètre. (*Force normale*).

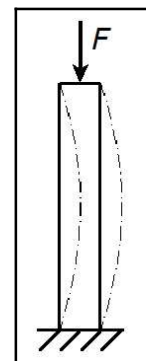


fig. 2.16. - Flambage.

- 3) Cisaillement : les forces de sollicitation F tendent à faire glisser une section par rapport à l'autre. (*Efforts tranchants*).

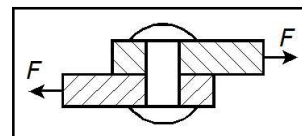


fig. 2.17. - Cisaillement.

- 4) Flexion : l'axe longitudinal de la pièce tend à s'incurver sous l'action d'effort qui agissent perpendiculairement à la direction (apparition de *moments ts*).

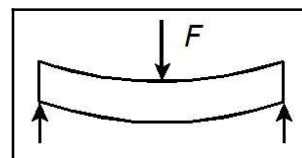


fig. 2.18. - Flexion.

fléchissant

- 5) Torsion : la pièce est sollicitée par des couples situés dans les plans perpendiculaires à son axe, qui tendent à le tordre. (*Moments de torsion*).

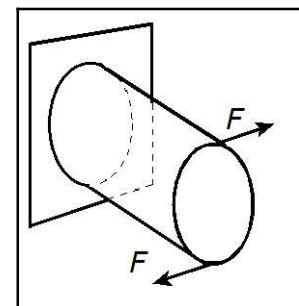


fig. 2.19. - Torsion.

- 6) Sollicitations composées : s'il y a superposition de plusieurs des sollicitations précédentes.

2.5. Notion de contrainte en un point

Pour caractériser la loi de distribution des forces intérieures sur la section, il faut introduire une grandeur définissant leur intensité. Cette grandeur est la **contrainte**.

On a vu précédemment que sur toute coupure (effectuée à travers un corps en équilibre soumis à un ensemble de forces) il y a apparition de forces intérieures.

Sur un petit élément dA (appelé facette) appartenant à la surface de la coupure et entourant le point M , agit une force dF . Par définition, la contrainte s'exerçant sur la coupure au point M vaut :

$$\theta_B = \frac{dF}{dA} \quad (\text{éq. 2.13.})$$

Généralement sa valeur varie suivant sa position dans la surface A . Il en est de même pour son orientation.

Cette contrainte totale est en général décomposée en trois composantes perpendiculaires entre elles. Une première composante suivant la normale au plan de la section, les deux autres selon deux axes dans le plan de la section. La composante suivant la normale au plan est appelée **contrainte normale** et désignée par la lettre grecque **sigma** (σ). Les composantes dans le plan de la section s'appellent **contraintes tangentielles** et sont désignées par la lettre grecque **tau** (τ). L'ensemble des contraintes en un point est appelé l'**état de contrainte** en ce point.

On remarque que :

- 1) pour définir une *contrainte*, il faut préciser non seulement le point mais aussi la surface sur laquelle elle agit.
- 2) contrairement à la *pression*, la contrainte n'agit pas nécessairement perpendiculairement à la surface sur laquelle elle s'exerce; de plus, elle dépend, en un point, du plan sur lequel elle est appliquée.

Dans le système international (SI), l'unité de contrainte est le : *pascal* ⁽³⁾ ou *Pa*.

Définition :

Le pascal *Pa* est la contrainte due à une force de 1 *N* s'exerçant sur 1 m^2 . Le pascal est donc égal à 1 N/m^2 .

Dans l'ancien système des mécaniciens (MkpS), l'unité de contrainte était le : *kilo par millimètre carré* (kg/mm^2) alors qu'il aurait fallu dire le *kilogramme-force par millimètre carré* (kgf/mm^2).

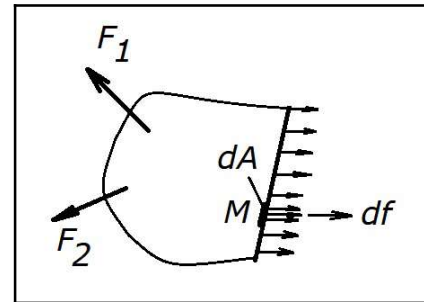


fig. 2.20. - Notion de contrainte.

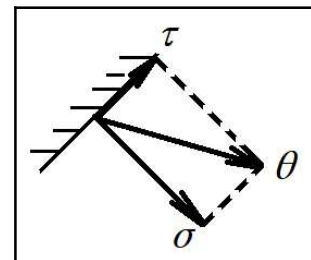


fig. 2.21. - Contraintes normales et tangentielle.

⁽³⁾ Pascal Blaise (1623 - 1662) : mathématicien, physicien et philosophe français.

On se rend compte immédiatement que le pascal est une “petite” unité. C’est pourquoi, les contraintes ayant pour dimension une force divisée par une surface, on utilisera en pratique le *newton* ⁽⁴⁾ par millimètre carré (N/mm^2) ou le mégapascal (MPa).

La relation entre les deux systèmes est :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ kg/mm}^2 = 1 \text{ kgf/mm}^2 = 9.81 \text{ N/mm}^2 = 9810000 \text{ Pa} = 9.81 \text{ MPa} \\ 1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2 \end{array} \right.$$

2.6. Elasticité

On sait qu’un corps est un assemblage d’une certaine quantité de molécules liées les unes aux autres par une force appelée *cohésion*. Le mouvement des molécules n’est donc possible que si on parvient à vaincre la cohésion et dans ce cas le corps se déforme. C’est aussi cette cohésion qui est propre à chaque corps qui constitue sa résistance à l’action des forces extérieures sollicitantes.

On pourrait assimiler les forces de cohésion à des ressorts réunissant les molécules dans toutes les directions : des corps de nature différente auraient des ressorts de qualités différentes (ressorts d’autant plus résistants que les corps sont rigides).

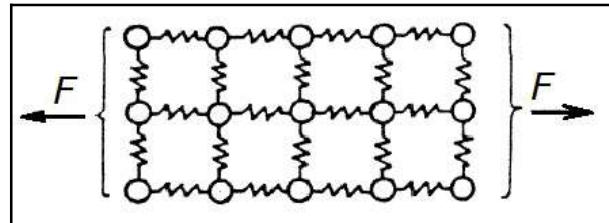


fig. 2.22. - Modélisation des forces de cohésion.

Si aucune force n’agit sur le corps, les ressorts sont libres.

Pour caractériser l’intensité de la variation de la forme et des dimensions, considérons les points A et B d’un corps non déformé distant de l_0 . Exerçons sur le corps une force F supposée de traction. Tous les ressorts parallèles à s’allongent, chaque molécule se déplace par rapport à sa voisine et le corps s’allonge (nous avons dit que la Mécanique générale négligeait ce phénomène). Soit Δl l’accroissement de cette distance par suite de la déformation du corps.

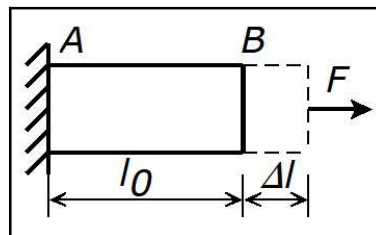


fig. 2.23. - Notion de déformation.

Par définition, la déformation moyenne ε_{moyen} suivant \overline{AB} est le quotient de l’accroissement de la longueur du segment Δl par sa longueur initiale l_0 :

$$\varepsilon_{moyen} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (\text{éq. 2.16.})$$

⁽⁴⁾ Newton Isaac (1642 - 1727) : mathématicien, physicien et astronome anglais.

Cette déformation est aussi appelée “*allongement relatif*” et est sans unité. On l’exprimera souvent en “*pour cent*” (%).

$$\varepsilon_{\text{moyen}} = 100 \frac{\Delta l}{l_0} \quad \% \quad (\text{éq. 2.17.})$$

Trois cas peuvent se présenter :

- ▶ *l’effort F est peu important* et lorsqu’il cesse d’agir, les ressorts reprennent leur forme primitive : la déformation ne subsiste pas;
- ▶ *l’effort F est important* et lorsqu’il cesse d’agir, les ressorts ne reprennent plus leur forme ou longueur primitive; on a tiré trop fort et une déformation subsiste; on dit qu’il y a *déformation permanente* et qu’on a dépassé un certain seuil appelé charge *limite élastique*;
- ▶ *l’effort F est très important* et les ressorts cassent dans une certaine section; la pièce *se rompt* et l’on a atteint un nouveau seuil d’effort appelé *charge de rupture*.

Remarque :

Normalement, tous les ressorts devraient casser en même temps; comme ils ne sont pas tous identiquement homogènes, le ressort le plus faible se rompt et les ressorts voisins, surchargés, se rompent à leur tour; il y a rupture en chaîne.

Au point de vue moléculaire, tant que la charge limite élastique n’est pas atteinte, les molécules se déboîtent sous l’effort mais se réemboîtent aussitôt que l’effort cesse d’agir.

Mais quand on dépasse la charge limite élastique, les molécules ne se réemboîtent plus quand l’effort cesse d’agir. Les deux schémas ci-dessous sont à cet égard assez explicites.

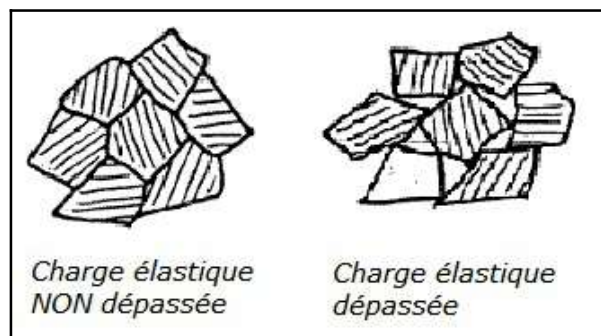


fig. 2.24. - Modélisation de la limite élastique.

De cette explication, il se dégage une conclusion importante : pour être utilisés avec sécurité, les matériaux doivent “*travailler*” non seulement en-dessous de la charge de rupture, mais aussi en-dessous de la charge limite élastique pour éviter toute déformation permanente.

Il importe dès lors de connaître avec précision les 2 seuils critiques que sont la charge limite élastique et la charge de rupture des matériaux de construction soumis des sollicitations extérieures. D’où des essais mécaniques sont nécessaires.

2.7. Essais de matériaux

2.7.1. Essai de traction

Afin de dimensionner les pièces de machines ou les ouvrages d'art, il importe de connaître les propriétés des matériaux utilisés. Celles-ci seront déterminées bien souvent à partir d'essais de traction ou de compression. Les résultats de ces essais simples et relativement peu coûteux constituent la base de la théorie de la résistance des matériaux.

Les essais sont réalisés sur des éprouvettes de dimensions normalisées. Elles auront la forme d'une barre pour l'essai de traction; dans le cas de l'essai de compression, la forme de l'éprouvette sera massive.

Lors de l'essai, on mesure l'effort normal N appliqué à l'éprouvette en fonction de l'allongement de celle-ci. On veille en particulier à ce que la force soit appliquée suivant l'axe de la pièce afin d'éviter toute flexion. Si nous écrivons :

$$\sigma = \frac{N}{A_0} \quad (\text{éq. 2.18.})$$

nous obtenons alors la contrainte σ qui existe dans l'éprouvette lors de l'application d'une charge N .

<u>Notations :</u>	σ	la contrainte de traction	N/mm^2
	N	la charge appliquée	N
	A_0	la section initiale de l'éprouvette avant l'essai	mm^2

et :

$$\varepsilon_{moyen} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (\text{éq. 2.19.})$$

<u>Notations :</u>	l_0	la longueur mesurée entre deux repères avant application de la charge (longueur initiale)	mm
	Δl	l'allongement de la longueur l lors de l'application de la charge (longueur finale - longueur initiale)	mm

Le résultat d'un essai de traction sur un acier doux est donné par le diagramme représenté à la figure ci-dessous.

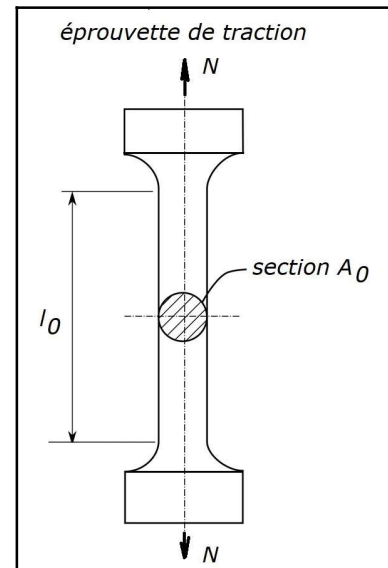


fig. 2.25. - Eprouvette de traction.

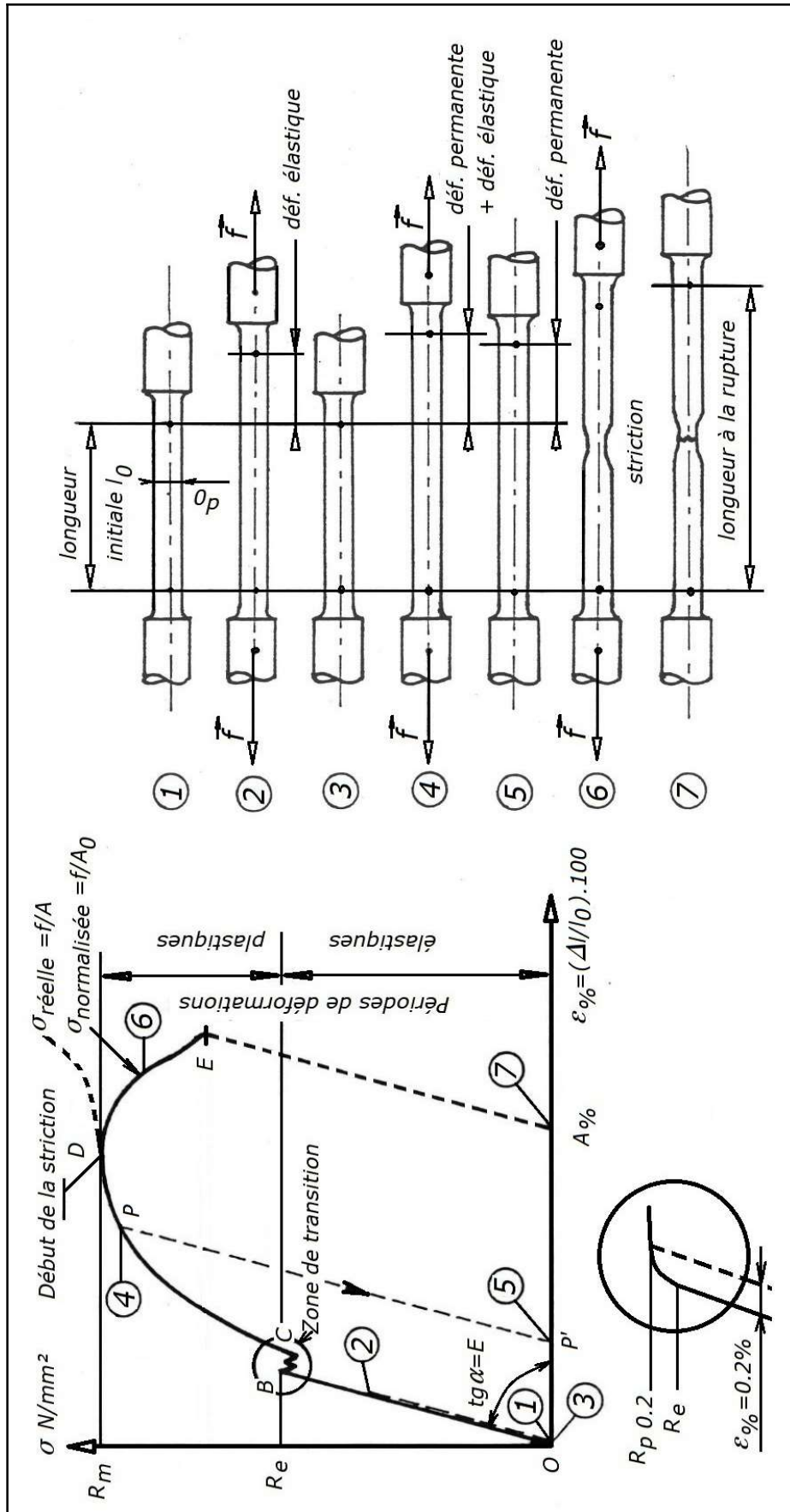


fig. 2.26. - Essai de traction.

On peut y distinguer quatre zones :

- [1] une zone **élastique** (O à B)
- [2] une zone **d'écoulement** (B à C)
- [3] une zone **d'écrouissage** (C à D)
- [4] une zone **de striction** (D à E).

Dans la **zone élastique**, l'éprouvette déchargée reprend sa longueur initiale. La zone (O à B) détermine le **domaine de proportionnalité** : les contraintes sont strictement proportionnelles à la déformation. Quand N cesse d'agir, $\Delta l \rightarrow 0$ et la pièce retrouve sa longueur initiale l_0

Le point A est appelé **limite de proportionnalité** et la contrainte qui y correspond est notée R_p . Le point C représente la fin de la **zone élastique** et la contrainte correspondante vaut R_e (**limite apparente d'élasticité**). Les déformations restent petites, de l'ordre de 0.1 ... 0.2 %.

Nous pouvons aussi définir, la **limite d'élasticité conventionnelle** (notée $R_{p\ 0.2}$ (**Limite de proportionnalité à 0.2 %**)) sera définie comme étant la contrainte correspondant à une déformation résiduelle, après déchargement, de 0.2 %.

Dans la **zone d'écoulement** (B à C), l'acier s'écoule plastiquement sous une contrainte pratiquement constante. Les allongements relatifs peuvent atteindre ... 4 ... %.

(B à D) c'est le domaine des grands allongements; quand N cesse d'agir, la pièce garde une déformation permanente.

A partir du point C, le matériau se ressaisit (**zone d'écrouissage**), l'allongement augmente plus rapidement que la charge. La section de l'éprouvette diminue progressivement

Au-delà du point D, la diminution de la section se localise et devient très importante (**phénomène de striction**). L'allongement continue à augmenter malgré une diminution de la charge jusqu'à la rupture ($A_{\%} = \dots 25 \% \dots$).

Au point D, correspond la valeur de la **contrainte de rupture** notée R_m bien que celle-ci se produise en E. En fait, la contrainte vraie à la rupture doit tenir compte de la section vraie (striction). Le diagramme d'essai aurait dès lors l'allure représentée en traits pointillés.

Il est à remarquer qu'il faudrait aussi tenir compte des allongements vrais nettement plus élevés dans le voisinage de la zone de rupture.

Si on supprime l'effort correspondant au point P, il y aura apparition d'une déformation permanente (OP'). Le chemin suivi par la contrainte sera donné par la droite PP' parallèle à OB. En rechargeant immédiatement l'éprouvette, la droite PP' sera parcourue en sens inverse, l'essai se poursuivant ensuite de la même manière que s'il n'y avait pas eu déchargement.

Après rupture, la pièce possède une longueur $l_r > l_0$ et si l'on pose :

$$(\Delta l)_r = l_r - l_0$$

on peut définir le *coefficient d'allongement à la rupture (allongement rémanent après rupture)* :

$$A_{\%} = 100 \times \frac{(\Delta l)_r}{l_0} \quad (\text{éq. 2.24.}) \quad (\text{en \%})$$

ainsi que la *striction à la rupture* :

$$Z_{\%} = \frac{A_0 - A_f}{A_0} \times 100 \quad (\text{éq. 2.25.}) \quad (\text{en } \%)$$

Notations : A_0 section initiale (avant rupture) mm^2
 A_f section après rupture mesurée au plus étroit, dans la zone de striction mm^2

Le coefficient de striction permet de quantifier le phénomène d'instabilité se traduisant par une localisation de la déformation dans les instants précédant la rupture.

Essai de traction sur une éprouvette d'alliage d'aluminium

Le résultat de l'essai est représenté à la figure ci-contre. On peut y reconnaître les zones d'élasticité, d'écrouissage et de striction. (Courbe (1) : aluminium, cuivre recuit; courbe (2) : aciers fins alliés)

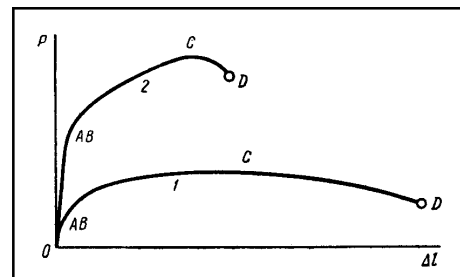


fig. 2.27. - Comparaisons d'essais de traction.

Essai de traction sur une éprouvette de fonte grise

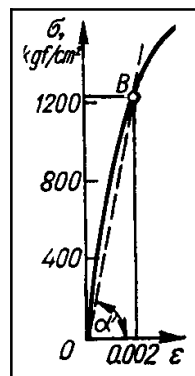


fig. 2.28. - Fonte grise.

La figure ci-contre donne l'allure approximative du diagramme des contraintes en fonction de l'allongement. On remarque que la rupture se produit sans signes avant-coureurs pour des déformations très faibles.

Essai de traction sur une éprouvette de béton

On obtient le diagramme représenté ci-contre. On constate que l'allongement relatif à la rupture est très faible et que les déformations sont presque entièrement élastiques, quoique non linéaires. D'autre part, la résistance à la rupture R_m est fonction de l'âge du béton.

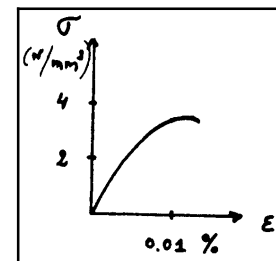


fig. 2.29. - Béton.

2.7.2. Essai de compression

Essai de compression sur une éprouvette d'acier doux

On relève, comme dans l'essai de traction, une zone élastique suivie d'un palier d'écoulement et d'une zone d'écrouissage. Après quoi, la charge continue de croître de façon importante, ce qui peut s'expliquer par le fait que la section de l'éprouvette augmente car celle-ci prend la forme d'un tonneau.

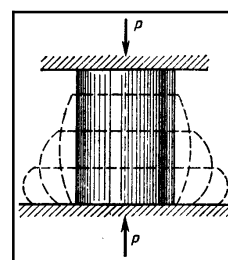


fig. 2.30. - Compression d'un acier doux.

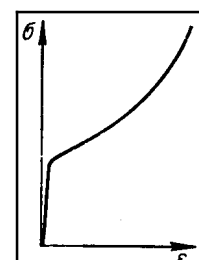


fig. 2.31. - Courbe correspondante.

Essai de compression sur une éprouvette de fonte grise

Le diagramme (σ, ϵ) a la même forme que celui obtenu lors de l'essai de traction. On remarquera cependant qu'à la rupture, la contrainte est notablement plus importante qu'en traction.

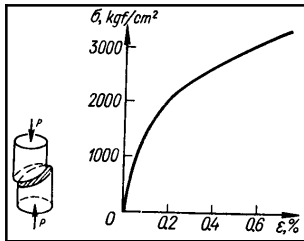


fig. 2.32. - Fonte grise.

Essai de compression sur une éprouvette de béton

Les essais sont généralement réalisés sur des cubes moulés. A la figure ci-contre est donné l'allure de la courbe (σ, ϵ) qui est semblable à celle trouvée lors de l'essai de traction. Cependant, on notera de nouveau que la contrainte à la rupture en compression est nettement plus élevée qu'en traction (de l'ordre

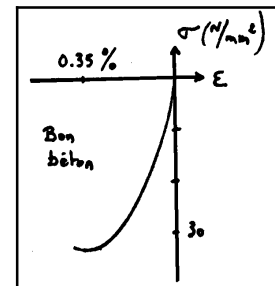


fig. 2.33. - Béton.

de 10 fois supérieure).

Remarque concernant la relation entre la limite élastique en compression R_{eC} et la limite élastique en traction R_e .

★ Tableau des relations entre R_{eC} et R_e (Annexe 1 : Tableau 2.1. - relations entre R_{eC} et R_e)

2.8. Matériaux ductiles et fragiles

Les essais décrits aux points § 2.7.1. et § 2.7.2. montrent que l'on peut classer les matériaux suivant la valeur de leur allongement relatif à la rupture.

Par définition, **les matériaux ductiles** présentent une déformation importante à la rupture ($> 5\%$). Généralement, ces matériaux résistent aussi bien à la traction qu'à la compression. L'acier doux, l'aluminium, le cuivre recuit, le plomb, le bronze,... sont des exemples de matériaux ductiles.

Ces matériaux soumis à l'essai de traction, où les forces agissantes croissent progressivement, présentent *des signes avant-coureurs précédant la rupture*, tels qu'allongements et striction (rétrécissement de section). Sur le diagramme (σ, ϵ) , la contrainte limite élastique R_e est aisément repérable, même pour des matériaux ne présentant pas de palier d'étirage. Elle constitue la contrainte à partir de laquelle commencent les grands allongements, c'est-à-dire un état dangereux pour la structure.

Pour ces matériaux, qualifiés de "ductile", R_e constitue donc la limite naturelle à ne pas dépasser quant aux contraintes.

La propriété d'un matériau de présenter de grandes déformations résiduelles sans rupture est appelée "**plasticité**". La propriété de plasticité est primordiale pour les opérations technologiques telles que l'emboutissage, l'étirage, le tréfilage, le pliage, etc... **La plasticité s'exprime par l'allongement ($\epsilon_{rupture}$) à la rupture.** Plus $\epsilon_{rupture}$ est grand, plus le matériau est plastique.

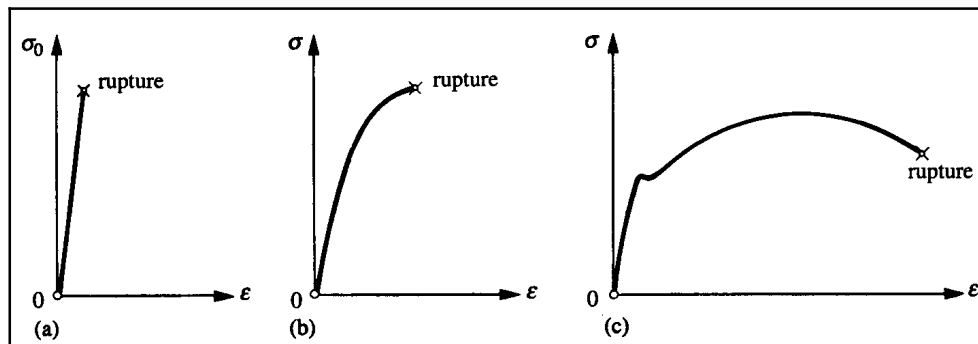


fig. 2.34. - Matériaux fragiles - ductiles : comparaison.

Le **contraire** de la plasticité est la “**fragilité**”, qui est la propriété d’un matériau de se détruire sans passer par des déformations résiduelles notables. Les matériaux doués de cette propriété sont dits “**fragiles**”. Ils n’admettent donc que des allongements relativement faibles avant rupture. De plus, la résistance de ces matériaux en compression est de ... 3 ... 10 ... fois supérieure à celle obtenue en traction. Parmi les matériaux fragiles, citons par exemple : la fonte, la roche, le béton, le verre,...

Ces matériaux soumis aux essais, *se rompent brusquement sans aucun phénomène avant-coureur*. Le domaine élastique du diagramme (σ , ε) n’est pas toujours aisément repérable, est plus ou moins étendu selon le cas, et est parfois inexistant. Dès lors, R_e est le plus souvent difficile à identifier, voire impossible, alors que la contrainte de rupture R_m est, bien entendu, nettement marquée.

Pour ces matériaux, qualifiés de “*raides*”, R_m constitue donc la limite naturelle que les contraintes ne devront pas franchir.

En résumé :

- ▶ **Comportement fragile** : la rupture se produit sans déformation apparente (**fig. 2.34.a**);
- ▶ **Comportement à faible plasticité** : la rupture se produit après une petite déformation plastique, le seuil d’écoulement est inexistant (classé dans les matériaux fragiles si $\varepsilon_{rupture} \leq 5\%$) (**fig. 2.34.b**);
- ▶ **Comportement ductile** : la déformation plastique avant rupture est très grande (**fig. 2.34.c**).

Remarques :

- 1) Certains matériaux supportent des charges plus importantes en *traction* qu’en *compression*. C’est en particulier le cas du bois.
- 2) Les résultats d’essais décrits ci-dessus (§ 2.7.1. et § 2.7.2.) ne sont valables que s’ils sont réalisés à pression atmosphérique, à température ambiante et à vitesse de chargement suffisamment faible. Si ces conditions ne sont pas respectées, les propriétés de résistance des matériaux peuvent être profondément modifiées.
- 3) On notera dès à présent que le comportement des barres longues en traction sera différent de celui des mêmes barres soumises à compression. Les pièces élancées (c’est-à-dire dont la longueur dépasse de 8 à 10 fois le petit côté ou le diamètre d’une section transversale) soumise à un effort de compression périssent par flambement (brusque dérobement latéral). Ce phénomène sera étudié de façon détaillée au chapitre “*flambement*”.

2.9. Loi de Hooke et distribution des contraintes

La relation entre l'allongement Δl d'une barre et l'effort de traction N fut établi en 1678 par R. Hooke ⁽⁵⁾. En effet, dans le diagramme de traction, dans le domaine élastique, on peut remarquer la linéarité entre l'effort N et l'allongement Δl , et donc entre la contrainte σ et l'allongement relatif ε . Mathématiquement, cette relation peut s'exprimer par la relation trigonométrique suivante :

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon}} \quad (\text{éq. 2.27.})$$

Cette valeur ($\tan \alpha$) nous lui donnons un nom particulier E :

$$\boxed{\tan \alpha = E}$$

E est donc une constante dépendante du matériau, appelé : **module d'élasticité longitudinale** ou **module de Young** ⁽⁶⁾. Pour les valeurs de quelques matériaux voir *Annexe 1*.

La **loi de Hooke** s'écrit dès lors :

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow \sigma = \varepsilon E} \quad (\text{éq. 2.30.})$$

Le module d'élasticité longitudinale E est en fait l'image de la **rigidité du matériau**. Plus E est élevé, moins le matériau ne se déformera sous l'action d'une force.

Remarque :

La loi de Hooke est approchée. Pour certains matériaux, tel l'acier, elle est observée avec un grand degré de précision dans des limites de variations très larges de contraintes. Dans d'autres cas, on observe des écarts notables à la loi de Hooke. Ainsi, pour la fonte et certains matériaux de construction, même lorsque les contraintes sont petites, la loi de Hooke ne peut être admise qu'avec une grossière approximation.

★ **Tableau des modules d'élasticité E et des coefficients de Poisson ν de divers matériaux** (*Annexe 1 : Tableau 2.2. - Module d'élasticité E et coefficient de Poisson ν de divers matériaux.*)

★ **Tableau des modules d'élasticité E en fonction de la température de certains aciers et métaux** (*Annexe 1 : Tableau 2.3. - Module d'élasticité E en GPa en fonction de la température.*)

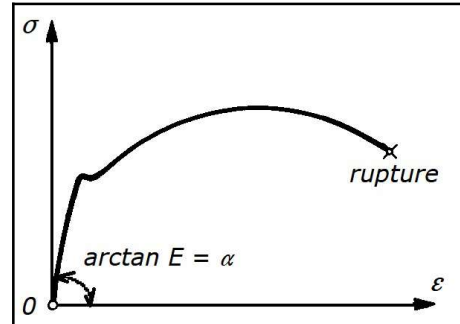


fig. 2.35. - Loi de Hooke.

⁽⁵⁾ Hooke Robert (1635 - 1702) : physicien et mathématicien anglais.

⁽⁶⁾ Young Thomas (1773 - 1829) : physicien anglais.

Application 2.1. Lors d'un essai de compression sur une éprouvette cylindrique de diamètre 16 cm et de hauteur 32 cm, on mesure avec précision la force appliquée sur l'éprouvette ainsi que son raccourcissement.

- Calculer la contrainte et le déplacement aux points A et B.
- Déduire la valeur du module d'élasticité E .
- Déduire la valeur de la contrainte à rupture R_m .

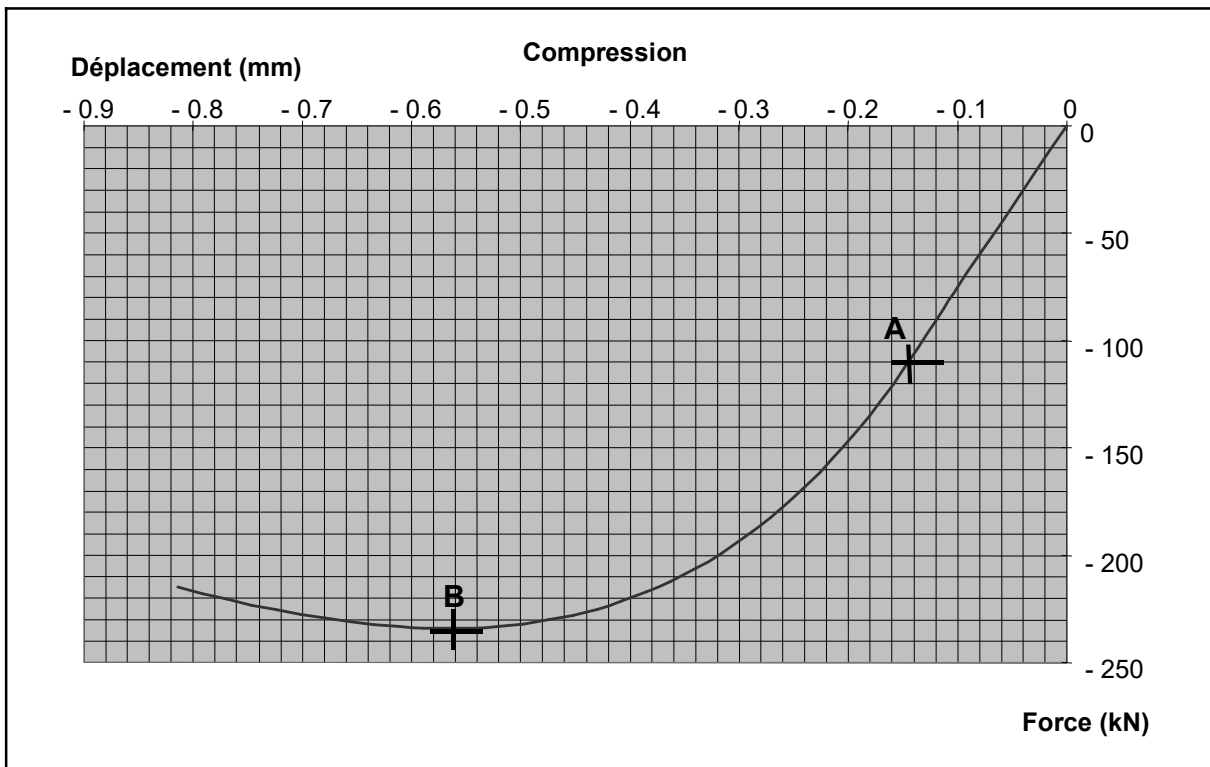


fig. 2.36. - Application 2.1.

Solution :

a) Calcul de la contrainte et de l'allongement relatif aux points A et B

Recherche de la section de l'éprouvette :

$$A_0 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 160^2}{4} = 20106.2 \text{ mm}^2$$

Au point A (c'est le point qui déterminera la limite élastique) nous avons :

- ▶ La force : $N = 105 \text{ kN}$
- ▶ L'allongement : $\Delta l = -0.142 \text{ mm}$

Nous obtenons donc :

- ▶ La contrainte : $\sigma = \frac{N}{A_0} = \frac{105000}{20106.2} = 5.22 \text{ N/mm}^2 = R_e \text{ (en compression)}$
- ▶ L'allongement : $\varepsilon_{\%} = \frac{\Delta l}{l_0} \times 100 = \frac{-0.142}{320} \times 100 = -0.0444 \%$

Au point B (c'est le point qui déterminera la limite de rupture) nous avons :

- ▶ La force : $N = 235 \text{ kN}$
- ▶ L'allongement : $\Delta l = -0.56 \text{ mm}$

Nous obtenons donc :

- ▶ La contrainte : $\sigma = \frac{N}{A_0} = \frac{235000}{20106.2} = 11.69 \text{ N/mm}^2 = R_m \text{ (en compression)}$
- ▶ L'allongement : $\varepsilon_{\%} = \frac{\Delta l}{l_0} \times 100 = \frac{-0.56}{320} \times 100 = -0.175 \%$

b) *Détermination du module d'élasticité*

Le calcul s'effectuera avec les données du point A. Soit :

$$\sigma = \varepsilon E \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{5.22}{4.44 \cdot 10^{-4}} = 11760 \text{ N/mm}^2$$

c) *Détermination de la contrainte de rupture*

Voir point a).

C'est la contrainte au point B :

$$\sigma_B = R_m = 11.69 \text{ N/mm}^2$$

Remarque :

C'est un matériau dont les caractéristiques sont faibles par rapport aux valeurs moyennes, il s'agit d'un béton maigre.

Application 2.2. Une éprouvette de 12 mm de diamètre et de 30 mm de longueur est essayée en traction dans le domaine élastique. On remarque que cette éprouvette, en subissant un effort de 15 kN, s'allonge de 0.089 mm. Quelle est le module d'élasticité longitudinale de cette matière ?

Solution :

Recherche de la section de la barre :

$$A_0 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 12^2}{4} = 113.1 \text{ mm}^2$$

La contrainte sera égale à :

$$\sigma = \frac{N}{A_0} = \frac{15000}{113.1} = 132.6 \text{ N/mm}^2$$

L'allongement relatif de la barre :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{0.089}{30} = 0.00297$$

Le module d'élasticité longitudinale est égal à :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{132.6}{0.00297} = 44650 \text{ N/mm}^2$$

C'est un alliage de magnésium.

2.10. Coefficient de Poisson

Sous l'action d'un effort de traction (compression), la barre s'allonge (se raccourcit) relativement de ε , mais, d'autre part, elle subit une contraction (dilatation) latérale relative δ lié à ε (voir figure ci-contre).

Le rapport entre les deux est une constante pour un matériaux donné.

On définit dès lors le **coefficient de Poisson** ⁽⁷⁾ ν comme étant le rapport de δ sur ε :

$$\nu = - \frac{\delta}{\varepsilon} \quad (\text{éq. 2.46.})$$

avec : $\delta = \frac{\Delta d}{d_0}$

et $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

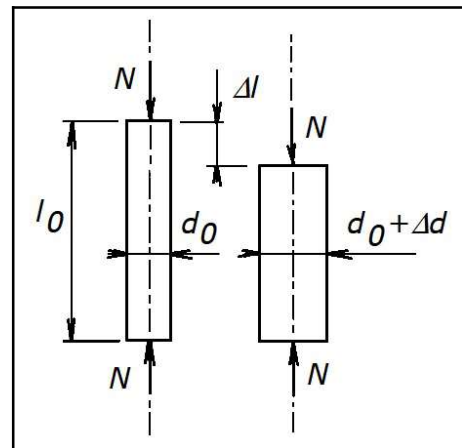


fig. 2.37. - Gonflement sous l'effet d'une compression.

<u>Notations</u> :	ν	coefficient de Poisson	-
	d_0	diamètre initial du barreau	mm
	l_0	longueur initiale du barreau	mm

Le **coefficient de Poisson** ν est un coefficient de proportionnalité sans dimension. Il caractérise le rapport entre la contraction latérale δ et l'allongement relatif de la poutre ε . La quantité ν caractérise une propriété intrinsèque du matériau et se détermine expérimentalement. En première approximation on peut dire que le coefficient de Poisson est indépendant de la température.

Pour tous les métaux, la valeur numérique de ν est comprise entre 0.25 et 0.35. La valeur du coefficient de Poisson ne peut être, pour un **matériau isotrope**, supérieur à 0.5 (pour le liège il est proche de 0, pour la gomme de 0.5).

Remarques :

$\nu = 0.5$ correspond à une variation nulle du volume lors de l'extension (éq. 2.53.);

$\nu = 0.25$ correspond à un matériau isotrope parfait.

On trouvera dans l'Annexe 1 les valeurs du coefficient de Poisson ν pour différents matériaux.

A titre d'indication, si une barre travaille en traction ou en compression, on peut se servir des formules suivantes pour déterminer la variation de section ΔA de la barre :

$$\Delta A \approx - 2 \nu \varepsilon A = - 2 \nu \frac{N}{E} A \quad (\text{éq. 2.52.})$$

⁽⁷⁾ Poisson Denis (1781 - 1840) : mathématicien et physicien français.

$$\Delta V = \frac{(1 - 2\nu)}{E} N l_0 = \frac{(1 - 2 \times 0.3)}{205000} \times (-5000) \times 2000 = -19.5 \text{ mm}^3$$

Ou :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = (1 - 2\nu) \frac{\Delta l}{l_0} \Rightarrow \Delta V = (1 - 2\nu) \frac{\Delta l}{l_0} V_0$$

$$\begin{aligned} \Delta V &= (1 - 2\nu) \frac{\Delta l}{l_0} V_0 \\ &= (1 - 2 \times 0.3) \times \frac{-2.48}{2000} \times \left(\frac{\pi \times 5^2}{4} \times 2000 \right) \\ &= -19.5 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

2.11. Résumé des caractéristiques

Les paramètres R_m , R_e , A_0 , E et ν constituent les principales caractéristiques mécaniques des matériaux, qu'il est possible de déduire de l'essai de traction. Examinons-en la signification physique :

- ▶ R_m et R_e expriment la “**solidité**” du matériau; si les contraintes réelles provoquées par les forces extérieures dépassent ces valeurs, alors le matériau devient inutilisable car la structure réalisée en ce matériau est sur la voie de la ruine, d'abord par des allongements et des déformations excessifs et permanents, ensuite par la rupture :
 R_m est l'image de la “**résistance**”
 R_e est l'image de la “**dureté**” du matériau
- ▶ E exprime la capacité du matériau de rester “**indéformable**” sous l'effort *dans le domaine élastique* (c'est la “**rigidité**” du matériau); par exemple la flèche prise par une poutre fléchie est inversement proportionnelle à E .
- ▶ A_0 exprime la “**ductilité**” du matériau, c'est-à-dire sa capacité de présenter des signes avant-coureurs de déformation juste *avant rupture*.
- ▶ Z_0 est l'image de l' “**aptitude à la déformation à froid**”.
- ▶ ν permet de caractériser la **contraction** de la matière perpendiculairement à la direction de l'effort appliqué. C'est une image de l' “**isotropie**” du matériau.

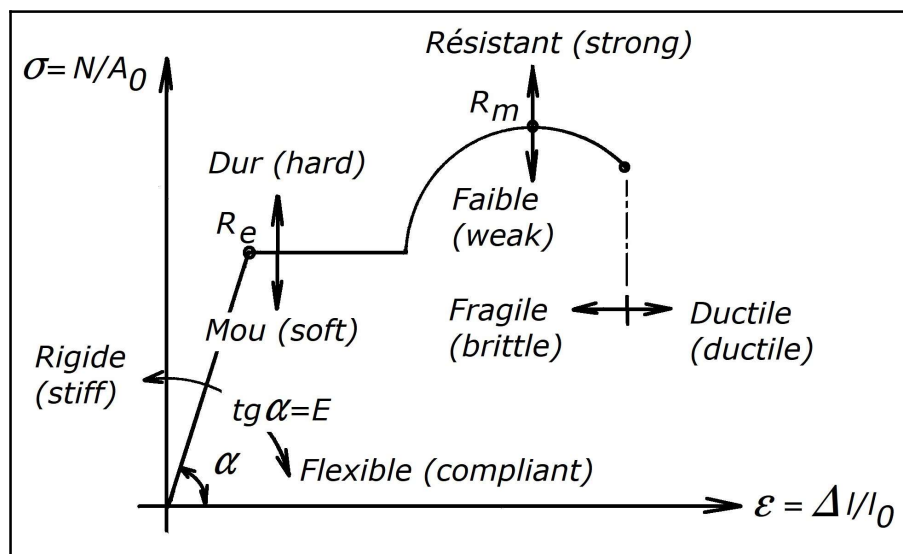


fig. 2.38. - Résumé des caractéristiques.

2.12. Notion de coefficient de sécurité

2.12.1. Principes

Nous avons vu plus haut que les contraintes réelles au sein d'un matériau, soumis à des sollicitations, ne peuvent dépasser une limite naturelle qui est la limite d'élasticité R_e pour les matériaux ductiles et la résistance à la rupture R_m pour les matériaux raides, sous peine d'atteindre la ruine de la structure, par déformation excessive et permanente ou par rupture. Au-delà de cette limite, la structure ne "porte" plus.

Notre souci étant d'utiliser et même d'exploiter le matériau au maximum de ses possibilités, nous serions tentés de le faire travailler sous de contraintes réelles très proches de R_e et de R_m . Cette attitude mène à une situation extrêmement dangereuse en raison des inévitables *incertitudes* qui pèsent sur *les données du problème* :

- ▶ prévision des forces maximales agissantes (les "actions" ou les "charges" et de leur mode d'action (dépassement des valeurs prévues et sollicitations dynamiques plutôt que statiques);
- ▶ dispersion statistique des propriétés de résistance des matériaux mis en oeuvre;
- ▶ malfaçons au stade de la réalisation en atelier, ou in situ;
- ▶ diminution de la résistance du matériau par suite de corrosion, d'usure, de modifications structurales ou chimiques;
- ▶ incertitude sur les dimensions des pièces (par exemples : tolérances de laminage sur les profilés, positionnement des armatures dans les coffrages);
- ▶ théorie de calcul basée sur des hypothèses simplificatrices qui ne représentent qu'imparfaitement la réalité.

Ces incertitudes constituent autant de raisons pour lesquelles il est absolument indispensable de maintenir une marge plus ou moins grande entre la résistance ultime du matériau (R_m et R_e) et les contraintes maximales de service réellement provoquées par les charges, dans le cas le plus défavorable de chargement de la structure.

Cette marge dite "de sécurité" sera d'autant plus grande que sont plus incertaines les prévisions relatives aux charges maximales et qu'est plus grande la dispersion dans les propriétés mécaniques des matériaux, telle qu'elle résulte des essais; ainsi par exemple, on choisira une marge de sécurité plus grande pour le bois, le béton, la pierre et la fonte que pour l'acier dont les propriétés mécaniques sont mieux connues et, pour une même nuance, plus constantes.

Cette marge de sécurité est également d'autant plus petite que le cas de sollicitation qui y correspond est peu probable; ainsi par exemple, il serait "luxueux" en Belgique d'adopter la même marge de sécurité dans le cas du séisme que dans celui des charges quotidiennes d'exploitation d'un bâtiment. On le verra lus loin.

Ainsi est introduite la notion de "coefficient de sécurité", mesure de la marge de sécurité. Cette notion est indissociable de celle de "contrainte admissible" qui sera développée dans le paragraphe suivant.

De façon générale, la valeur de S_{Re} (**coefficient de sécurité par rapport à la limite élastique**) ou S_{Rm} (**coefficient de sécurité par rapport à la limite de rupture**) sera conditionnée par deux critères :

- 1) le **degré de connaissance** que l'on a du système (par exemple, suite à l'expérience acquise par la pratique sur des systèmes analogues);
- 2) la **gravité des conséquences** d'une mise hors d'usage (et cela suivant l'importance relative de la pièce dans la machine : pièce vitale au fonctionnement de la machine ou pièce tout à fait accessoire).

2.12.2. Valeurs du coefficient de sécurité S

Voici quelques exemples de coefficients de sécurité utilisés en construction métallique, coefficient à utiliser en l'absence de normes ou de codes de bonnes pratiques.

★ **Tableau des coefficients de sécurité en usage en construction mécanique** (*Annexe 1 : Tableau 2.4. - Coefficients de sécurité en usage en construction mécanique.*)

★ **Tableau des coefficients de choc** (*Annexe 1 : Tableau 2.5. - Coefficient de choc k_c .*)

*Mais **attention** en aucun cas le coefficient de sécurité ne doit devenir un coefficient d'ignorance !*

2.12.3. Cas spéciaux

Dans certains cas l'estimation des coefficients de sécurité est réglementée par des normes ou des codes de bonne pratique, par exemple dans : la construction métallique, le béton armé, les appareils sous pression, ...

Ces normes ou codes tiennent compte, pour l'établissement du coefficient de sécurité, de facteurs propres. Exemple, dans le cas des roulements ou des dents d'engrenage, les codes et normes prennent en considération la vitesse de rotation et la durée de fonctionnement envisagée.

Dans le cas des EUROCODES on majorera plutôt les charges appliquées sur les structures.

- ▶ Surcharges d'exploitation : $\times 1.5$
- ▶ Surcharges permanentes : $\times 1.35$

Et donc :

$$N_{Ed} = 1.35 (\text{Charge permanente}) + 1.5 (\text{Charge mobile ou surcharge}) \quad \text{\textit{(éq. 2.67.)}}$$

2.13. Notion de contrainte admissible

Alors que R_m et R_e sont des caractéristiques naturelles du matériau, la contrainte admissible est une invention des calculateurs, par ailleurs fort commode, appelée aussi pour cette raison, “*contrainte de calcul*”.

En fonction de ce qui a été dit auparavant sur la nécessité absolue de maintenir une marge de sécurité entre les contraintes maximales de service réellement provoquées par les charges et la résistance ultime du matériau (R_m et R_e), on va faire en sorte que les contraintes maximales de service n’excèdent pas une limite appelée “*contrainte admissible*”, inférieure à R_m ou R_e et valant une fraction de R_m ou R_e .

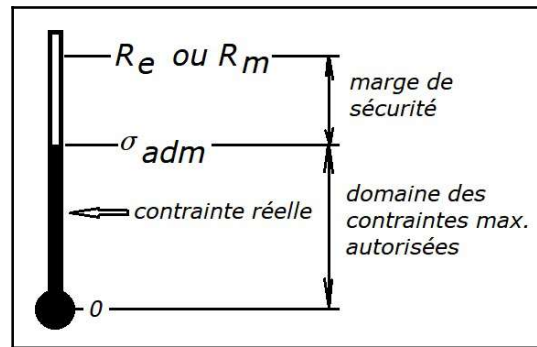


fig. 2.39. - Notion de contrainte admissible.

Dans toute structure stable, on aura donc toujours la double inégalité :

$$\{ \text{contrainte réelle} \leq \text{contrainte admissible} \leq R_e \text{ ou } R_m \} \text{ (éq. 2.68.)}$$

Dans un problème de vérification, on vérifiera qu’il en est bien ainsi; dans un problème de dimensionnement, on donnera à la pièce des dimensions pour qu’il en soit ainsi; dans un problème de recherche de la capacité portante, on partira de l’hypothèse que les contraintes réelles valent la contrainte admissible.

Que vaut cette contrainte admissible ? En fonction de ce qui a été dit ci-dessus, on aura :

- 1) Dans le cas d’un **matériau ductile**, la contrainte admissible σ_{adm} en traction-compression est obtenue en tenant compte d’un coefficient de sécurité S par rapport à la limite d’élasticité R_e :

$$\{ \sigma_{adm} = \frac{R_e}{S} \text{ ou } \sigma_{adm} = \frac{R_{p0.2}}{S} \} \text{ (éq. 2.69.)}$$

Remarques :

- 1) En technique on ne fera aucune différence entre R_e la limite élastique et $R_{p0.2}$ la limite de proportionnalité à 0.2 %. Dans la suite du cours R_e représentera aussi bien l’un que l’autre.
 - 2) Quand il s’agit de la contrainte admissible de compression, on notera $\sigma_{adm\ comp}$ ou $\sigma'_{c\ adm}$.
- 2) Si le **matériau** est **fragile** (béton,...), pour le bois et d’autres, la contrainte admissible σ_{adm} se déterminera à partir de la résistance à la rupture R_m et non plus à partir de R_e difficile ou impossible à obtenir :

$$\{ \sigma_{adm} = \frac{R_m}{S} \} \text{ (éq. 2.71.)}$$

Il convient de noter que la valeur de la contrainte admissible d’un matériau se base sur une caractéristique mécanique significative du matériau. Ainsi par exemple, pour les matériaux possédant une résistance à la compression très très nettement supérieure à celle à la traction, on parlera de contrainte

admissible à la compression et non à la traction. Pour une maçonnerie de briques, qui, en raison de sa très faible résistance à la traction, n'est pratiquement jamais sollicitée qu'en compression, on préconise une contrainte admissible à la compression comprise entre 80 et 150 N/cm^2 .

Comme on va le voir ci-après pour l'acier, le bois et le béton, les normes indiquent clairement les différentes valeurs des contraintes admissibles à adopter en fonction du cas de sollicitation si bien qu'en général, pour ces matériaux, le calculateur n'aura pas de souci à se faire pour la fixation de ces contraintes admissibles. En revanche, pour d'autres matériaux, la prudence s'impose pour le choix ou le calcul de ce paramètre car cela constitue toujours une opération délicate entre toutes .

3) Valeur de la contrainte admissible généralisée

Nous pouvons adopter, *en l'absence de toute réglementation spécifique*, la contrainte admissible suivante dans les cas d'avant-projet :

$$\sigma_{adm} = \frac{R_e \text{ ou } R_m}{S \times S_{fat} \times k_c} \quad (\text{éq. 2.72.})$$

<u>Notations</u> :	R_e	limite élastique	N/mm^2
	R_m	limite de rupture	N/mm^2
	S	coefficient de sécurité	-
	S_{fat}	coefficient de sécurité vis-à-vis de la fatigue	-
	k_c	coefficient de choc	-

Application 2.4. Un fil de cuivre à une charge de rupture de 650 N/mm^2 et de limite élastique de 580 N/mm^2 . Quelle sera la charge maximale que pourra supporter un fil de 0.2 mm avant de casser ? Quelle sera la charge maximum admissible si on considère un coefficient de sécurité égal à 3 ?

Solution :

Recherche de la contrainte

La section du fil vaut :

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 0.2^2}{4} = 0.0314 \text{ mm}^2$$

$$\sigma = R_m = \frac{N}{A} \Rightarrow N = R_m A = 650 \times 0.0314 = 20.4 \text{ N}$$

Charge maximale admissible

Pour un matériaux ductile, nous avons :

$$\sigma_{adm} = \frac{R_e}{S} = \frac{580}{3} = 193.3 \text{ N/mm}^2$$

$$N_{adm} = \sigma_{adm} A = 193.3 \times 0.0314 = 6.1 \text{ N}$$

Application 2.5. Quelle charge peut reprendre cette chape, si elle est exécutée en acier A 355 C et tenant compte d'un coefficient de sécurité de 4 ? (Ce coefficient tient compte d'une éventuelle concentration de contraintes.)

Solution :

Contrainte admissible :

$$\sigma_{adm} = \frac{R_e}{S} = \frac{355}{4} = 88.75 \text{ N/mm}^2$$

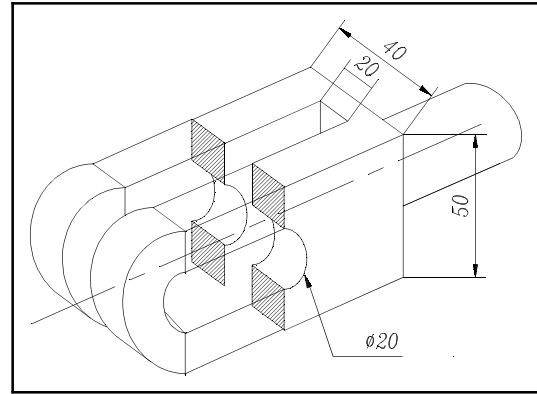


fig. 2.40. - Application 2.5.

Section sollicitée :

$$A = 4 \times (15 \times 10) = 600 \text{ mm}^2$$

Effort admissible :

$$N_{adm} = \sigma_{adm} A = 88.75 \times 600 = 53250 \text{ N}$$

Application 2.6. Une tige de vérin mesurant 150 mm de longueur, est sollicitée en compression par un effort de 100000 N. Quel sera le diamètre de celle-ci sachant qu'elle est en acier $R_e = 540 \text{ N/mm}^2$? Coefficient de sécurité $S = 3.5$. (On ne tiendra pas compte d'un éventuel phénomène de flambement.)

Solution :

Contrainte admissible :

$$\sigma_{adm} = \frac{R_e}{S} = \frac{540}{3.5} = 154 \text{ N/mm}^2$$

Section de la barre :

$$\sigma = \frac{N}{A} \Rightarrow A = \frac{N}{\sigma} = \frac{100000}{154} = 649.3 \text{ mm}^2$$

Diamètre de la tige :

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow d_{tige} = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 649.3}{\pi}} = 28.76 \text{ mm} \Rightarrow 30 \text{ mm}$$

2.14. Autre critère de dimensionnement

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré qu'un seul critère dans le calcul des dimensions qu'il convient de donner à une structure sollicitée par des forces connues : la résistance de cette structure, c'est-à-dire sa capacité de reprendre les charges sans atteindre le stade de ruine par dépassement des contraintes permises. C'était le critère de la contrainte admissible.

Mais l'on sait que sous l'action des sollicitations, toute "structure", la plus élémentaire soit-elle (par exemple un câble), se déforme. Si elle est correctement calculée, elle se déforme *élastiquement* c'est-à-dire reprend sa forme initiale dès que cessent d'agir les sollicitations. Pensons à la Tour Eiffel dont le sommet se déplace de quelques dizaines de *cm* sous l'action du vent et/ou de l'ensoleillement; la simple planche de bois sur laquelle on marche pour franchir un fossé accuse aussi une flèche appréciable; pensons enfin au tremplin de piscine ou de gymnastique. Et pourtant, ces structures "résistent" car en aucun endroit, on n'a dépassé les contraintes permises, sinon elles se seraient probablement effondrées.

Peut-on dans tous les cas admettre les déformations élastiques maximales qu'une structure peut ainsi prendre en service ?

La réponse est évidemment négative pour diverses raisons :

- ▶ il est psychologiquement désagréable de sentir le sol se dérober sous nos pieds (impression d'insécurité);
- ▶ une structure déformée est inesthétique;
- ▶ l'écoulement des eaux peut être contrarié par un "creux" non désiré;
- ▶ les matériaux de parachèvement appliqués sur la structure porteuse ne "suivent" pas les déformations s'ils sont raides (verre, céramique, plâtre, ...);
- ▶ les cloisons, non-porteuses par définition, ont besoin d'être soutenues en chacun de leur point sous peine de se fissurer;
- ▶ une antenne parabolique située au sommet d'une tour doit conserver rigoureusement son orientation d'origine;
- ▶ etc ...

Conclusion importante :

Le seul critère de résistance ne suffit pas dans le dimensionnement ou la vérification d'une structure; il convient également et en outre de veiller à ce que les déformations élastiques maximales réellement prises en service ne dépassent pas une limite appelée "déformation admissible".

En général, les valeurs de ces déformations admissibles sont imposées par les cahiers des charges et/ou et par les normes. Le plus souvent, on limite la flèche maximale f d'une poutre fléchie à une fraction de sa portée; par exemple :

$$f \leq \frac{l}{200}, \text{ ou } \frac{l}{300}, \text{ ou } \frac{l}{500}.$$

Nous y reviendrons plus longuement au chapitre consacré à la flexion.

On veillera donc à vérifier que :

$$\Delta l \leq \Delta l_{adm} \quad \text{en traction - compression;}$$

$$f \leq f_{adm} \quad \text{en flexion;}$$

et dans le cas de la torsion, que l'angle de déformation soit :

$$\theta \leq \theta_{adm}.$$

2.15. Appuis et charges

2.15.1. Types d'appuis et réactions correspondantes

Une structure, quelle qu'elle soit, repose sur le sol au moyen de ce que l'on nomme généralement "appuis", au travers desquels vont transiter les flux des forces venant du sol et que l'on a appelées "réactions". Celles-ci étant des forces comme les autres, il nous faudra déterminer, pour chacune d'elles, sa direction, son sens, son point d'application ou sa ligne d'action, et son intensité.

La manière avec laquelle s'exercent les réactions est très complexe. Aussi, dans le but de caractériser aisément les appuis essentiels que l'on utilise dans la pratique pour attacher des constructions telles que poutres, ponts et charpentes diverses à leurs fondations, la Résistance des Matériaux distingue-t-elle trois types d'appuis usuels (dans le plan) :

A) Appuis simple ou à rouleau (glissant, mobile)

Degré de liberté : deux (rotation, glissement).

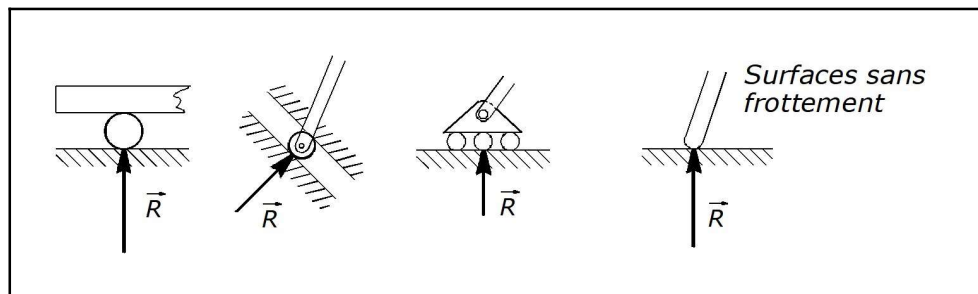


fig. 2.41. - Exemples d'appuis mobiles.

Le seul et unique déplacement qu'un tel appui empêche est un déplacement suivant une direction perpendiculaire au plan des rouleaux, tant vers le haut que vers le bas.

La réaction \vec{R} est donc perpendiculaire au plan des rouleaux et s'applique à la structure au point où celle-ci s'appuie sur le sol. Son sens et son intensité ne seront déterminés que par le calcul (voir § ci-après). Cet appui permet la libre dilatation des ouvrages.

Cas particulier de la barre (bi)articulée non chargée :

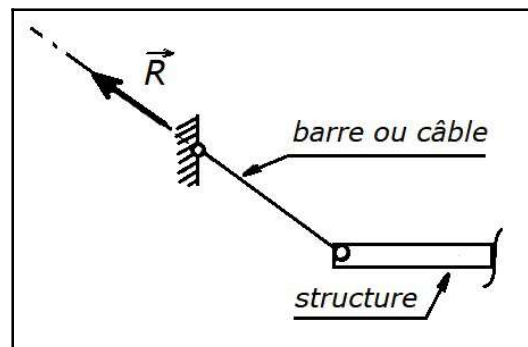


fig. 2.42. - Barre bi-articulée.

L'attache d'une structure au moyen d'une barre bi-articulée (non chargée) ou d'un câble est un appui également du type "appui simple". La réaction \vec{R} s'exerce sur la structure dans l'axe des 2 articulations ou du câble.

B) Articulation (appui fixe)

Degré de liberté : un (rotation).

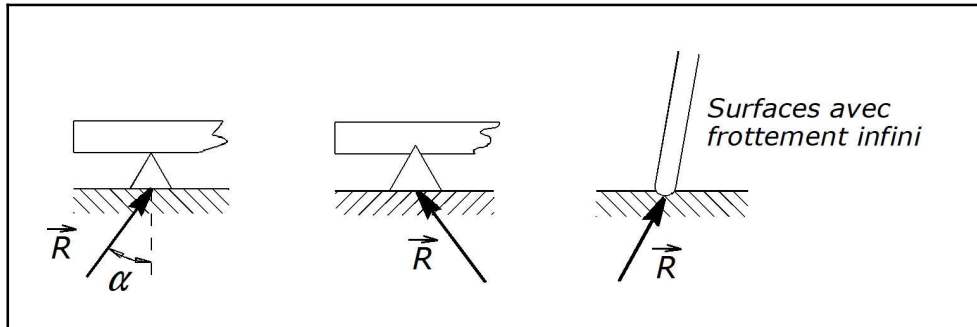


fig. 2.43. - Exemples d'appuis fixes.

Le seul et unique mouvement qu'un tel appui autorise est un mouvement de rotation de la structure autour de l'articulation. La seule chose que l'on sait a priori de la réaction \vec{R} est que sa ligne d'action passe par l'articulation. Sa direction, son sens et son intensité ne seront déterminés que par le calcul (voir § 2.14.2. ci-après). Cet appui permet d'attacher la structure au sol mieux que ne le fait l'appui simple.

Afin de faciliter l'établissement des équations d'équilibre, on remplace presque toujours \vec{R} par ses composantes R_x et R_y suivant 2 axes xy perpendiculaires entre eux. Leurs ligne d'action passent par l'articulation et ont une direction connue. Il restera, par le calcul, à déterminer leur sens et leur intensité.

C) Encastrement

Degré de liberté : aucun.

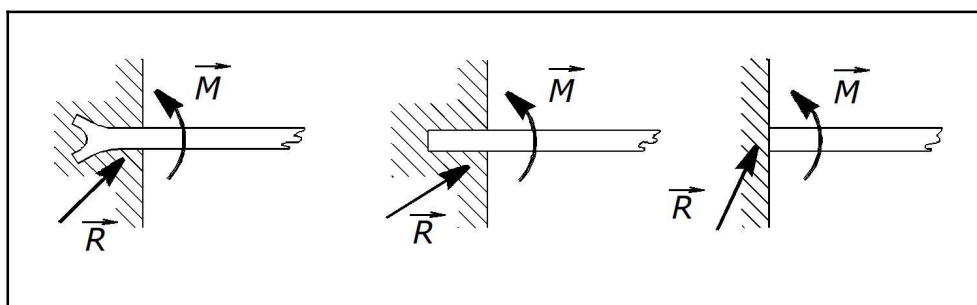


fig. 2.44. - Encastements.

Un tel appui n'autorise aucun mouvement de la structure. Il suffirait à lui seul à attacher la structure à la fondation (par exemple la poutre-console).

Les efforts que la fondation exerce en réaction sur la structure, au travers de cet appui, sont de 2 types :

- une force \vec{R} , comme dans le cas de l'articulation, dont la ligne d'action passe par le centre de

l'encastrement et qui, ici aussi, sera presque toujours remplacée par ses 2 composantes R_x et R_y ;

- ▶ un couple de force dont le moment \vec{M} appelé “moment d'encastrement”.

Le sens et l'intensité de R_x et R_y seront déterminés par le calcul (voir § 2.14.2.) ci-après).

Remarque importante :

Les 3 types d'appuis vus ci-avant sont en fait des fictions de la Résistance des Matériaux, “modélisés” dans le but de simplifier la résolution des problèmes concrets; en raison des imperfections, des frottements, des “jeux” ... , un appui réel n'est jamais parfaitement à rouleau, ni une articulation parfaite, ni un encastrement parfait. La réalité résulte souvent d'un mélange entre les 3 configurations vues. Ainsi par exemple, dans un appui supposé articulé, pourrait naître un petit moment d'encastrement à cause d'un léger blocage de l'appui, moment pour lequel la structure n'est pas calculée. Maintes occasions nous permettront dans la suite d'apprécier la pertinence de cette remarque. mais malgré cela, nous nous en tiendrons, sauf indication contraire, aux 3 types d'appuis classiques comme cela se fait couramment, dans un but de simplification. L'essentiel, à ce stade, est de rester attentif à la présente remarque.

2.15.2. Types de charges

Il convient de définir les notions de charge uniformément répartie ainsi que celle de charge ponctuelle.

A) Charges concentrées (ponctuelles)

Les charges ponctuelles sont celles qui sont ramassées sur une très petite surface :

- ▶ tel une poutre s'appuyant sur une autre poutre qui lui est perpendiculaire (contact entre une solive et la poutre principale d'un plancher);
- ▶ une colonne reposant sur une poutre;
- ▶ une charge pendue (cas d'un palan) fixe ou roulante;
- ▶ l'attache d'un câble à une structure; ...

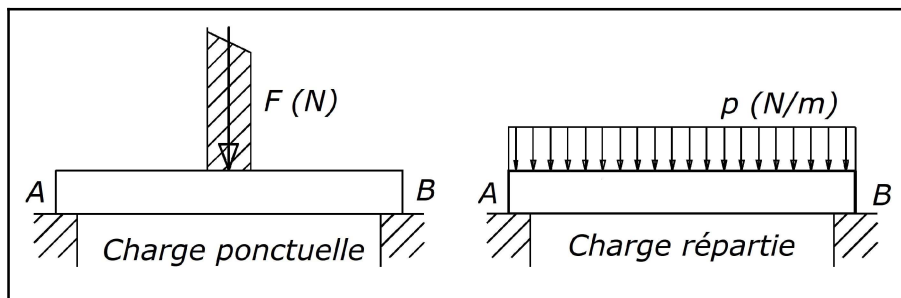


fig. 2.45. - Charge ponctuelle (à gauche) - charge répartie (à droite).

B) Charges réparties

Mais lorsque le contact entre la cause de la charge et la structure directement porteuse de cette charge ne peut plus être considéré comme ponctuel, on a affaire à une “charge répartie” qui s'exprime :

- ▶ soit en N/m^2 quand la structure porteuse est un élément plan, par exemple la neige sur un toit, la foule sur un plancher, le vent sur un bardage;
- ▶ soit en N/m (newton par mètre (courant)) quand la structure porteuse est un élément “long”

comme c'est le cas d'une poutre.

Un mur élevé sur la longueur d'une poutre ou une matière répartie sur la surface d'un plancher sont des *charges réparties*. Elles sont dites *uniformément réparties* quand elles ont une valeur constante sur toute la longueur de la poutre ou sur toute la surface du plancher.

Le cas le plus courant d'une charge uniformément répartie exprimée en N/m est le poids propre d'une poutre : ainsi par exemple, pour le profilé HE 100 A, dont la masse par mètre vaut 16.7 kg/m , chaque mètre de cette poutre est soumis à une charge de 167 N (avec $g \approx 10 \text{ m/s}^2$) uniformément répartie sur ce mètre.

Plus généralement, une charge uniformément répartie de $p \text{ N/m}$ se représente sur les schémas comme ci-contre; p est sensé représenter toutes les charges uniformément réparties agissant sur la poutre, c'est-à-dire le poids propre et les autres charges. Physiquement parlant, cela signifie que chaque mètre de poutre, compté dans le sens de sa longueur, "encaisse" une charge de p newtons.

Suivant la position sur la poutre du point d'application d'une charge concentrée, la déformation et les efforts internes que la poutre subit varient beaucoup. Il en est de même, si à égalité de poids total, la charge est concentrée au lieu d'être répartie.

Conclusions :

- ▶ Une poutre peut être capable de supporter une charge répartie de valeur donnée et peut ne pas pouvoir supporter la même charge appliquée localement.
- ▶ Une charge concentrée locale peut agir très différemment sur une poutre suivant l'emplacement de son point d'application. A ce point de vue il y a toujours intérêt à reporter la charge aussi près que possible des appuis.

2.15.3. Calcul des réactions d'appui

Nous avons vu que les réactions d'appui sont a priori inconnues en intensité et en sens. *Avant* toute étude de la structure, il nous faut lever cette indétermination.

Chaque type d'appuis introduit un certain nombre d'*inconnues* (avec leur signe) :

- ▶ l'appui simple, une seule inconnue, R ;
- ▶ l'articulation, 2 inconnues, R_x et R_y ;
- ▶ l'encastrement, 3 inconnues, R_x , R_y et M_p .

Le principe de résolution est assez simple; nous l'illustrerons sur la base de quatre exemples.

A) Premier exemple : poutre sur 2 appuis avec charge ponctuelle

Soit une structure élémentaire, la poutre sur 2 appuis d'extrémité, chargée d'une force concentrée verticale.

Données : a , b et P .

On commence par détacher la poutre de ses fondations et on remplace les appuis par les réactions correspondantes, c'est-à-dire les forces que le sol exerce, en réaction aux actions (ici P), sur la poutre, et cela selon les principes vus au paragraphe précédent; on obtient le schéma du corps rendu libre qui résume toutes les sollicitations qui s'exercent sur la structure, en provenance du monde extérieur à elle.

Ces sollicitations sont les actions P et les réactions en A et B. Le problème présente 3 *inconnues* : R_A , R_{Bx} et R_{By} . On suppose que ces 3 forces agissent sur la poutre comme indiqué sur le dessin (sens).

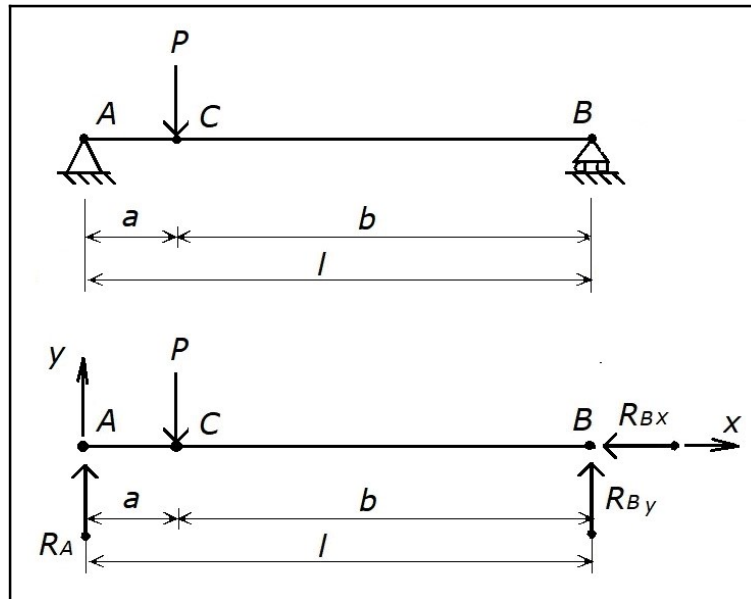


fig. 2.46. - Poutre sur 2 appuis et charge ponctuelle.

On applique ensuite au schéma du corps rendu libre les 3 équations d'équilibre :

► **1^{ère} équation :**

$\sum f_{ix} = 0$: la somme algébrique des projections *horizontales* de toutes les forces est nulle.
D'où : $-R_{bx} = 0$

Remarques :

- 1) Il en est presque toujours ainsi quand toutes les actions sont verticales;
- 2) Le signe - devant R_{Bx} car il agit dans le sens contraire de notre repère Oxy;

► **2^{ème} équation :**

$\sum f_{iy} = 0$: la somme algébrique des projections *verticales* de toutes les forces est nulle.
D'où : $R_A - P + R_{By} = 0$

Remarque :

Le signe - devant P car il agit dans le sens contraire de notre repère Oxy.

► **3^{ème} équation :**

$\sum m_P(f_i) = 0$: la somme algébrique des moments par rapport à un point P quelconque, de toutes les forces est nulle.

Convention de signe (arbitraire) : celui du *trièdre direct* et donc le moment d'une force par rapport à un point est *positif* quand cette force tend à tourner autour de point dans le *sens anti-*

horlogique.

Choix du point : le plus souvent un point sur la ligne d'action d'une réaction inconnue, dont le moment sera alors nul; dans ce cas, on choisit le point B.

$$\text{D'où : } -R_A (a + b) + P b = 0$$

Remarque :

Le signe - devant R_A car elle la réaction R_A tend à faire "tourner" la poutre autour de B dans le sens horlogique.

► **Solution** :

Les 3 équations ainsi établies permettent de déterminer les 3 inconnues. Soit :

$$R_A = \frac{b}{a + b} P$$

$$R_{B_y} = \frac{a}{a + b} P \quad \text{et} \quad R_{B_x} = 0$$

Remarque importante :

Les valeurs ainsi obtenues pour R_A et R_{B_y} sont **positives**. Cela signifie que les réactions R_A et R_{B_y} agissent bien dans le sens **supposé au départ** sur le schéma du corps rendu libre. Si l'on avait trouvé, pour R_A par exemple, une valeur négative, cela aurait signifié que R_A agissait de **sens contraire au sens présumé au départ**.

Il est toujours licite -et souvent commode- de remplacer l'une et/ou l'autre des équations d'équilibre $\sum f_{ix} = 0$ et/ou $\sum f_{iy} = 0$ par une équation du type $\sum m_P(f_i) = 0$ où le point choisi est un point différent de celui choisi pour la 3^{ème} équation d'équilibre. Ainsi dans notre exemple, $\sum f_{iy} = 0$ aurait pu être avantageusement remplacée par $\sum m_A(f_i) = 0$ où A est le point choisi. Cela donne :

$$- P a + R_{B_y} (a + b) = 0$$

d'où l'on tire directement l'inconnue R_{B_y} .

D'ailleurs, en toute généralité, le système d'équations $\sum f_{ix} = 0$, $\sum f_{iy} = 0$ et $\sum m_P(f_i) = 0$ peut être remplacé par un autre système de 3 équations, également d'équilibre :

$$\sum m_A(f_i) = 0, \sum m_B(f_i) = 0 \quad \text{et} \quad \sum m_C(f_i) = 0$$

où les points A, B et C, par rapport auxquels les moments sont calculés, sont 3 points du plan, non-situés sur une même-droite.

Une structure pour laquelle les 3 seules équations d'équilibre suffisent à la détermination des réactions d'appui est appelée "*structure (extérieurement) isostatique*". Quand tel n'est pas le cas, c'est-à-dire si le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations, la structure est dite "*(extérieurement) hyperstatique*".

Trois exemples de telles structures sont donnés ci-contre. Ils feront l'objet d'un chapitre spécial

dans la suite de cours.

Mais l'étudiant s'appliquera d'ores et déjà à en démontrer le caractère hyperstatique.

B) Deuxième exemple : 3 forces concourantes

Soit la grue d'applique, sollicitée par la force P et appuyée en A, B et C au moyen de 3 appuis à roulement.

Données : a , b et P .

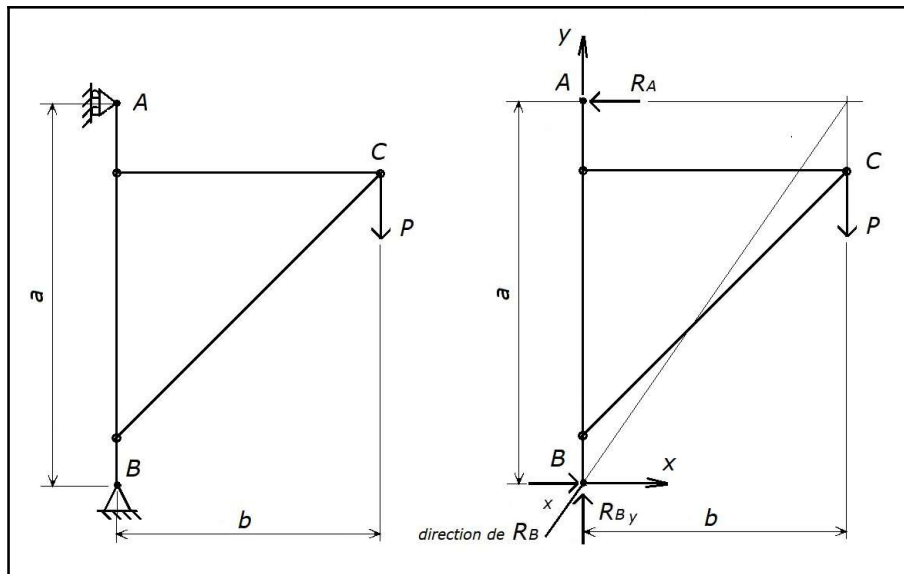


fig. 2.47. - 3 forces concourantes - forces dans le plan.

Le dessin ci-dessus (partie droite) est le schéma du corps rendu libre.

Le monde extérieur à la grue exerce sur celle-ci les 3 réactions inconnues R_A , R_B et R_C qui sont perpendiculaires aux surfaces d'appui et qui sont supposées, assez logiquement, agir dans le sens indiqué.

Ecrivons les 3 équations d'équilibre :

$$\begin{aligned} \sum f_{ix} = 0 &\Rightarrow R_B - R_A = 0 \\ \sum f_{iy} = 0 &\Rightarrow R_C - P = 0 \\ \sum m_A(f_i) = 0 &\Rightarrow -Pb + R_B a = 0 \end{aligned}$$

Soit :

$$R_A = R_B = \frac{b}{a} P \quad \text{et} \quad R_C = P$$

Les 3 réactions inconnues sont à présent déterminées en intensité et leur sens est celui indiqué sur le schéma car les valeurs obtenue sont positives.

C) Troisième exemple : poutre avec charge répartie

Dans le calcul des réactions d'appui, et *seulement dans ce cas-là*, il est toujours licite -et conseillé- de remplacer la charge uniformément répartie par sa résultante, dont la ligne d'action se situe au milieu de la zone où agit la charge uniformément répartie. Ainsi, dans le schéma ci-dessous, la charge p uniformément répartie sur une longueur a de la poutre peut-elle être remplacée par une charge concentrée d'intensité ap agissant comme indiqué.

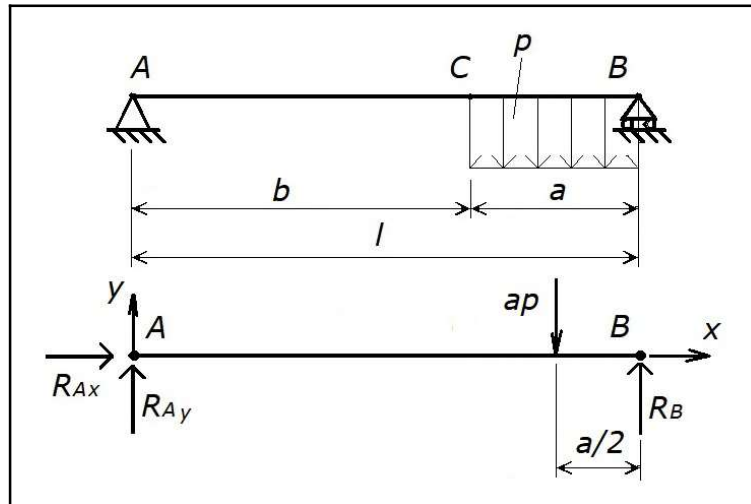


fig. 2.48. - Poutre avec charge répartie.

Ecrivons les 3 équations d'équilibre :

$$\begin{aligned} \sum f_{ix} &= 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0 \\ \sum f_{iy} &= 0 \Rightarrow R_{Ay} - (ap) + R_B = 0 \\ \sum m_A(f_i) &= 0 \Rightarrow -(ap)(b + a/2) + R_B(a + b) = 0 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} R_{Ay} &= (ap) \left(1 - \frac{a/2 + b}{(a + b)} \right) \\ R_B &= (ap) \left(\frac{a/2 + b}{(a + b)} \right) \end{aligned}$$

Les 3 réactions inconnues sont à présent déterminées en intensité et leur sens est celui indiqué sur le schéma car les valeurs obtenues sont positives.

D) Quatrième exemple : poutre console

Soit une poutre-console, encadrée en A, soumise à une charge concentrée P de direction quelconque (angle α) et d'une charge uniformément répartie p agissant sur une partie a de la portée l de la poutre.

Données : a, l, α, P et p .

En fonction de tout ce qui précède, on peut dresser le schéma du corps rendu libre.

Les 3 réactions inconnues R_{Ax} , R_{Ay} et M_A supposées agir comme indiqué sur le schéma du corps rendu libre, seront déterminées par les 3 équations d'équilibre :

$$\begin{aligned}\sum f_{ix} = 0 &\Rightarrow R_{Ax} + P \cos \alpha = 0 \\ &\Rightarrow R_{Ax} = - P \cos \alpha\end{aligned}$$

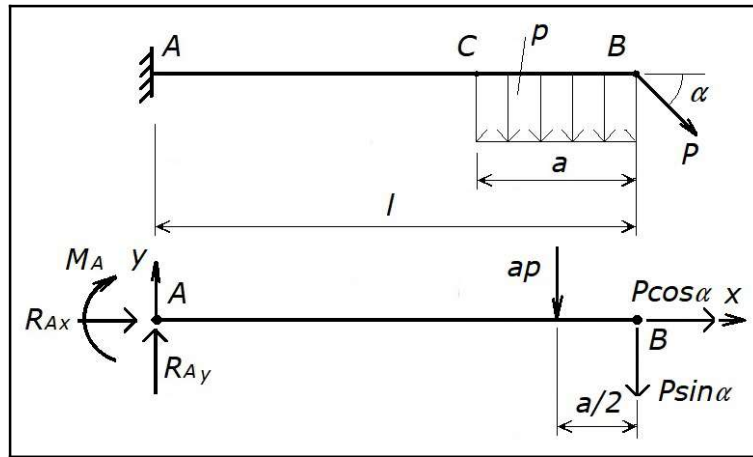


fig. 2.49. - Poutre console ou cantilever.

Donc R_{Ax} est négatif, c'est-à-dire qu'elle agit dans le *sens inverse* de celui indiqué (ce qui est tout à fait logique).

$$\begin{aligned}\sum f_{iy} = 0 &\Rightarrow R_{Ay} - a p - P \sin \alpha = 0 \\ &\Rightarrow R_{Ay} = a p + P \sin \alpha \\ \sum m_A(f_i) = 0 &\Rightarrow - M_A - a p \left(l - \frac{a}{2} \right) - P \sin \alpha l = 0 \\ &\Rightarrow M_A = - a p \left(l - \frac{a}{2} \right) + P \sin \alpha l\end{aligned}$$

Donc le moment d'encastrement M_A est de sens contraire au sens indiqué initialement (ce qui est tout à fait logique). (*Ne jamais perdre le sens physique des phénomènes*).

2.16. Principe de superposition

Nous avons vu que les charges constituant les actions sur les structures étaient les causes d'un certain nombre d'effets : les réactions d'appui, les contraintes au sein de la matière et les déformations de la structure. La Résistance des Matériaux a pour mission, entre autres, de calculer ces effets.

Dans la mesure où :

- ▶ le matériau obéit à la loi de Hooke ($\sigma = \varepsilon E$), comme c'est le cas notamment de l'acier,
- ▶ la limite d'élasticité n'est dépassée en aucun point de la structure, ce qui est toujours le cas si l'on impose que les contraintes soient inférieures à la contrainte admissible,
- ▶ la structure ne se déforme que faiblement sous l'action des forces extérieures, ce qui est toujours le cas dans la pratique courante envisagée ici,

alors on constate que :

L'effet global produit par plusieurs forces agissant simultanément est égal à la somme des effets produits par chacune des forces supposée agissant séparément.

C'est le *principe de superposition des effets des forces*.

Ce principe est très puissant et nous sera de la plus grande utilité à travers tout le cours. On en mesurera tout l'intérêt dans l'exemple suivant :

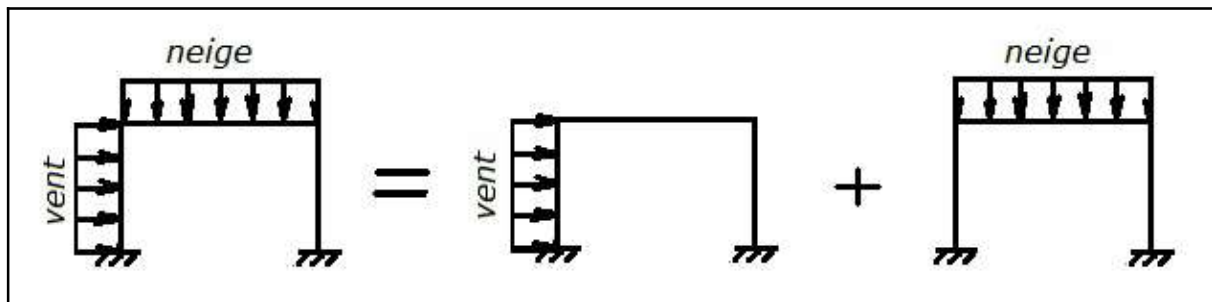


fig. 2.50. - Principe de la superposition des forces.

On étudiera séparément les effets du vent et de la neige sur le portique ci-dessus et on additionnera ces effets.

Un autre exemple nous est donné par la flexion composée :

flexion composée = flexion + traction (ou compression).

Nous aurons maintes fois l'occasion d'illustrer et surtout de nous servir de ce principe qui permet de "décortiquer" un problème complexe en petits problèmes simples, faciles à traiter séparément.

Le principe d'indépendance des effets des forces est un principe directeur dans la résolution de la plupart des problèmes en résistance des matériaux.

Précisons que ce principe *n'est pas applicable au cas du flambement des pièces comprimées*.