

CHAPITRE 3. TRACTION - COMPRESSION	- 3.1 -
3.1. Introduction : Traction (compression) pure	- 3.1 -
3.2. Formules de calculs	- 3.2 -
3.2.1. Etudes des contraintes	- 3.2 -
3.2.1. Etudes des allongements	- 3.3 -
3.3. Effet de la température (dilatation et contraintes)	- 3.6 -
3.3.1. Notion de coefficient de dilatation linéaire	- 3.6 -
3.3.2. Effort et contrainte de bridage	- 3.7 -
3.3.3. Déformation d'un anneau mince	- 3.10 -
3.4. Contrainte sous son poids propre	- 3.12 -
3.5. Traction (compression) dans une pièce formée de deux matériaux différents	- 3.13 -
3.6. Dimensionnement des boulons	- 3.16 -
3.6.1. Introduction	- 3.16 -
3.6.2. Boulons soumis à traction	- 3.16 -
A) Dimensionnement statique	- 3.16 -
B) Dimensionnement dynamique	- 3.18 -
C) Dimensionnement pratique	- 3.19 -
D) Notes sur le calcul des raideurs	- 3.19 -
E) Notes sur la valeur de la force de précontrainte	- 3.20 -
3.6.3. Calcul d'un assemblage avec boulons haute résistance (HR)	- 3.23 -
3.7. Le matage	- 3.24 -
3.8. Enveloppe mince	- 3.25 -
3.8.1. Introduction	- 3.25 -
3.8.2. Calcul des enveloppes minces de révolution	- 3.26 -
3.8.3. Etude de la déformation	- 3.28 -
3.9. Câble	- 3.30 -
3.10. Socle - Assise sur mur	- 3.35 -
3.10.1. Socle	- 3.35 -
3.10.2. Assises sur mur	- 3.38 -
3.11. Descente de charges	- 3.39 -
3.12. Notions sur les systèmes triangulés	- 3.40 -
3.12.1. Définitions	- 3.40 -
3.12.2. Méthode de calcul des systèmes triangulés	- 3.41 -
A) Equilibre d'une barre	- 3.41 -
B) Equilibre d'un noeud	- 3.42 -
3.12.3. Méthode des noeuds de Crémona (treillis simples)	- 3.42 -
3.12.4. Cas particuliers	- 3.44 -
3.12.5. Méthode des coupures ou méthode de Ritter (treillis simples)	- 3.45 -
3.13. Dimensionnement des barres suivant l'EUROCODE	- 3.48 -
3.13.1. Introduction	- 3.48 -
3.13.2. Vérifications aux ELU	- 3.48 -
A) Détermination de l'aire de la section nette	- 3.48 -
B) Vérifications	- 3.49 -
3.14. Effet de la force centrifuge sur les solides en rotation	- 3.53 -
3.14.1. Solide de section constante en rotation uniforme	- 3.53 -
3.14.2. Disque d'épaisseur constante en rotation uniforme	- 3.54 -
3.14.3. Anneau mince en rotation uniforme	- 3.56 -

CHAPITRE 3. TRACTION - COMPRESSION

3.1. Introduction : Traction (compression) pure

Définition : la **traction ou la compression pure** est un état de charge tel que dans toute section droite d'une pièce il n'existe qu'un **effort normal N** appliqué au centre de gravité.

On sait par l'introduction à ce cours que :

- ▶ la traction est la sollicitation la plus simple qui soit;
- ▶ l'essai de traction d'une pièce prismatique en constitue l'application la plus élémentaire et la plus instructive;
- ▶ L'état de contrainte se réduit donc en la seule composante normale σ . La distribution des contraintes est uniforme dans la section. *Si la barre tend à s'allonger (à se raccourcir), l'effort normal est appelé traction (compression).*

L'archétype de la pièce tendue est le câble ou le tirant. On rencontre également des pièces tendues dans certaines des membrures d'une poutre ou d'un pont "en treillis".

Attention le présent paragraphe ne traite que de la traction (compression) pure, c'est-à-dire lorsque les forces extérieures de traction agissent *dans l'axe* de la pièce tendue. Tout ce qu'il sera dit dans ce paragraphe est valable aussi bien pour la traction que pour la compression.

Cependant il existe une différence fondamentale entre les sollicitations de traction et de compression sera le ***danger de flambement*** qui menace en principe la stabilité de toute pièce comprimée et auquel sera consacré un chapitre entier (***Chapitre 8.***).

Cependant, sans rentrer dans tous les détails, on peut utiliser les différentes formules de la traction pour la compression si l'élanement réduit est inférieur ou égal à 0.2 : $\bar{\lambda} \leq 0.2$ (voir définition au ***Chapitre 8.***). Cela correspond approximativement, pour une section rectangulaire, de section $a \times b$ avec $b < a$, à une longueur de poutre (colonne) $L < 8b$ et pour une section circulaire de diamètre d à $L < 8d$.

3.2. Formules de calculs

3.2.1. Etudes des contraintes

En application des principes fondamentaux, faisons une fois pour toutes le raisonnement suivant : la partie G "tient" à la partie D grâce aux contraintes σ dans la section A, contraintes dont la résultante vaut σA ; l'équilibre de translation horizontale de G pris isolément (schéma du corps rendu libre !) implique que :

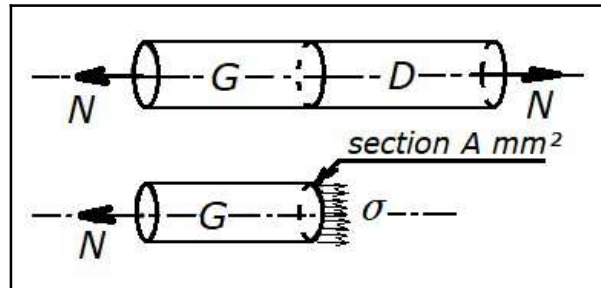


fig.3.1. - Contraintes.

$$N = \text{résultante des forces} : N = \sigma A$$

D'où :

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (\text{éq. 3.8.})$$

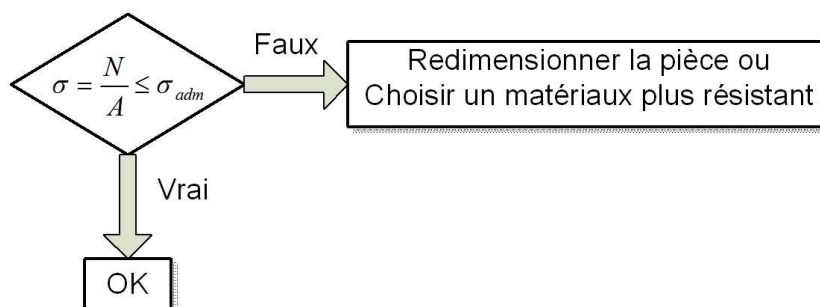
et pour rester conforme aux règlements et normes, il faudra s'arranger pour que la contrainte réelle σ provoquée par l'effort N demeure inférieure ou égale à la contrainte admissible σ_{adm} , d'où la relation fondamentale, qui constitue la condition de résistance :

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{adm} \quad (\text{éq. 3.9.}) \quad \sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{adm}$$

<u>Notations</u> :	N	effort extérieur de traction sollicitant la pièce	N
	A	aire de la section droite de la pièce	mm^2
	σ	contrainte réelle de traction en tout point de la section A	N/mm^2
	σ_{adm}	contrainte admissible du matériau constituant la pièce	N/mm^2

De cette relation, on tire les *formules utiles de calcul* :

- **problème de vérification** : consiste à vérifier si une pièce tendue par N , de section A connue et en matériau de contrainte admissible σ_{adm} est bien dimensionnée; il faut effectuer le test :



- ▶ **problème de dimensionnement** : problème de dimensionnement consiste à donner à la pièce une section A telle qu'elle puisse résister à un effort N compte tenu de sa contrainte admissible σ_{adm} ; la section A est donnée par :

$$A \geq \frac{N}{\sigma_{adm}} \quad (\text{éq. 3.11.})$$

C'est-à-dire que la section A doit être au moins égale à N/A ("qui peut le plus peut le moins !")

- ▶ **recherche de la capacité portante** : consiste à rechercher l'effort N_{max} qu'une pièce de section A en matériau de contrainte admissible σ_{adm} peut reprendre au maximum; la valeur recherchée est donnée par :

$$N_{max} = A \sigma_{adm} \quad (\text{éq. 3.13.})$$

Par application d'un principe que nous évoquerons souvent et qui dit qu'une pièce a des performances maximales lorsque les contraintes y ont atteint la limite permise (σ_{adm}).

3.2.1. Etudes des allongements

Sachant que : $\sigma = \frac{N}{A_0}$ et que : $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ et si nous remplaçons ces deux valeurs dans la loi de Hooke ($\sigma = \varepsilon E$), nous obtenons :

$$\Delta l = \frac{N l_0}{E A_0} \quad (\text{éq. 3.17.}) \quad mm$$

<u>Notations</u> :	l_0	la longueur initiale de la barre	mm
	A_0	la surface de la section droite	mm^2
	E	module d'élasticité longitudinale ou module de Young	N/mm^2
	$E A_0$	rigidité de la section transversale en traction	N

Cette relation, comme la loi de Hooke, n'est valable que dans la zone d'élasticité linéaire.

Par convention :
allongements relatifs et contraintes de traction : positifs
raccourcissements relatifs et contraintes de compression : négatifs

Cette relation qui nous apprend que :

- ▶ l'allongement varie dans le même sens que l'effort N et la longueur initiale l_0 (on s'en serait douté !),
- ▶ l'allongement est d'autant plus petit que la pièce a une grosse section, toutes autres choses étant égales (on le comprend aisément !),
- ▶ l'allongement est d'autant plus petit que le matériau de la pièce a un module d'élasticité E

(rigidité) élevé, toutes autres choses étant égale,

Cette dernière réflexion signifie en pratique que par exemple une pièce en acier s'allongera beaucoup moins (environ 3 fois moins) que la même pièce réalisée en aluminium et soumise au même effort de traction. Pour s'en rendre compte, il suffit de comparer E_{acier} et E_{alu} . Cela explique en partie que l'acier est davantage un matériau de structure que l'aluminium, outre le prix.

Dans certains problèmes, on demandera de vérifier si l'allongement réel Δl de la pièce ne dépasse pas un allongement admissible fixé par le "client". S'il y a dépassement, on augmentera la section A jusqu'à ce que Δl redescende dans les limites acceptables. La dernière formule encadrée ci-avant permet d'effectuer cette opération.

Remarque :

On remarque que toute section droite reste après déformation si la longueur de la barre est infinie. Dans le cas d'une pièce de longueur finie, la loi de conservation des sections droites reste pratiquement valable tant que l'on fait abstraction des zones voisines du point d'application de la charge.

Expérimentalement, cette loi est confirmée par le fait que l'allongement (ou le raccourcissement) d'une barre est uniformément réparti tant que l'effort n'est pas trop élevé.

Et d'après la loi de Hooke il existe une relation linéaire entre la déformation et la contrainte, si l'allongement (ou le raccourcissement) d'une barre est uniformément réparti, il en sera de même pour les contraintes.

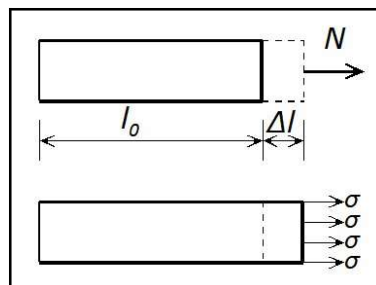


fig.3.3. - Répartition des contraintes de traction.

Application 3.1. Une barre d'acier de 10 mm de diamètre reçoit une force de traction de 12560 N. Quelle sera l'allongement de la barre sur 5 mètres si $E = 210000 \text{ N/mm}^2$. Quelle sera alors la contrainte dans cette barre ?

Solution :

Recherche de la section de la barre :

$$A_0 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 10^2}{4} = 78.54 \text{ mm}^2$$

L'allongement de la barre :

$$\Delta l = \frac{N l_0}{E A_0} = \frac{12\,560 \times 5\,000}{210\,000 \times 78.54} = 3.8 \text{ mm}$$

La contrainte sera égale à :

$$\sigma = \frac{N}{A_0} = \frac{12\,560}{78.54} = 159.9 \text{ N/mm}^2 \approx 160 \text{ N/mm}^2$$

Application 3.2. Un barreau prismatique de section $A_0 = 6 \text{ cm}^2$ et de longueur $l_0 = 4 \text{ m}$, est soumis à une traction axiale de 123 kN . L'allongement total mesuré est de 4 mm . Trouver le module d'élasticité du matériau.

Solution :

Module d'élasticité

Nous le déterminerons au moyen de l'équation de l'allongement :

$$\Delta l = \frac{N l_0}{E A_0} \Rightarrow E = \frac{N l_0}{\Delta l A_0} = \frac{123\,000 \times 4\,000}{4 \times 600} = 205\,000 \text{ N/mm}^2 \quad \text{C'est un acier.}$$

3.3. Effet de la température (dilatation et contraintes)

3.3.1. Notion de coefficient de dilatation linéaire

Définition : le coefficient de dilatation thermique linéaire α d'un matériau est l'allongement (le raccourcissement) que subit l'unité de longueur de ce matériau soumis à une élévation (diminution) de température de 1 °C.
Unité de α : °C⁻¹ (ou K⁻¹)

Ainsi, dire que l'acier a un $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$ signifie qu'une barre de 1 m de longueur échauffée de 1°C s'allonge de $12 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, soit 12 μm .

Quant est-il à présent barre de longueur $l_0 \neq 1 \text{ m}$ soumise à une différence de température :

$$\Delta T = T - T_0 \neq 1 \text{ °C}$$

Notations :

T	température finale	°C
T_0	température initiale	°C

En "proportionnalisant" la définition de α on obtient la variation de longueur Δl due à une variation de température :

$$\boxed{(\Delta l)_T = \alpha \Delta T l_0} \text{ (éq. 3.25.)}$$

Notations :

α	coefficient de dilatation thermique linéaire du matériau	°C ⁻¹
l_0	longueur initiale du barreau	m

On remarquera que Δl et ΔT ont le même signe du fait de cette égalité. Donc :

- ▶ si échauffement $T > T_0$ $\Delta T > 0$ $\Delta l > 0$ allongement;
- ▶ si refroidissement $T < T_0$ $\Delta T < 0$ $\Delta l < 0$ raccourcissement.

La longueur après dilatation thermique l_T s'écrit : $l_T = l_0 + (\Delta l)_T = l_0 + \alpha \Delta T l_0$

$$\boxed{l_T = l_0 (1 + \alpha \Delta T)} \text{ (éq. 3.33.)}$$

Application 3.3. A 15°C une tige de cuivre mesure 2.5 m de long. Trouver l'allongement quand elle est chauffée à 35 °C. Le coefficient de dilatation linéaire du cuivre utilisé est égal à $17 \cdot 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$.

Solution :

Formule de l'allongement due à une différence de température

$$(\Delta l)_T = \alpha \Delta T l_0 = 17 \cdot 10^{-6} \times (35 - 15) \times 2.5 = 0.00085 \text{ m} = 0.85 \text{ mm}$$

3.3.2. Effort et contrainte de bridage

Dans le cas qui nous occupe, “*brider*” une pièce signifie empêcher toute modification de longueur de cette pièce, en l’attachant solidement à un environnement fixe. On comprend dès lors que si l’on modifie la température d’une pièce bridée, du fait de la tendance de celle-ci de modifier sa propre longueur, vont naître au sein de la matière des efforts, et donc des contraintes, dites “*de bridage*”.

Que valent ces efforts et ces contraintes, et quel est leur sens ?

Pour répondre à cette double interrogation, on va raisonner sur le cas suivant : soit une barre de longueur l et de section A , réalisée dans un matériau caractérisé par α et E ; cette barre est solidement ancrée dans 2 murs distants de l et infiniment rigides; l est donc invariable; on chauffe cette barre de manière à ce que sa température passe de T_0 à T °C avec $T > T_0$.

Dans ces conditions, la barre a tendance à s’allonger et à écarter les murs l’un de l’autre, mais le bridage l’en empêche. La barre sera donc le siège d’un *effort de compression* N_{comp} et de *contraintes de compression* σ_{comp} , tous deux “*de bridage*”.

- ▶ Effet de ΔT sans bridage :

$$(\Delta l)_T = \alpha \Delta T l > 0 \quad (\text{allongement})$$

- ▶ Effet du bridage :

l’effort de bridage N_{comp} , étant un effort de compression, va raccourcir la pièce d’une longueur :

$$(\Delta l)_\sigma = \frac{N_{comp} l}{A E} < 0 \quad (\text{raccourcissement})$$

Bilan :

$$(\Delta l)_T + (\Delta l)_\sigma = 0$$

Par application du principe de superposition, car la barre n’a pas changé de longueur au cours de l’opération, le raccourcissement $(\Delta l)_T$ étant compensé par l’allongement $(\Delta l)_\sigma$.

Cette dernière égalité peut aussi s’écrire :

$$(\alpha \Delta T l) + \left(\frac{-N_{comp} l}{A E} \right) = 0$$

d’où l’on tire l’expression la plus générale de l’effort de bridage $N_{bridage}$:

$$\boxed{N_{bridage} = -\alpha \Delta T A E} \quad (\text{éq. 3.42.})$$

On remarquera :

- ▶ si échauffement $T > T_0$ $N_{bridage} < 0$ *compression*
- ▶ si refroidissement $T < T_0$ $N_{bridage} > 0$ *traction*

En divisant l’effort de bridage par la section A , on obtient la contrainte de bridage :

$$\boxed{\sigma_{bridage} = -\alpha \Delta T E} \quad (\text{éq. 3.47.})$$

avec les mêmes remarques que ci-dessus :

- ▶ si échauffement : les contraintes de bridage sont de *compression*
- ▶ si refroidissement : les contraintes de bridage sont de *traction*

Conclusion pratique importante :

Les contraintes de bridage se superposent aux contraintes de service provoquées par les charges d'exploitation et par les charges permanentes. Il se peut donc qu'en certains points de la structure, les contraintes totales dépassent la contrainte admissible (voire R_e ou R_m). Pensons par exemple au béton qui supporte très mal les contraintes de traction.

Ceci doit nous convaincre de la nécessité de joints de dilatation dans toute structure dès que les dimensions deviennent importantes.

Dans la résolution d'un grand nombre de problèmes, en même temps que des allongements dus à l'effort de traction (compression) N , on doit prendre en considération les allongements (raccourcissements) dus à la température.

Et ce cas on obtient :

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} - \alpha \Delta T E \quad (\text{éq. 3.48.})$$

Nous vérifierons le signe de chaque terme :

N/A	→	+	→ si <i>traction</i>
N/A	→	-	→ si <i>compression</i>
$-\alpha \Delta T E$	→	+	→ si <i>refroidissement</i> (traction)
$-\alpha \Delta T E$	→	-	→ si <i>échauffement</i> (compression)

Remarque :

Tout ce qui c'est dit sur les contraintes thermiques n'est valable que si E varie peu avec la température (*pour les aciers : valable jusque 300 ... 400 °C*).

★ **Tableau de différentes valeurs du coefficient de dilatation thermique α pour divers matériaux** (*Annexe 1 : Tableau 3.1. - Coefficients de dilatation linéaire.*)

Application 3.4. Quelle est la valeur du jeu minimum qu'il faut prévoir entre deux rails de chemin de fer, si le plus grand écart de température est de 50 °C ? La longueur d'un rail est de 12 m. Quelle sera la contrainte engendrée ?

Solution :

Coefficient de dilatation thermique de l'acier

Dans l'*annexe 1* on trouve pour l'acier :

$$\alpha_{\text{acier}} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Recherche de l'allongement

$$(\Delta l)_T = \alpha \Delta T l_0 = 12 \cdot 10^{-6} \times 50 \times 12\,000 = 7.2 \text{ mm}$$

Remarque :

Si la dilatation est libre : la contrainte est nulle !

Si la dilatation est empêchée : l'allongement est nul et la contrainte engendrée est égale à :

$$\sigma_{\text{bridage}} = -\alpha \Delta T E = -12 \cdot 10^{-6} \times 50 \times 210\,000 = -126 \text{ N/mm}^2$$

Contrainte de compression.

Une autre approche serait d'utiliser la loi de Hooke :

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{\Delta l}{l_0} E = \frac{7.2}{12\,000} \times 210\,000 = 126 \text{ N/mm}^2 \text{ (en compression)}$$

Application 3.5. Pour redresser les murs des édifices importants on peut disposer de barres intérieures selon la figure ci-contre, que l'on chauffe et qu'on laisse refroidir après avoir emprisonné leurs extrémités dans des ferrures d'appuis extérieures aux murs.

Soit une de ces barres en acier d'un diamètre de 40 mm et d'une longueur de 20 m, à laquelle on fait subir un écart de température de 200 °C. Si les murs sont inébranlables, calculer la contrainte de traction dans la barre ainsi que la force engendrée.

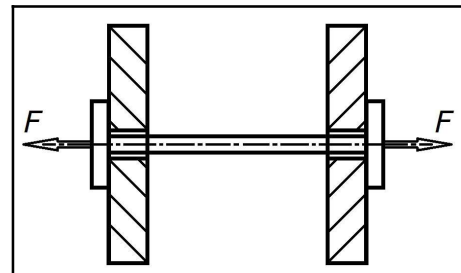


fig.3.4. - Application 3.5.

Solution :

Calcul de la contrainte de traction

Connaissant les caractéristiques de l'acier :

$$E = 210\,000 \text{ N/mm}^2 \quad \text{et} \quad \alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$$

appliquons la formule de la contrainte de bridage, soit, sachant que dans notre cas, pour la barre, on passe d'une température "haute" à une température "basse" :

$$\sigma_{\text{bridage}} = -\alpha \Delta T E = -12 \cdot 10^{-6} \times (-200) \times 210\,000 = 504 \text{ N/mm}^2$$

On remarquera qu'il faudra utiliser dans ce cas un acier dont la limite élastique est bien supérieure à cet valeur et donc pas une "simple" barre étirée du commerce !

Calcul de la force engendrée

Soit :

$$N = \sigma A = 504 \times \frac{\pi 40^2}{4} = 633\,345 \approx 633 \text{ kN}$$

Remarque

Nous voyons donc, par un exemple simple, que les variations de températures peuvent engendrer des contraintes et des efforts importants.

C'est ce qui explique les déformations (ou même les ruptures) des assemblages par soudure au cours de leur exécution surtout si ces assemblages constituent des ensembles non librement dilatables. C'est aussi ce qui explique les tensions internes des pièces de fonderie et des jeux de dilatation prévus dans les constructions ou entre les rails de chemins de fer. (Pour le TGV les rails sont soudés sans jeu de dilatation, sauf aux aiguillages, pour éviter les chocs.)

3.3.3. Déformation d'un anneau mince

{Réf. 4}

Cherchons l'augmentation du diamètre intérieur initial d_0 d'un anneau mince. La loi de Hooke nous donne :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Par ailleurs dans notre cas :

$$l_0 = \pi d_0 \Rightarrow \Delta l = \varepsilon l_0 = \varepsilon \pi d_0$$

La circonférence πd_0 devient : $\pi d_f = l_0 + \Delta l_0$

Et en remplaçant, on trouve :

$$\pi d_f = \pi d_0 + \varepsilon \pi d_0$$

$$\Rightarrow d_f = d_0 + \varepsilon d_0 \Rightarrow d_f = d_0 + \frac{\sigma}{E} d_0$$

$$\Rightarrow d_f = d_0 \left(1 + \frac{\sigma}{E} \right) \text{ (éq. 3.62.)}$$

Et donc :

$$\Delta d = d_0 \left(\frac{\sigma}{E} \right) \text{ (éq. 3.63.)}$$

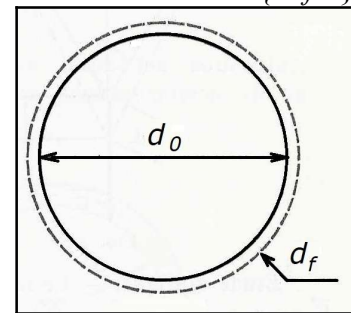


fig.3.5. - Anneau mince.

Application 3.6. Application au frettage. On veut bloquer par frettage une bague mince en acier sur un arbre de diamètre $d = 50 \text{ mm}$. On suppose l'arbre indéformable.

Déterminer :

- le diamètre d'alésage à froid de la bague. On donne la contrainte admissible de la bague égale à 200 N/mm^2 . On prendra le module d'élasticité de l'acier égal à 210000 N/mm^2 ;
- la température à laquelle il faut porter la bague avant montage, la température à l'usinage étant égal à $20 \text{ }^\circ\text{C}$. On admettra après chauffage un diamètre d'alésage de 50.05 mm . Le coefficient de dilatation linéaire de l'acier sera pris à $12 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

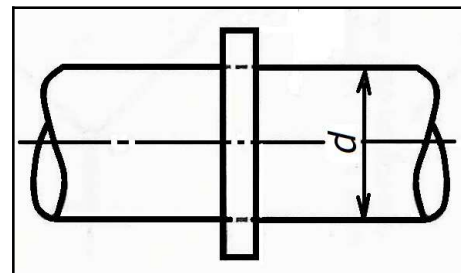


fig.3.6. - Application 3.6.

Solution :

a) Recherche du diamètre initial

Dans notre cas, le diamètre final est égal à 50 mm .

$$d_f = d_0 \left(1 + \frac{\sigma}{E} \right) \Rightarrow d_0 = \frac{d_f}{\left(1 + \frac{\sigma}{E} \right)} = \frac{50}{\left(1 + \frac{200}{210000} \right)} = 49.95 \text{ mm}$$

b) Recherche de la température

Nous avons comme données :

$$T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad d_{fT} = 50.05 \text{ mm}$$

Repartons de l'équation : $d_{fT} = d_0 (1 + \varepsilon)$ avec c'est fois-ci :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\alpha l_0 \Delta T}{l_0} = \alpha \Delta T$$

Et donc :

$$\begin{aligned} d_{fT} = d_0 (1 + \alpha \Delta T) &\Rightarrow \Delta T = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{d_{fT}}{d_0} - 1 \right) \\ &\Rightarrow \Delta T = \frac{1}{12 \cdot 10^{-6}} \left(\frac{50.05}{49.95} - 1 \right) = 166.8 \text{ } ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

La température finale devient :

$$T_f = T_0 + \Delta T = 20 + 166.8 = 186.8 \text{ } ^\circ\text{C}$$

3.4. Contrainte sous son poids propre

Soit un mur, d'épaisseur e constante et de hauteur h , reposant sur le sol. La contrainte à la base du mur, sous son seul poids propre, vaut :

$$\sigma = \frac{\text{poids du mur}}{\text{surface au sol}}$$

$$\begin{aligned} \text{poids du mur} &= m g \\ &= (\rho V) g \\ &= (\rho (h e l)) g \end{aligned}$$

$$\text{surface au sol} = e l$$

d'où :

$$\sigma = \frac{(\rho (h e l)) g}{e l} = \rho g h$$

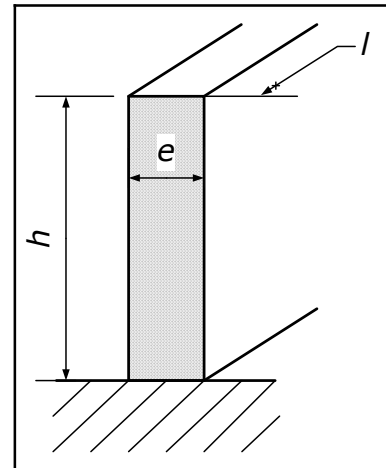


fig.3.7. - Pression sous le poids propre.

<u>Notations</u> :	m	masse du mur	kg
	ρ	masse volumique du mur	kg/m^3
	V	volume du mur	m^3
	l	longueur du mur	m
	g	accélération de la pesanteur	m/s^2

$$\boxed{\sigma = p_s = \rho g h} \text{ (éq. 3.75.)}$$

Cette contrainte à la base du mur correspond aussi à la pression du mur sur le sol.

Remarque importante :

Cette contrainte (pression) est *indépendante* de la longueur et de l'épaisseur du mur !

Cette contrainte (pression) devra évidemment être inférieure à la pression admissible du sol. Si ce n'est pas le cas, il faudra prévoir à intercaler des fondations entre le mur et le sol afin de répartir la pression du mur sur une plus grande surface.

Application 3.7. Calculer la hauteur h à laquelle peut être construit un mur de béton, en admettant une résistance à la compression du béton de 173 daN/cm^2 et un facteur de sécurité de 4. La masse volumique ρ du béton vaut 2200 kg/m^3 .

Solution :

Appliquons la formule **éq. 3.75.** :

$$\sigma = \rho g h \leq \sigma_{adm} = \frac{\sigma_{comp}}{S} \Rightarrow h \leq \frac{\sigma_{comp}}{\rho g S} = \frac{173010^4}{2200 \times 9.81 \times 4} = 200 \text{ m}$$

3.5. Traction (compression) dans une pièce formée de deux matériaux différents

Considérons, pour fixer les idées, une poutre constituée d'un profil en acier enrobée de béton comme représenté ci-contre.

Soit A_a et A_b les surfaces des sections droites respectivement de l'acier et du béton. De même, soit E_a et E_b leurs modules d'élasticité. On admettra que les contraintes dans le béton sont suffisamment faibles pour pouvoir le considérer comme élastique. La poutre étant soumise à un effort de traction N , il faut déterminer quelles sont les parts N_a et N_b de cet effort reprises par chacun des matériaux.

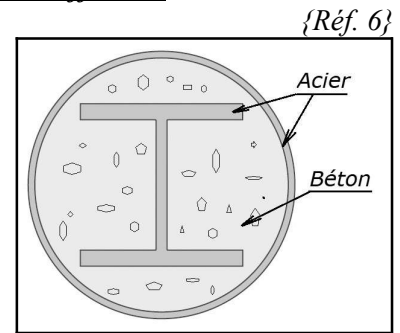


fig.3.8. - Colonne mixte : poutrelle insérée dans un tube rempli de béton.

On résout ce problème en exprimant que l'acier et le béton subissent la même déformation car l'adhérence de ces deux matériaux empêche tout glissement relatif.

Pour une longueur l_0 de la poutre travaillant en période élastique (loi de Hooke), on a :

$$\Rightarrow \Delta l = \frac{N l_0}{E A_0}$$

$$\Delta l_a = \Delta l_b \Leftrightarrow \frac{N_a l_0}{E_a A_a} = \frac{N_b l_0}{E_b A_b} \Rightarrow \boxed{\frac{N_a}{E_a A_a} = \frac{N_b}{E_b A_b}} \quad (\text{éq. 3.79.})$$

D'autre part, on sait par la statique que les efforts intérieurs équilibrent les efforts extérieurs, c'est-à-dire :

$$\boxed{N_a + N_b = N} \quad (\text{éq. 3.80.})$$

En remplaçant l'expression éq.3.79. dans l'équation éq.3.80., on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_a = N \frac{E_a A_a}{E_a A_a + E_b A_b} \\ N_b = N \frac{E_b A_b}{E_a A_a + E_b A_b} \end{array} \right. \quad (\text{éq. 3.81.})$$

On peut en déduire que l'effort N se répartit entre les deux pièces au prorata de leurs rigidités en traction ($E_a A_a$) et ($E_b A_b$).

Les contraintes dans les deux matériaux valent donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_a = \frac{N_a}{A_a} = N \frac{E_a}{E_a A_a + E_b A_b} \\ \sigma_b = \frac{N_b}{A_b} = N \frac{E_b}{E_a A_a + E_b A_b} \end{array} \right. \quad (\text{éq. 3.84.})$$

On peut généraliser sans peine les résultats précédents pour des pièces composées d'un nombre quelconque de matériaux.

Application 3.8. Une poutre en béton est renforcée avec 4 fers en acier de diamètre d inconnu. La poutre est rectangulaire (200 x 220). La contrainte maximale admissible en compression du béton est de 7 N/mm^2 tandis que celle de l'acier est de 150 N/mm^2 . Le module de Young du béton vaut 14000 N/mm^2 et celui de l'acier 210000 N/mm^2 . Si la poutre doit supporter une charge de compression N de 500 kN , déterminer le diamètre d des fers.

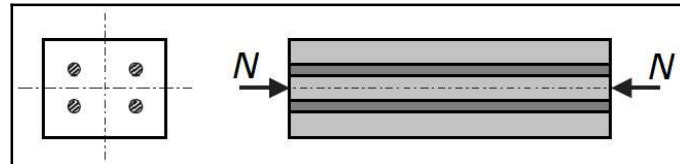


fig.3.9. - Application 3.8.

Solution :

Hypothèses :

- ▶ L'adhérence entre le béton et l'acier empêche tout glissement relatif;
- ▶ On néglige les effets du flambement (poutre courte).

Démarche de résolution :

On commence le calcul par la matière qui a la plus faible contrainte admissible, soit dans ce cas -ci le béton.

Compression d'une structure formée de deux matériaux différents

Utilisons l'expression de la contrainte dans le béton :

$$\sigma_b = \frac{N_b}{A_b} = N \frac{E_b}{E_a A_a + E_b A_b} \leq \sigma_{adm b}$$

$$N \frac{E_b}{E_a \left(4 \times \frac{\pi d^2}{4} \right) + E_b \left(A_{poutre} - 4 \times \frac{\pi d^2}{4} \right)} \leq \sigma_{adm b}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{\frac{\left(\frac{N E_b}{\sigma_{adm b}} \right) - E_b A_{poutre}}{\pi (E_a - E_b)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{500\,000 \times 14\,000}{7} \right) - 14\,000 \times (200 \times 220)}{\pi (210\,000 - 14\,000)}}$$

$$= 24.9 \text{ mm}$$

Gamme de diamètres standards : 6, 8, 10, 12, 14, 16, 20, 25, 28, 32, 40, 50 et 63.5 mm.

Les diamètres des fers à béton normalisés supérieurs sont 25 mm et 28 mm.

Dans notre cas prendre $d = 25 \text{ mm}$ est un peu juste (si on prend $E_a = 200\,000 \text{ N/mm}^2$ on trouve $d = 25.6 \text{ mm}$), donc on prendra $d = 28 \text{ mm}$.

Vérification de la contrainte dans le béton

Il s'agit maintenant de vérifier si la contrainte dans le béton ne dépasse pas la limite maximale admissible de 7 N/mm^2 :

$$\begin{aligned}\sigma_b &= \frac{N E_b}{E_a A_a + E_b A_b} \\ &= \frac{500\,000 \times 14\,000}{210\,000 \times \left(4 \times \frac{\pi \times 28^2}{4}\right) + 14\,000 \times \left((200 \times 220) - \left(4 \times \frac{\pi \times 28^2}{4}\right)\right)} \\ &= 6.4 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Cette contrainte dans le béton de 6.4 N/mm^2 est donc bien inférieure à la contrainte maximale admissible de 7 N/mm^2 .

Vérification de la contrainte dans l'acier

Une vérification des contraintes dans l'acier donnera :

$$\sigma_a = 95.6 < 150 \text{ N/mm}^2$$

3.6. Dimensionnement des boulons

3.6.1. Introduction

La désignation d'une vis se fait par son diamètre "d" en millimètre de la partie non filetée du corps du boulon précédé de la lettre majuscule "M" (pour "métrique") : exemple : si $d = 24 \text{ mm}$, la vis est désigné par M24. Le terme "boulon" sert à désigner l'ensemble "vis + écrou".

Les caractéristiques mécaniques des vis nécessaires aux calculs sont la limite d'élasticité R_e et la limite de rupture R_m . Dans le cas des vis (boulons) on parle de *classe de qualité*.



fig.3.10. - Classe de qualité : exemple.

La classe de qualité s'exprime donc par un couple de nombre, soit X.Y, le premier chiffre nous donne la contrainte de rupture R_m ($R_m = X \times 100 \text{ MPa}$), le second nous donne la limite élastique R_e ($R_e = 0.Y \times R_m \text{ MPa}$) :

Exemple : pour une vis de classe 12.9 :

$$R_m = 12 \times 100 = 1200 \text{ MPa}$$

$$R_e = 0.9 \times 1200 = 1080 \text{ MPa}$$

Les différentes *classes de qualités* des boulons sont les suivantes :

★ **Tableau des différentes classes de qualité des vis et écrous** (*Annexe 1 : Tableau 3.2. - Classe de qualité des vis - boulons.*)

3.6.2. Boulons soumis à traction

A) Dimensionnement statique

Le problème que nous étudions ici se rencontre très souvent; il intéresse les assemblages par boulons des organes de machines. Un assemblage serré par boulon est soumis à un effort externe F ayant pour effet de tendre à dissocier les éléments précontraints, cet effort F se répartit entre le boulon sous tension et l'assemblage sous compression proportionnellement à leur facteur de raideur pour autant que l'effort de précontrainte F_p a été suffisant pour maintenir l'assemblage en compression.

Nous devons donc vérifier en premier lieu **la condition de non décollement des surfaces**, soit :

$$F_p \geq F_{p \min} = \frac{F_{\max}}{nbs_b} \frac{K_a}{K_a + K_b} \quad (\text{éq. 3.99.})$$

<u>Notations</u> :	F_p	force de précontrainte dans le boulon	N
	F_{max}	effort maximum de traction subit par l'assemblage	N
	nbs_b	nombre de boulons	-
	K_a	raideur de l'assemblage	N/mm
	K_b	raideur du boulon	N/mm

Définition : La raideur K , en N/mm , est définie par :

$$K = (E A) / l_a \quad \text{ou} \quad K = N / \Delta l \quad (\text{éq. 3.100.})$$

<u>Notations</u> :	E	module d'élasticité	N/mm^2
	l_a	longueur active	mm
	A	surface sous contrainte	mm^2
	EA	module de rigidité à la traction	N

La raideur est donc :

L'effort produisant une déformation d'amplitude égale à l'unité.

En effet :

$$\Delta l_a = \frac{N l_a}{E A} \Rightarrow N = K \Delta l_a \quad \text{avec} \quad \Delta l_a = 1$$

Ayant défini la force de précontrainte minimum afin que les surface ne se décolle pas, il faut choisir **une force de précontrainte réelle égale à 1.2 ... 1.8 fois la force de précontrainte minimum.**

Il faut vérifier ensuite que cette valeur est inférieure à la force maximum admissible en fonction de la classe de boulons choisies (voir *Tableau des différentes classes de qualité des vis et écrous en annexe*)

La **contrainte dans le boulon** σ_b sera, quant à elle, égale à la somme de la contrainte due à l'effort de précontrainte F_p et de celle due à l'effort extérieur maximum F_{max} au prorata des raideurs,

d'où :

$$\sigma_b = \sigma_p + \sigma_{F_{max} b} \frac{K_b}{K_a + K_b} \leq \sigma_{adm b} \quad (\text{éq. 3.103.})$$

<u>Notations</u> :	σ_p	contrainte dans le boulon, due à F_p :	N/mm^2
		$\sigma_p = F_p / A_{t b}$	
		avec $A_{t b}$ la section de tension du boulon	
	$\sigma_{F_{max} b}$	contrainte dans le boulon, due à F_{max} :	N/mm^2
		$\sigma_{F_{max} b} = F_{max} / A_{t b}$	
		avec $F_{max b}$ la force maximale dans le boulon (F_{max} / nbs_b)	
	$\sigma_{adm b}$	contrainte admissible dans le boulon	N/mm^2

et cette contrainte σ_b devra obligatoirement être inférieur (ou égal) à la contrainte admissible dans le boulon. Soit, en statique :

$$\sigma_b \leq \sigma_{adm b} \approx 0.8 \dots 0.9 R_e \quad (\text{éq. 3.107.})$$

La détermination des boulons à partir des contraintes maximales en fond de filet conduit à des calculs complexes. Pour calculer les caractéristiques d'un assemblage boulonné, un modèle simple de calcul a été utilisé. Dans ce modèle, on se sert de la *section de tension* A_t . Celle-ci est la moyenne entre la section du noyau et la section à flanc de filet.

Tableau des caractéristiques des vis (*Annexe 1 : Tableau 3.3. - Caractéristiques géométriques des vis.*)

Nous percevons, en conséquence, l'intérêt d'adopter :

1) pour *un assemblage devant supporter des efforts purement statiques* (ex. : tuyau sous pression) :

- ▶ un boulon très peu élastique (raideur K_b forte), donc une petite longueur et une "grosse" section;
- ▶ un assemblage compressible (raideur K_a faible) (ajout d'un joint d'étanchéité déformable).

C'est la condition de non décollement qui est prépondérante. En effet il ne peut y avoir de fuite. C'est pourquoi, afin de diminuer la raideur de l'assemblage (ex. : flasque) on rajoute un joint d'étanchéité déformable. C'est une façon de diminuer la raideur de cet assemblage.

2) pour *un assemblage devant supporter des efforts pulsés* (ex. : boulons de culasse) :

- ▶ un boulon très élastique (raideur K_b faible), donc une grande longueur et une faible section;
- ▶ un assemblage peu compressible (raideur K_a élevée).

Dans ce cas, c'est la condition de contrainte qui est prépondérante. Il faut que les contraintes d'origines externes ne s'ajoutent (pratiquement) pas aux contraintes statiques de précontrainte; le supplément d'allongement créé dans les boulons par les surtensions dynamiques soulage, en effet, les structures comprimées de l'assemblage, donc diminue leurs réactions sur le boulon tendu avec un gradient de relaxation croissant avec la raideur des parties précomprimées K_a .

De plus, le taux de serrage (en réalité nous devrions dire le taux d'allongement) doit être aussi élevé que le permet la limite des contraintes totales admissibles.

B) Dimensionnement dynamique

Si l'assemblage boulonné doit supporter une charge qui fluctue entre un minimum nul et un maximum F_{max} (c'est par ailleurs ce type de charge que la plupart des assemblages boulonnés doivent supporter), le genre d'approche de calcul est un peu différent.

En plus des deux conditions purement statiques il convient de vérifier l'inéquation suivante :

$$\sigma_{ab} = \frac{\sigma_{F_{max}b}}{2} \frac{K_b}{K_a + K_b} \leq \sigma_{adm b} \quad (\text{éq. 3.108.})$$

<u>Notations</u> :	σ_{ab}	contrainte alternée subie par le boulon	N/mm^2
	$\sigma_{adm b}$	contrainte alternée admissible dans le boulon	N/mm^2
	$\sigma_{F_{max}b}$	contrainte dans le boulon, due à F_{max}	N/mm^2

On peut, dans une première approche, vérifier que la contrainte alternée σ_a dans le boulon ne dépasse pas les contraintes admissibles $\sigma_{adm b}$ données dans l' *Annexe 1 : Tableau 3.4. - Contraintes dynamiques admissibles* .

★ **Tableau des contraintes dynamiques admissibles** (*Annexe 1 : Tableau 3.4. - Contraintes dynamiques admissibles pour une contrainte statique moyenne $\sigma_m = 0.7 R_e$*)

Si le design initial ne s'avère pas satisfaisant, il y a, de manière générale, trois possibilités :

- ▶ diminuer la force de précontrainte, et risquer que le boulon ne se desserre;
- ▶ augmenter le rapport raideur assemblage / raideur boulon (K_a / K_b);
- ▶ utiliser un plus grand nombre de boulons.

C) Dimensionnement pratique

Si les matériaux du boulon et de l'assemblage sont les mêmes, il s'ensuit que les modules d'élasticité longitudinale sont les mêmes aussi. De plus, sauf cas relativement rare, les longueurs actives du boulon et de l'assemblage sont aussi identiques. C'est pourquoi, on peut simplifier les formules précédentes en utilisant, non pas les raideurs K , mais directement les surfaces sous contraintes A .

D) Notes sur le calcul des raideurs

Concernant le calcul de la raideur du boulon nous pouvons utiliser la formule suivante :

$$\frac{1}{K_B} = \frac{1}{E_B} \left(\frac{l_0 + 0.4d}{A_0} + \frac{l_1 + 0.4d}{A_s} \right) \quad (\text{éq. 3.111.})$$

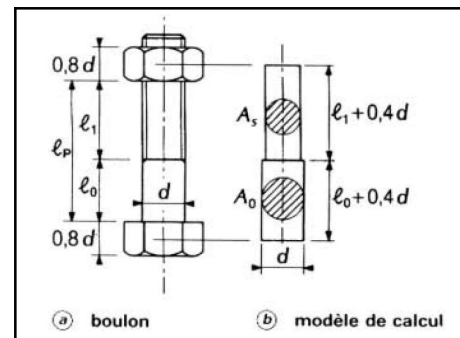


fig.3.11. - Dimensions d'un boulon.

<u>Notations</u> :	K_B	raideur du boulon	N/mm
	E_B	module d'élasticité longitudinale du boulon (acier)	N/mm^2
	d	diamètre nominale de la vis	mm
	A_0	section nominale de la vis	mm^2
	A_s	section résistante de la vis	mm^2
	l_0	longueur de la partie lisse de la vis	mm
	l_1	longueur de la partie filetée de la vis	mm

Quant au calcul de la rigidité de l'assemblage, celui-ci est plus complexe. En effet, la compression n'est pas répartie uniformément dans la région entre l'écrou et la tête du boulon. La surface d'action de la force de compression est souvent très difficile à déterminer. Dans ces cas-là, pour plus de sûreté, on suppose que l'assemblage se comporte comme un cylindre creux en compression simple, cylindre dont le diamètre intérieur est identique à celui du boulon et dont le diamètre extérieur est égal à trois fois le diamètre, (voir figure **fig. 3.12.**) et donc :

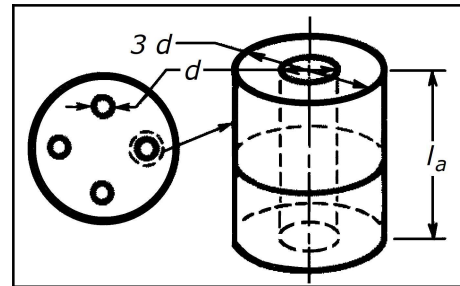


fig.3.12. - Raideur de l'assemblage : simplification.

$$K_a = \frac{E A}{l_a} = \frac{E}{l_a} \left(\frac{\pi}{4} \left((3d)^2 - d^2 \right) \right) = \frac{2 \pi d^2 E}{l_a} \quad (\text{éq. 3.112.})$$

Remarque :

Lorsqu'on utilise le même matériau pour fabriquer les boulons et les membrures, la rigidité des membrures k_m est généralement estimée huit fois plus grande que celle des boulons.

E) Notes sur la valeur de la force de précontrainte

Concernant la valeur de la précontrainte, l'EUROCODE préconise une force $F_{p,Cd}$ suivant la formule suivante (boulons 8.8 et 10.9) :

$$F_{p,Cd} = \frac{0.7 f_{ub} A_s}{\gamma_{M7}} \quad (\text{éq. 3.113.})$$

<u>Notations :</u>	f_{ub}	limite de rupture de l'acier utilisé pour le boulon	N/mm^2
(EUROCODE)	A_s	section de tension du boulon	mm^2
	γ_{M7}	coefficient partiel de sécurité concernant la précontrainte des boulons HR ($\gamma_{M7} = 1.1$)	-

La VDI 2230 préconise une précontrainte impliquant que la limite d'élasticité normalisée minimum $R_{p0.2 \min}$ suivant DIN ISO 898-1 soit utilisée, généralement, à 90 %. Soit la formule de calcul :

$$F_{Mzul} = \frac{0.9 R_{p0.2 \min} A_s}{\sqrt{1 + 3 \left(1.5 \frac{d_2}{d_s} \left(\frac{p}{\pi d_2} + 1.155 \mu_{G \min} \right)^2 \right)}} \quad (\text{éq. 3.115.})$$

<u>Notations :</u>	A_s	section de tension	mm^2
	$R_{p0.2 \min}$	limite d'élasticité normalisée minimum suivant DIN ISO 898-1	N/mm^2
		$\left\{ \begin{array}{l} 8.8 \Rightarrow R_{p0.2 \min} = 660 \text{ N/mm}^2 \\ 10.9 \Rightarrow R_{p0.2 \min} = 940 \text{ N/mm}^2 \\ 12.9 \Rightarrow R_{p0.2 \min} = 1100 \text{ N/mm}^2 \end{array} \right.$	

d_2	diamètre à flanc de filet	mm
d_s	diamètre de tension (moyenne entre diamètre du noyau et diamètre à flanc de filet)	mm
$\mu_{G\min}$	coefficient de frottement dans les filets	-

Pour un coefficient d'utilisation de la limite d'élasticité normalisée minimum $R_{p0.2\min}$ de 90 % on peut utiliser l'effort de montage des tableaux ($F_{Mzul} = F_{Mtab}$) :

★ **Tableau des forces admissibles au montage dans un assemblage suivant DIN 223**
(Annexe 1 : Tableau 3.5. - Forces admissibles au montage dans un assemblage suivant DIN 2230.)

Remarque :

Dans le cas de boulons de tension tel que la figure **fig. 3.13.**, d_s devient d_0 et, forcément A_s devient A_0 (section minimale).

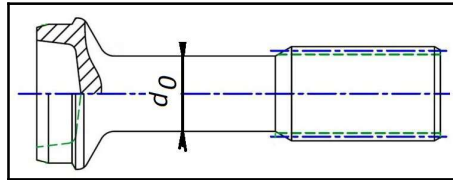


fig.3.13. - Vis de tension.

Application 3.8. Vérifiez la tenue d'un assemblage par boulons entre un chapeau et le corps de bielle. Cet assemblage, comprenant deux boulons M8, est soumis à une force d'extension F de 12000 N.

Solution : (A revoir suivant DIN 2230)

Calculons les différentes raideurs :

Comme la bielle et le boulon sont fait en acier (E égaux) et que les longueurs actives sont les mêmes, la raideur K se réduit à la surface comprimé.

$$K = \frac{E A}{l} \Rightarrow K = A$$

$$A_a = 10.5 \times 22 - \frac{\pi \times 8^2}{4} = 180.7 \text{ mm}^2$$

$$A_b = 36.6 \text{ mm}^2$$

Calculons la force de précontrainte :

$$\begin{aligned} F_p > F_{p \min} &= \frac{F_{\max}}{n b s_b} \frac{K_a}{K_a + K_b} \\ &= \frac{12000}{2} \times \frac{180.7}{180.7 + 36.6} = 4989.4 \text{ N} \end{aligned}$$

Prenons comme sécurité $S = 1.5$, et donc :

$$F_p \approx 1.5 \times 5000 = 7500 \text{ N}$$

Vérifions que le M8 de la classe 8.8 supporte cette précontrainte :

$$7500 < 16550 \Rightarrow \text{OK}$$

Vérifions la contrainte dans le boulon :

$$\begin{aligned} \sigma_b &= \sigma_p + \sigma_{F \max b} \frac{K_b}{K_a + K_b} \leq \sigma_{adm b} \\ &= \frac{7500}{36.6} + \frac{12000/2}{36.6} \times \frac{36.6}{180.7 + 36.6} = 232.5 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 232.5 &\leq 0.7 \dots 0.9 R_e \\ &\leq 0.8 \times 640 = 512 \text{ OK} \end{aligned}$$

Vérifions le dimensionnement dynamique :

$$\begin{aligned} \sigma_{ab} &= \frac{\sigma_{F \max b}}{2} \frac{K_b}{K_a + K_b} \leq \sigma_{adm b} \\ &= \frac{6000/36.6}{2} \times \frac{36.6}{180.7 + 36.6} = 13.8 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

$$13.8 \leq 60 \text{ N/mm}^2 \text{ (8.8 M8) OK}$$

Les boulons sont un peu surdimensionnés.

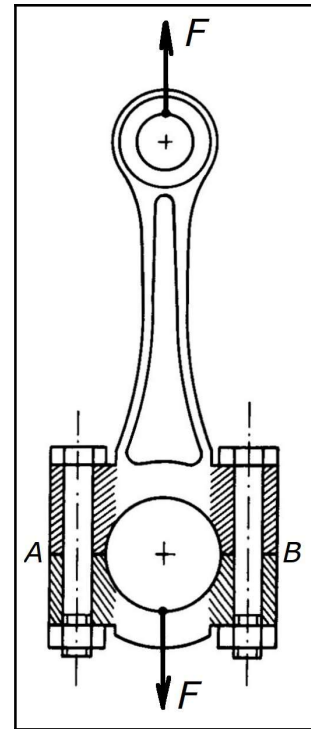


fig.3.14. - Application 3.8.

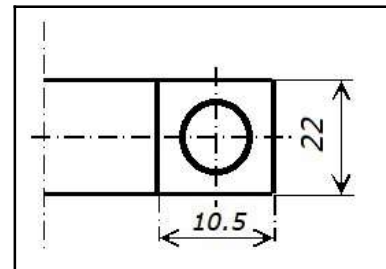


fig.3.15. - Section A-B.

3.6.3. Calcul d'un assemblage avec boulons haute résistance (HR)

La technique d'assemblage avec des boulons HR (Hautes Résistances) n'est pas basée sur le cisaillement du corps de la vis, mais sur le frottement engendré par le serrage du boulon. C'est la technique la plus répandue actuellement.

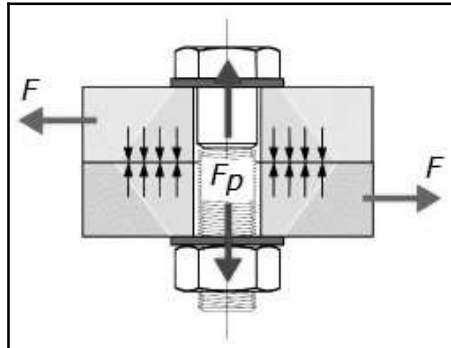


fig.3.16. - Assemblage avec boulons HR.

En serrant (au maximum...) le boulon on comprime les 2 plats (pièces à serrer). De ce fait, dû au frottement qui existe entre les 2 plats, on peut exercer une certaine force F , sans pour autant faire glisser les 2 plats l'un sur l'autre.

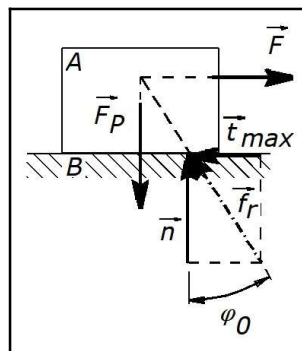


fig.3.17. - Force maximale de frottement.

La force maximale F que peut contrebalancer la force de pression F_p est donné, sachant que $n = f_p$ et que $t_{\max} = f$, par la relation suivante :

$$t_{\max} = n \tan \varphi_0 \Rightarrow F = F_p \tan \varphi_0$$

Et :

$$\tan \varphi_0 = \mu_s$$

Avec μ_s le coefficient de frottement qui existe entre les pièces A et B à serrer.

Un boulon HR est un boulon de classe de qualité ≥ 8.8 .

Pour calculer un assemblage boulonné on utilisera la formule suivante :

$$F_a = \frac{(\mu_s F_p) n_{\text{boulon}}}{S} \quad (\text{éq. 3.133.})$$

<u>Notations</u> :	F_a	force maximale que peut supporter l'assemblage	N
	F_P	force de précontrainte dans le boulon	N
	μ_s	coefficient de frottement de l'assemblage	-
	n_{boulon}	nombre de boulon de l'assemblage	-
	S	coefficient de sécurité	-

Application 3.9. Un support soumis à une charge P de 6 kN est fixé à un mur par 2 boulons. déterminer la force avec laquelle il faut serrer les boulons pour fixer le support au mur. Le coefficient de frottement entre le support et le mur $\mu_s = 0.3$. Pour plus de sûreté, on supposera que seul le boulon supérieur est serré et que les boulons sont mis à jeu ne leur permettant pas de travailler en cisaillement. *Hypothèse* : $b/a > \mu_s$ afin de pouvoir utiliser la totalité du coefficient de frottement.

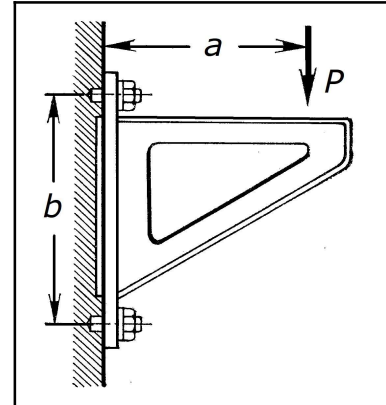


fig.3.18. - Application 3.9.

Solution :

Application de la formule générale des assemblages boulonnés

Dans ce cas-ci, $S = 1$, puisqu'on a déjà pris une sécurité en admettant que seul le boulon supérieur reprend la charge :

$$F_a = \frac{(\mu_s F_P) n_{boulon}}{S} \Rightarrow F_P = \frac{F_a S}{\mu_s n_{boulon}} = \frac{6000 \times 1}{0.3 \times 1} = 20 \text{ kN}$$

Remarque :

Nous devrions aussi vérifier l'assemblage au non décollement. Pour cela il nous faudrait connaître la longueur ainsi que le diamètre du boulon utilisé.

3.7. Le matage

Le matage est une compression locale (superficielle) entre deux éléments pressés l'un contre l'autre. La loi exacte de répartition des pressions sur la surface écrasée n'étant pas connue, pour simplifier les calculs techniques on suppose par convention que la pression est uniformément répartie non sur la surface écrasée, mais sur l'aire A_{mat} , qui est la projection de la surface écrasée sur un plan perpendiculaire à la direction de la force de pression p_{mar} . Cette erreur est prise en considération dans la valeur de la contrainte de matage admissible $p_{adm mat}$. Dans la pratique, la pression (contrainte) admissible de matage $p_{adm mat}$ peut être prise égale à deux fois la contrainte admissible en traction-compression.

$$p_{adm mat} \approx 2 \times \sigma_{adm traction} \quad \text{(éq. 3.136.)}$$

En ce qui concerne les clavettes, la pression admissible de matage doit être beaucoup plus faible. En effet, il faut que l'on puisse facilement monter *et* démonter l'assemblage. Aucune déformation n'est permise.

Quelques valeurs de pression admissible pour différents matériaux sont données en annexe.

★ **Tableau des pressions admissibles de matage** (*Annexe 1 : Tableau 3.6. - Pression admissible de matage.*)

3.8. Enveloppe mince

{Réf. 1, 7, 8}

3.8.1. Introduction

Une autre application des contraintes normales distribuées uniformément apparaît dans l'analyse approximative *des récipients sous pression à paroi mince*, tels que des récipients de forme cylindrique, sphérique, conique ou toroïdale soumis à une pression interne ou externe due à un gaz ou un liquide. Dans ce chapitre, nous traiterons seulement des récipients à paroi mince de révolution et nous nous limiterons aux déformations à symétrie axiale dans ces récipients.

Une **enveloppe mince** est un corps dont une des dimensions (l'épaisseur) est bien plus petite que les deux autres.

Limitations

Le rapport de l'épaisseur de la paroi e au rayon r , ne doit pas dépasser approximativement 0.10.

Soit : $\boxed{e/r \leq 0.10}$ (éq. 3.137.)

Le CODAP (Code Des Appareils sous Pression - Code français) préconise lui que le diamètre moyen d_{moy} soit supérieur ou égal à 5 fois l'épaisseur e : $\boxed{d_{moy} \geq 5e}$

Il ne doit pas y avoir de discontinuité dans la structure. La solution simplifiée présentée ici ne permet pas de prendre en considération des anneaux de renforcement. Elle ne peut non plus donner une indication précise sur les contraintes et déformations au voisinage des plaques de fermeture d'extrémité des récipients cylindriques sous pression. Cette analyse est cependant satisfaisante pour de nombreux problèmes de conception.

Les problèmes qui suivent concernent les contraintes dues à une pression interne uniforme agissant dans un récipient de révolution à paroi mince. Les formules donnant les diverses contraintes restent valables lorsque le sens de la pression est inversé, c'est-à-dire lorsqu'une pression extérieure agit sur le conteneur. Pourtant, il doit être noté qu'une considération supplémentaire, qui dépasse le cadre de cet ouvrage, doit être prise en compte. Il faut non seulement chercher la distribution des contraintes, mais aussi procéder à une autre étude de nature entièrement différente pour déterminer la charge à laquelle le récipient flambe sous l'effet de la compression. Une rupture de flambement ou d'instabilité peut se produire, même si la contrainte la plus élevée est très inférieure à la contrainte pratique du matériau.

Applications

Les réservoirs de stockage et les conteneurs de liquide, les canalisations d'eau, les chaudières, les coques de sous-marins et certaines pièces d'avion, sont des exemples courants de récipients sous pression à paroi mince.

Rappel : la pression sollicitant l'enveloppe est la pression effective.

$$\boxed{p_{eff} = p_{int} - p_{ext} = \Delta p}$$
 (éq. 3.139.)

Notations :

p_{int}	la pression interne à l'enveloppe (pression absolue)	N/mm^2
p_{ext}	la pression externe à l'enveloppe (souvent la pression atmosphérique)	N/mm^2

Le problème du calcul des enveloppes minces (de révolution) se résout le plus simplement lorsqu'on peut admettre que les contraintes dans l'enveloppe sont distribuées uniformément dans son épaisseur.

3.8.2. Calcul des enveloppes minces de révolution

Partons d'un constat : un réservoir cylindrique aux parois de même épaisseur subissant un essai destructif de mise en pression se déchire toujours suivant une génératrice du cylindre.

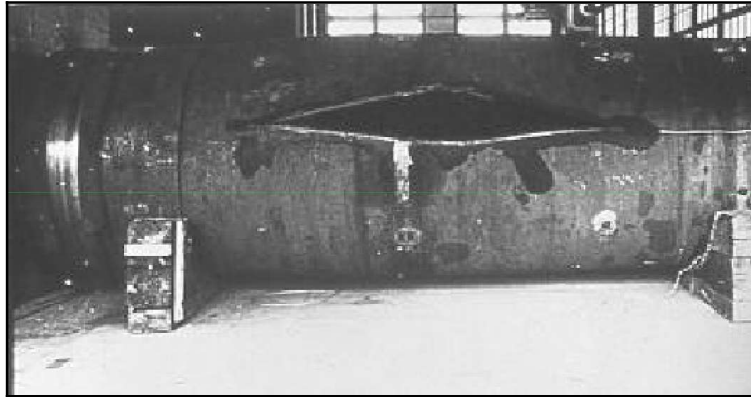


fig.3.19. - Rupture longitudinale d'un réservoir.

Soit un réservoir de diamètre moyen d_{moy} , de longueur l et soumis à une pression effective p_{eff} . Considérons la demi-enveloppe supérieur, F étant la résultante des composantes verticales des pressions p_{eff} . Dans ce cas, on peut démontrer que :

$$F = p_{eff} l d_{moy} \quad (\text{éq. 3.140.})$$

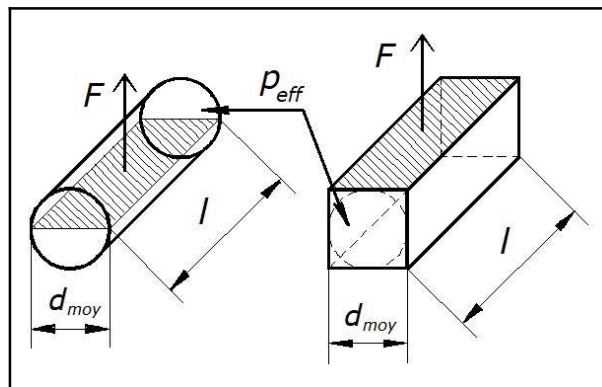


fig.3.20. - Effort sollicitant une enveloppe cylindrique.

L'effort F est donc égal au produit de la pression effective p_{eff} par la surface diamétrale ($l d_{moy}$), c'est-à-dire la face latérale du parallélépipède circonscrit au réservoir (surface projetée).

Calculons l'épaisseur du réservoir suivant une génératrice en considérant les données suivantes :

- ▶ le diamètre d_{moy} en mm ;
- ▶ la longueur l en mm ;
- ▶ la pression effective p_{eff} en N/mm^2 .

Nous avons la contrainte qui vaut :

$$\sigma = \frac{F/2}{A}$$

avec : $F = p_{eff} l d_{moy}$

et $A = (e l)$

d'où :
$$\sigma = \frac{(p_{eff} l d_{moy})/2}{(e l)} \leq \sigma_{adm}$$

et donc :
$$e = \frac{p_{eff} d_{moy}}{2 \sigma_{adm}} \text{ (éq. 3.146.)}$$

ou :
$$\sigma = \frac{p_{eff} d_{moy}}{2 e} \leq \sigma_{adm} \text{ (éq. 3.147.)}$$

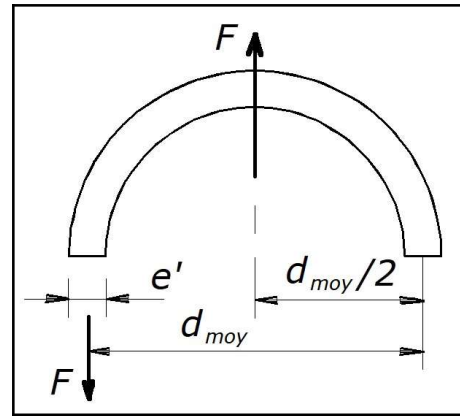


fig.3.21. - Rupture suivant une génératrice.

Remarque :

Cette façon de calculer la surface n'est valable que si l'épaisseur est petite par rapport au diamètre, ce qui est le cas pour les "parois minces".

La formule précédente est valable quand toutes les génératrices ont la même résistance (quand l'enveloppe est tournée). Cependant lorsqu'elle est soudée, la soudure crée un affaiblissement de la virole dû aux effets thermiques le long de la soudure et de ce fait la contrainte admissible sera moindre.

Dans ce cas on utilisera, à la place de la contrainte admissible σ_{adm} de l'acier de l'enveloppe mince, la contrainte admissible de la soudure $\sigma_{adm \text{ soudure}}$ soit :

$$\sigma_{adm \text{ soudure}} = z \sigma_{adm} \text{ (éq. 3.148.)}$$

On prendra $z = 0.65$ si aucune information nous est donné concernant le coefficient de sécurité à utiliser.

De plus, on majore ensuite le résultat obtenu de **1 ou plusieurs millimètres (2 mm)**, pour les aciers, pour tenir compte de la corrosion ou de l'usure de l'enveloppe.

Le CODAP (COde Des Appareils sous Pression) nous donne un règle un peu plus générale concernant les contraintes nominales à utiliser ainsi que les coefficients de soudure z. Les formules données en ci-avant concernent les régions de l'enveloppe cylindrique éloignées de toute discontinuité (raccordement avec une autre enveloppe, un fond ou une bride, ouverture, etc.)

★ **Tableau des caractéristiques des contraintes admissibles CODAP (Annexe 1 : Tableau 3.7. - CODAP : Contraintes admissibles et coefficients de soudure)**

Remarques :

1) Dans la cas d'une *sphère* la relation est :

$$e = \frac{p_{eff} d_{moy}}{4 \sigma_{adm \text{ soudure}}} \text{ (éq. 3.150.)}$$

2) Si nous utilisons le diamètre intérieur d_i au lieu du diamètre moyen, les formules ci-dessus deviennent :

$$e = \frac{p_{eff} d_i}{k \sigma_{adm\ soudure} - p_{eff}} \quad (\text{éq. 3.151.})$$

Avec : $k = 2$ pour les enveloppes cylindriques
 $k = 4$ pour les enveloppes sphériques

3.8.3. Etude de la déformation

A l'allongement de la circonférence moyenne correspond un gonflement de l'enveloppe mince. En première approximation cet allongement se calcule à partir de la loi de Hooke si les déformations restent dans le domaine élastique. Soit :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \varepsilon = \frac{p_{eff} d_{moy}}{2 e E}$$

La variation de diamètre est donné par la relation :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\pi \Delta d_{moy}}{\pi d_{moy}} = \frac{p_{eff} d_{moy}}{2 e E}$$

D'où :

$$\Delta d_{moy} = \frac{p_{eff} d_{moy}^2}{2 e E} \quad (\text{éq. 3.156.})$$

Remarque :

Pour trouver cette dernière formule, on aurait aussi pu partir directement de l'équation [éq. 3.63.](#)

Application 3.10. Quelle épaisseur faut-il donner aux tôles d'un réservoir à air comprimé cylindrique, en construction soudée, de 1500 mm de diamètre intérieur, sachant que la pression effective est de 8 bars et que la tension de rupture des tôles est de 360 N/mm² et la limite élastique 270 N/mm², si l'évaluation des risques est très important ?

Solution :

Recherche de la contrainte admissible

Annexe 1 : Tableau 3.8. : risque très important : $z = 0.7$

$$\sigma_{adm\ soudure} = 0.7 \sigma_{adm} = 0.65 \frac{R_{p0.2}}{1.6} = 0.7 \times \frac{270}{1.6} = 118.1 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{adm\ soudure} = 0.7 \sigma_{adm} = 0.65 \frac{R_m}{2.7} = 0.7 \times \frac{360}{2.7} = 93.3 \text{ N/mm}^2$$

Nous prendrons la valeur minimale.

Recherche de l'épaisseur

$$e = \frac{p_{eff} d_i}{k \sigma_{adm\ soudure} - p_{eff}} = \frac{0.8 \times 1500}{2 \times 99.3 - 0.8} = 6.1 \text{ mm} \quad \text{soit } 7 \text{ mm}$$

Application 3.11. Le submersible pour recherches profondes *Aluminaut* a une coque cylindrique de diamètre extérieur de 240 cm et d'épaisseur 14 cm. Il est construit en alliage d'aluminium 7079-T6 de limite d'élasticité de 420 N/mm². Calculer la contrainte maximale de la partie cylindrique de la coque lorsque le submersible est à sa profondeur opérationnelle de 4500 m en dessous du niveau de la mer. Prendre 1024 kg/m³ pour la masse volumique de l'eau de mer. Quel a été le coefficient de sécurité utilisé ?

Solution :

Recherche de la pression existante à 4500 m de profondeur

$$p = \rho g h = 1024 \times 9.81 \times 4500 = 45.2 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 452 \text{ bars}$$

Remarque :

p est directement la pression effective car la p_{atm} s'exerce au-dessus de la mer *et* à l'intérieur du sous-marin.

Recherche du diamètre moyen de la coque

$$d_{moyen} = d_{ext} - 2(e/2) = 2400 - 140 = 2260 \text{ mm}$$

Recherche de la contrainte dans la coque

$$\sigma = \frac{p_{eff} d_{moyen}}{2e} = \frac{(45.2 \cdot 10^6) 10^{-6} \times 2260}{2 \times 140} = 365 \text{ N/mm}^2$$

Recherche du coefficient de sécurité :

$$S = \frac{R_e}{\sigma} = \frac{420}{365} = 1.15$$

3.9. Câble

{Réf. 7}

- 1) Un câble (ou fil flexible) ne résiste qu'à la traction.
- 2) Charge de rupture réelle est de 10 à 20 % inférieure à celle que l'on obtiendrait en considérant la section totale des fils et la résistance à la rupture de l'acier : conséquence du câblage.
- 3) Nous savons que pour les fils d'acier, le module de Young $E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$. Mais dans les câbles, les fils composant les torons sont enroulés en hélice, ce qui fausse les résultats. Des essais ont donné, dans l'ensemble des câbles, des valeurs de $E_{\text{câble}} \approx 120\,000 \text{ N/mm}^2$, variables suivant le type de câble. C'est, en fait, le module d'élasticité apparent du câble, c'est-à-dire son module rapporté à la section apparente du câble.

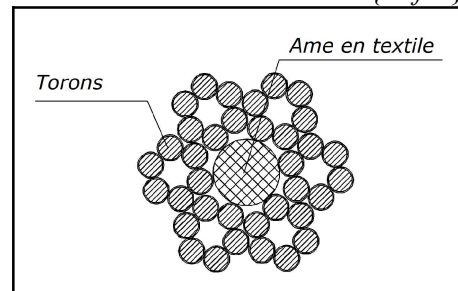


fig.3.22. - Exemple de câble.

- 4) L'enroulement des câbles sur les tambours ou sur la poulie crée dans les fibres extérieures un excès de tension qui s'ajoute à la tension de traction. On doit mettre beaucoup d'importance au diamètre de ceux-ci. Pour éviter cela, les diamètres d'enroulement seront :
 - ▶ **7 à 15 fois** le diamètre du câble en chanvre (15 = cordes serrées)
 - ▶ **500 fois** le diamètre du fil pour le câble métallique.

Dans les câbles de grande longueur par exemple le câble de mines nous devons compte du poids propre du câble. Ces câbles sont plats et la section n'est pas constante sur toute la longueur.

- 5) Dans le cas du calcul des câbles, le coefficient de sécurité, **par rapport à la limite de rupture**, sera pris **égal à 12**.

Pour le calcul des contraintes dans un câble, en pratique, on tient compte de :

- A) la contrainte de traction (poids de la charge + éventuellement le poids du câble).
- B) la contrainte due au démarrage (inertie de la charge).
- C) la contrainte d'incurvation du câble sur la poulie.

A) Calcul de la contrainte de traction (poids de la charge et le poids du câble) (σ_1)

La contrainte dans une section quelconque d'un câble, de section constante, soumise à l'action d'une force extérieure de traction F , compte tenu du poids propre du câble, peut être déterminé d'après la formule :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_{\text{câble}}}$$

et ici :

$$N_1 = F + \text{Poids du câble} = F + \rho g A_{\text{câble}} l_{\text{câble}}$$

<u>Notations</u> :	ρ	masse volumique (acier = $7\,800 \text{ kg/m}^3$)	kg/m^3
	g	accélération de la pesanteur ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)	m/s^2

$A_{c\grave{a}ble}$	section du c\^ab	m^2
$l_{c\grave{a}ble}$	longueur du c\^ab	m^2

et donc :

$$\sigma_1 = \frac{F + \rho g A_{c\grave{a}ble} l_{c\grave{a}ble}}{A_{c\grave{a}ble}} = \frac{F}{A_{c\grave{a}ble}} + \rho g l_{c\grave{a}ble} \quad (\text{eq. 3.171.})$$

B) Calcul de la contrainte due au d\^emarrage (σ_2)

Il faut se rendre compte que lors du d\^emarrage de la charge, il existe une acc\^el\^eration et donc, en raison de la relation fondamentale de la dynamique ($\vec{F} = m \vec{a}$), cette acc\^el\^eration cr\^eera une force d'inertie qui s'ajoutera \^a la charge.

Donc : $F = m_{Tot} a$

Notations :

a	acc\^el\^eration maximum	m/s^2
m_{Tot}	masse totale (charge + \^eventuellement celle du c\^ab si celle-ci est importante)	kg

La masse totale \^equivaut \^a :

$$m_{Tot} = m_{charge} + \rho A_{c\grave{a}ble} l_{c\grave{a}ble}$$

La contrainte correspondante :

$$\sigma_2 = \frac{F_{in}}{A_{c\grave{a}ble}} = \frac{m_{Tot} a}{A_{c\grave{a}ble}}$$

et donc :

$$\sigma_2 = \frac{m_{charge} a}{A_{c\grave{a}ble}} + \rho l_{c\grave{a}ble} a \quad (\text{eq. 3.176.})$$

C) Calcul de la contrainte d'incurvation du c\^ab sur la poulie (σ_3)

Cette derni\^ere contrainte nous est donn\^ee par la relation empirique :

$$\sigma_3 = 0.8 E_{c\grave{a}ble} \frac{d_{fil}}{d_{poulie}} \quad (\text{eq. 3.177.})$$

D) La contrainte globale dans le c\^ab ($\sigma_{c\grave{a}ble}$) sera :

$$\sigma_{c\grave{a}ble} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (\text{eq. 3.178.})$$

Laquelle contrainte devra \^etre inf\^erieure \^a la contrainte admissible dans le c\^ab !

E) Recherche de la section nette du c\^ab ($A_{c\grave{a}ble}$)

Si nous ne tenons pas compte du poids du c\^ab dans un premier temps, nous aurons :

$$\sigma_{c\grave{a}ble} = \frac{F}{A_{c\grave{a}ble}} + \frac{m_{charge} a}{A_{c\grave{a}ble}} + \sigma_3 \leq \sigma_{adm}$$

$$A_{\text{câble}} \geq \frac{F + m_{\text{charge}} a}{\sigma_{\text{adm}} - \sigma_3} \quad (\text{éq. 3.180.})$$

C'est avec cette section que l'on pourra calculer le poids du câble et vérifier alors la bonne tenue de celui-ci.

Application 3.12. Un câble d'acier comporte 6 torons de 19 fils de 1 mm de diamètre. L'acier à une résistance à la rupture de 200 daN/mm². Quelle sera la charge maximale admissible sachant que le coefficient de réduction est de 15 % de la charge admissible et que le coefficient de sécurité est de 5 ?

Solution :

Section du fil :

$$A_{\text{fil}} = \frac{\pi d_{\text{fil}}^2}{4} = \frac{\pi \times 1^2}{4} = 0.785 \text{ mm}^2$$

Section du câble :

$$A_{\text{câble}} = A_{\text{fil}} \text{ nbs}_{\text{fil}} \text{ nbs}_{\text{torons}} = 0.785 \times 19 \times 6 = 89.5 \text{ mm}^2$$

Contrainte admissible :

Si on admet une réduction de 15 % :

$$\sigma_{\text{adm}} = 0.85 \frac{R_m}{S} = 0.85 \times \frac{2000}{5} = 340 \text{ N/mm}^2$$

Recherche de la charge admissible

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{N_{\text{adm}}}{A_{\text{câble}}} \Rightarrow N_{\text{adm}} = \sigma_{\text{adm}} A_{\text{câble}} = 340 \times 89.5 = 30430 \text{ N}$$

Application 3.13. Quelle est la section nette d'un câble d'ascenseur sachant que celui-ci doit reprendre une charge de 20000 N subissant une accélération de 1 m/s². L'acier utilisé a une résistance à la traction de 2000 N/mm² et un coefficient de réduction de 20 %.

Solution :

La section du câble est donné par :

$$A_{\text{câble}} \geq \frac{F + m_{\text{charge}} a}{\sigma_{\text{adm}} - \sigma_3}$$

Recherche de la force et de la masse

$$F = 20000 \text{ N} \quad \text{et} \quad m_{\text{charge}} = \frac{F}{g} = \frac{20000}{9.81} = 2040 \text{ kg}$$

Recherche de la contrainte admissible

On prendra un coefficient de sécurité égal à 12 pour tenir compte notamment de la contrainte d'incurvation

$$\sigma_{adm} = 0.80 \frac{R_m}{S} = 0.80 \times \frac{2000}{12} = 133.3 \text{ N/mm}^2$$

Section nette du câble :

$$A_{c\grave{a}ble} \geq \frac{F + m_{charge} a}{\sigma_{adm} - \sigma_3} = \frac{20000 + (2040 \times 1)}{133.3} = 165 \text{ mm}^2$$

Application 3.14. Un wagon de funiculaire (masse totale $m = 3000 \text{ kg}$), tracté par un câble de 500 m de long, gravit une pente de 100 % (45°). Il atteint une vitesse de 3 m/s en 2.5 s. Calculer la section du câble, sa masse et son allongement.

On prendra $\sigma_{adm \text{ câble}} = 100 \text{ N/mm}^2$; $E_{c\grave{a}ble} = 120000 \text{ N/mm}^2$; $\rho_{acier} = 7800 \text{ kg/m}^3$.

Solution :

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{adm} \Rightarrow A = \frac{N}{\sigma_{adm}}$$

Il "suffit" dès lors de déterminer la valeur de l'effort N que subit le câble.

Cette valeur est constituée de 4 parties :

- ▶ l'effort dû à la masse du funiculaire $m_{funiculaire}$;
- ▶ l'effort d'inertie du funiculaire;
- ▶ le poids du câble (dans la direction de la pente);
- ▶ l'effort d'inertie du câble.

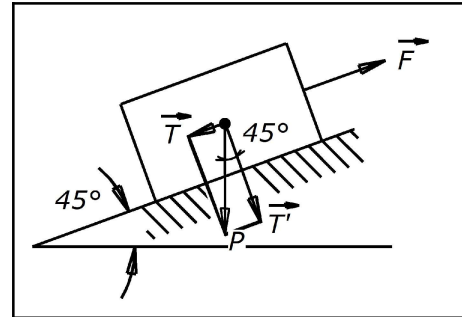


fig.3.23. - Application 3.14.

$$\sigma = \frac{P \sin 45^\circ}{A_{c\grave{a}ble}} + \frac{F_{in \text{ funiculaire}}}{A_{c\grave{a}ble}} + \frac{m_{c\grave{a}ble} g \sin 45^\circ}{A_{c\grave{a}ble}} + \frac{F_{in \text{ câble}}}{A_{c\grave{a}ble}} \leq \sigma_{adm}$$

$$\sigma = \frac{m_{funiculaire} g \sin 45^\circ}{A} + \frac{m_{funiculaire} a}{A} + \frac{A l_{c\grave{a}ble} \rho g \sin 45^\circ}{A} + \frac{A l_{c\grave{a}ble} \rho a}{A} \leq \sigma_{adm}$$

Ce qui nous permet de mettre en évidence la section du câble :

$$\frac{m_{funiculaire} (g \sin 45^\circ + a)}{\sigma_{adm} - l_{c\grave{a}ble} \rho (g \sin 45^\circ + a)} \leq A_{c\grave{a}ble}$$

Recherchons l'accélération. C'est un MRUA :

$$v = v_0 + a t \Rightarrow 3 = 0 + a \times 2.5 \Rightarrow a = 1.2 \text{ m/s}^2$$

Et donc la section minimale du câble vaut :

$$\frac{3000 (9.81 \times \sin 45^\circ + 1.2)}{100 \cdot 10^6 - 500 \times 7800 (9.81 \times \sin 45^\circ + 1.2)} = 357 \text{ mm}^2 \leq A_{c\grave{a}ble}$$

La masse du câble, avec la section nette, vaut :

$$m_{\text{câble}} = V \rho = A l \rho$$

$$= 357 \cdot 10^{-6} \times 500 \times 7800 = 1392 \text{ kg}$$

Recherchons l'allongement. La force N qui tend à allonger le câble sera égale à :

$$N = \text{Effort} + F_{\text{in funiculaire}} + \frac{m_{\text{câble}}}{2} g \sin 45^\circ + F_{\text{in câble}}$$

$$= 20810 + (3000 \times 1.2) + \frac{1392}{2} \times 9.81 \times \sin 45^\circ + 1392 \times 1.2$$

$$= 30910 \text{ N}$$

Remarque :

Nous avons pris la moitié du poids du câble car celui-ci est réparti sur toute la longueur du câble.

Et donc l'allongement total vaut :

$$\Delta l = \frac{N l_0}{E A} = \frac{30910 \times 500}{120000 \cdot 10^6 \times 357 \cdot 10^{-6}} = 0.361 \text{ m}$$

3.10. Socle - Assise sur mur

3.10.1. Socle

{Réf. 5}

Les dimensions de l'appui d'une poutre dans les murs ou d'un poteau sur le "sol" sont déterminées de telle manière que la pression sur ce mur ou sur le sol ne dépasse pas la limite permise.

Il faut donc que la surface du dé au sol soit suffisante pour que la pression exercée sur le sol soit inférieure à la pression admissible de ce sol.

Si :

$p_{s\ dé}$: pression admissible sur le dé (de béton, brique...)
 $p_{s\ adm\ sol}$: pression admissible sur le sol
et N : la charge à reprendre par le socle

et donc, dans l'hypothèse où nous ne tenons pas compte du poids du socle, nous avons :

$$\left. \begin{array}{l} p_{s\ dé} = N/A_{plaque} \\ p_{s\ adm\ sol} = N/A_{sol} \end{array} \right\} \Rightarrow p_{s\ dé} A_{plaque} = p_{s\ adm\ sol} A_{sol} \text{ (éq. 3.198.)}$$

Entre le mur (ou le poteau) et le socle, dans les cas ordinaires, on adopte une simple plaque d'acier. Si la charge est forte, la poutre repose sur des profilés qui répartissent la pression sur une surface assez grande.

Lorsque la poutre repose sur un dé de pierre ou de béton (fig. 3.24.) - matériau ne résistant qu'à la compression - on admet que la pression se répartit sous un angle de 45°. On peut ainsi déterminer la hauteur minimale h_{min} de ce dé.

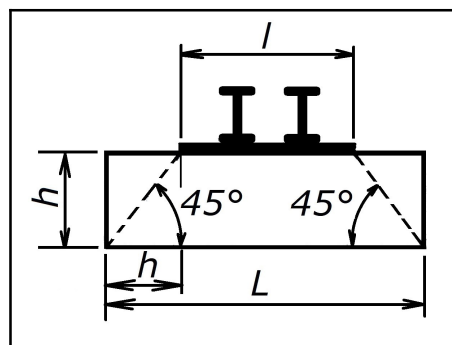


fig.3.24. - Assise de mur ou socle - répartition des contraintes de compression.

En effet, en connaissant la relation géométrique :

$$L = l + 2 h_{min} \quad (\text{puisque l'angle} = 45^\circ)$$

et en connaissant la forme de la surface de la plaque d'assise ainsi que la forme du socle, on pourra déterminer la hauteur h_{min} correspondante.

Par exemple, si aussi bien la surface de la plaque que la surface du socle sont de forme carré, nous aurons :

$$p_{s\text{ dé}} l^2 = p_{s\text{ adm sol}} L^2 = p_{s\text{ adm sol}} (l + 2h)^2$$

et on en déduit la hauteur h_{\min} pour une pression admissible correcte sur le sol :

$$h_{\min} = \frac{l}{2} \left(\sqrt{\frac{p_{s\text{ dé}}}{p_{s\text{ adm sol}}}} - 1 \right) \quad (\text{éq. 3.201.})$$

Application 3.15. Une poutrelle HEB, repéré 1 sur la figure, supporte un effort de compression de 500 kN. La poutrelle est soudée sur un plat carré en acier de côté b repéré 2. L'ensemble repose sur un support circulaire 3 en béton de diamètre d posé à même le sol.

- Calculer la section (dénomination) de la poutrelle si la contrainte admissible de l'acier est de 100 N/mm^2 .
- Déterminer le côté b du carré 2 si la contrainte admissible en compression du béton est de 4 N/mm^2 .
- Calculer le diamètre d du socle 3 si la contrainte admissible à l'écrasement du sol est de 25 N/cm^2 .
- Quelle hauteur h faut-il donner au bloc de béton ?

On négligera le poids de la poutrelle.

$$\rho_{\text{béton}} = 2400 \text{ kg/m}^3.$$

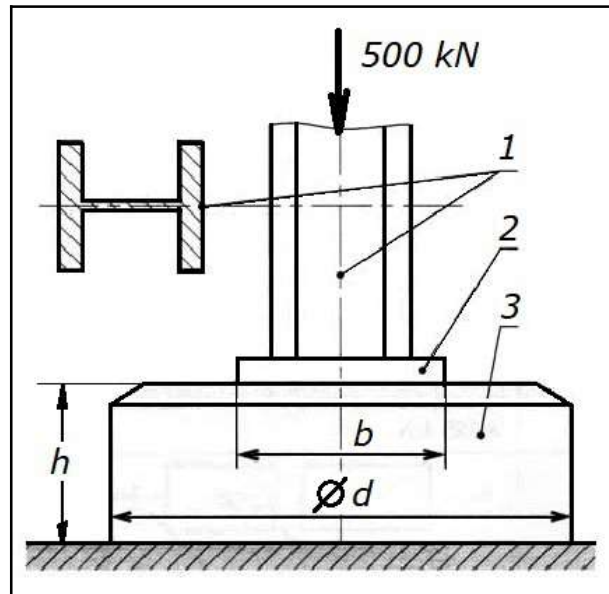


fig.3.25. - Application 3.15.

Solution :

a) Recherche de la section de la poutrelle HEB

$$\frac{N}{A_{\text{HEB}}} \leq \sigma_{\text{adm acier}} \Rightarrow A_{\text{HEB}} \geq \frac{N}{\sigma_{\text{adm acier}}} = \frac{500\,000}{100} = 5000 \text{ mm}^2$$

La poutrelle HEB 160 convient avec une section $A_{\text{HEB}} = 54.3 \text{ cm}^2$

b) Recherche du côté b du plat en acier

$$\frac{N}{A_{\text{plat}}} \leq \sigma_{\text{adm béton}} \Rightarrow A_{\text{plat}} \geq \frac{N}{\sigma_{\text{adm béton}}} = \frac{500\,000}{4} = 125\,000 \text{ mm}^2 = 1250 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{plat}} = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{A_{\text{plat}}} = \sqrt{1250} = 35.4 \text{ cm} \Rightarrow 36 \text{ cm}$$

c) Recherche du diamètre du socle

En principe il faut tenir compte du poids du béton du socle. Comme on ne connaît pas sa hauteur il nous est impossible de déterminer, par avance, le poids de ce socle. D'où, on n'en tiendra pas compte dans un premier temps.

Donc, en ne tenant pas compte du poids du béton, nous avons :

$$\frac{N}{A_{\text{socle}}} \leq \sigma_{\text{adm sol}} \Rightarrow A_{\text{socle}} = \frac{\pi d^2}{4} \geq \frac{N}{\sigma_{\text{adm sol}}}$$

$$\Rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4N}{\pi \sigma_{\text{adm sol}}}} = \sqrt{\frac{4 \times 500 \cdot 10^3}{\pi \times 0.25}} = 1594 \text{ mm} \Rightarrow 160 \text{ cm}$$

d) Recherche de la hauteur du socle

Avec la condition de la pression admissible sol et en appliquant directement l'éq 3.198., on trouve directement la hauteur h_{\min} :

$$p_s \text{ béton } b^2 = p_s \text{ sol } \frac{\pi d_{\text{sol}}^2}{4}$$

Sachant qu'ici : $d_{\text{sol}} = b + 2 h_{\min}$

$$\Rightarrow h_{\min} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{4 p_s \text{ béton } b^2}{\pi p_s \text{ sol}}} - b \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{4 \times 360^2}{\pi \times 0.25}} - 360 \right)$$

$$= 632 \text{ mm} = 0.632 \text{ m}$$

Et on en déduit le diamètre d_{sol} :

$$d_{\text{sol}} = b + 2 h = 360 + 2 \times 632$$

$$= 1624 \text{ mm} \approx 163 \text{ cm}$$

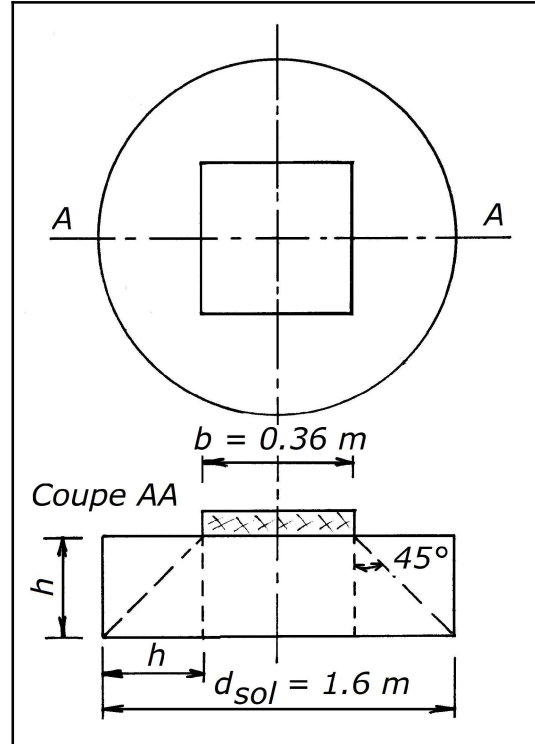


fig.3.26. - Calcul de la hauteur du socle.

Vérification de la hauteur en tenant compte du poids du béton :

$$\frac{N}{A_{\text{sol}}} + (\rho g h)_{\text{béton}} \leq \sigma_{\text{adm sol}}$$

$$\frac{500 \cdot 10^3}{\left(\frac{\pi \cdot 1.6^2}{4} \right)} + 2400 \times 9.81 \times 0.62 = 263 \cdot 10^3 \stackrel{?}{\leq} 250 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2 \Rightarrow \text{KO!}$$

Augmentons le diamètre du socle et prenons 1.7 m. La contrainte au sol devient :

$$\sigma_{\text{sol}} = 232 \cdot 10^3 \leq 250 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2 \Rightarrow \text{OK}$$

La hauteur du socle devient, suivant la coupe AA :

$$h_{AA} = \frac{d_{\text{sol}} - b}{2} = \frac{1.7 - 0.36}{2} = 0.67 \text{ m}$$

Et comme la hauteur a augmenté, le poids du béton aussi, mais de manière faible. Si on refait une vérification, on trouve :

$$\sigma_{\text{sol}} = 236 \cdot 10^3 \leq 250 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2 \Rightarrow \text{OK.}$$

3.10.2. Assises sur mur

Dans le cas de poutres reposant sur un mur, par exemple, on admet en tenant compte de la flexion subies par les poutres, que la pression sur le mur va en diminuant du bord intérieur où elle est maximale au bord extérieur où elle est nulle. La contrainte maximum de la maçonnerie est ainsi le double de celle donnée par la compression simple (la pression sur la maçonnerie est de forme triangulaire).

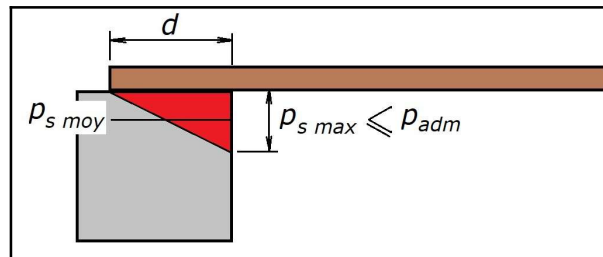


fig.3.27. - Pression "triangulaire" exercée par une poutre sur une assise de mur.

Dans ce cas il faut donc vérifier que la pression moyenne soit inférieure (ou égale) à la moitié de la pression admissible de la maçonnerie. Soit :

$$p_s \text{ moyenne} \leq \frac{p_{adm \text{ maçonnerie}}}{2} \quad (\text{éq. 3.216.})$$

Application 1.16. Une poutrelle en bois 8/23 (75x225) placée sur champ supporte une charge de 7 kN. De combien doit elle pénétrer dans le mur si la pression admissible sur les briques est de 40 N/cm².

Solution :

Application de la formule

Le mur supporte la moitié de la charge totale. Soit :

$$F = 7000/2 = 3500 \text{ N}$$

La poutre est placée sur champ et donc l'épaisseur reposant sur le mur est de 75 mm.

Appliquons la formule :

$$p_s \text{ moyenne} = \frac{F}{e_{\text{poutre}} d} \leq \frac{p_{adm \text{ maçonnerie}}}{2}$$
$$\Rightarrow d \geq \frac{2 F}{e_{\text{poutre}} p_{adm \text{ maçonnerie}}} = \frac{2 \times 3500}{75 \times 0.4} = 233.3 \text{ mm}$$
$$d = 24 \text{ cm}$$

3.11. Descente de charges

Application 3.17. La figure ci-contre donne la coupe du mur d'une façade d'une habitation. La distance de ce mur au mur de refend est de 5 m. La distance au mur de façade arrière est de 10 m. les différentes charges, par m^2 , pour les différents étages sont renseignées sur la figure. La masse volumique des maçonneries est de 1800 kg/m^3 . Quelles est la charge par cm^2 sur le terrain.

Solution :

On effectue les calculs pour **1 m de mur**.

Poids du mur

Section du mur :

$$A_{\text{mur}} = (0.32 \times 1.0) + (0.32 \times 3.5) \\ + (0.42 \times 4) + (0.52 \times 2.5) \\ + (0.62 \times 0.5) = 4.73 \text{ m}^2$$

Poids du mur :

$$P_{\text{mur}} = A_{\text{mur}} l_{\text{mur}} \rho_{\text{mur}} g \\ = 4.73 \times 1 \times 1800 \times 9.81 \\ = 83522 \text{ N}$$

Force due au toit

Hypothèse : le poids de la toiture se répartit par moitié sur ces murs. Soit :

$$P_{\text{toit}} = \frac{1}{2} p_{s \text{ toit}} g l_{\text{toit}} l_{\text{mur}} = \frac{1}{2} \times 120 \times 9.81 \times 10 \times 1 \\ = 5886 \text{ N}$$

Poids des gîtages

La distance au mur de refend est de 5 m. Le mur ne reprendra donc que le poids des gîtages que sur 2.5 m. Soit :

- ▶ Les gîtages donnent ensemble :

$$p_{s \text{ gîtage}} = (100 + 300 + 600) \times 9.81 = 9810 \text{ N/m}^2$$

- ▶ Charge due aux gîtages :

$$P_{\text{gîtage}} = p_{s \text{ gîtage}} \times 2.5 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 9810 \times 2.5 \times 1 = 24525 \text{ N}$$

Charge totale sur la fondation

$$P_{\text{tot}} = 83522 + 5886 + 24525 = 113933 \text{ N}$$

Pression sur la fondation

$$p_{\text{fondation}} = \frac{P_{\text{tot}}}{A_{\text{fondation}}} = \frac{113933}{0.62 \times 1} = 183763 \text{ N/m}^2 = 18.4 \text{ N/cm}^2$$

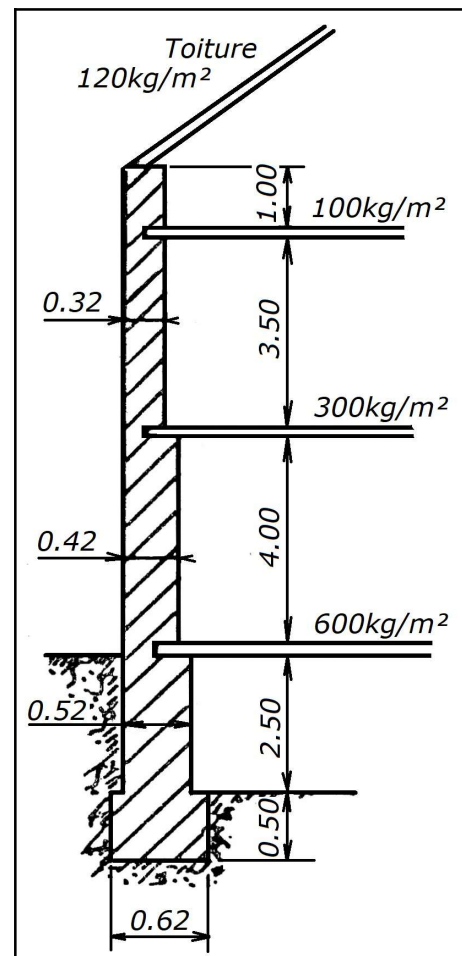


fig.3.28. - Application 3.17.

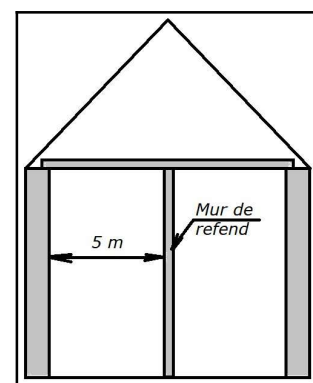


fig.3.29. - Vue en coupe.

3.12. Notions sur les systèmes triangulés

3.12.1. Définitions

Les constructions métalliques faites d'assemblages de profilés (en L, T, I, U ...) par rivets, boulons, soudure, pour la réalisation de ponts, de charpentes, de grandes poutres, sont réalisées en général en "systèmes triangulés" ou "treillis" (fig. 3.30).

Un système triangulé est un assemblage de barres droites (en profilé) constituant des triangles juxtaposés. Le triangle a été pris comme base de ces constructions parce qu'il est la seule figure simple **géométriquement indéformable**. On part donc d'un triangle \overline{ABC} , on ajoute deux nouvelles barres (\overline{BD} et \overline{CD}) à l'un des côtés, puis deux nouvelles barres (\overline{DE} et \overline{CE}) au nouveau triangle ainsi formé, etc...

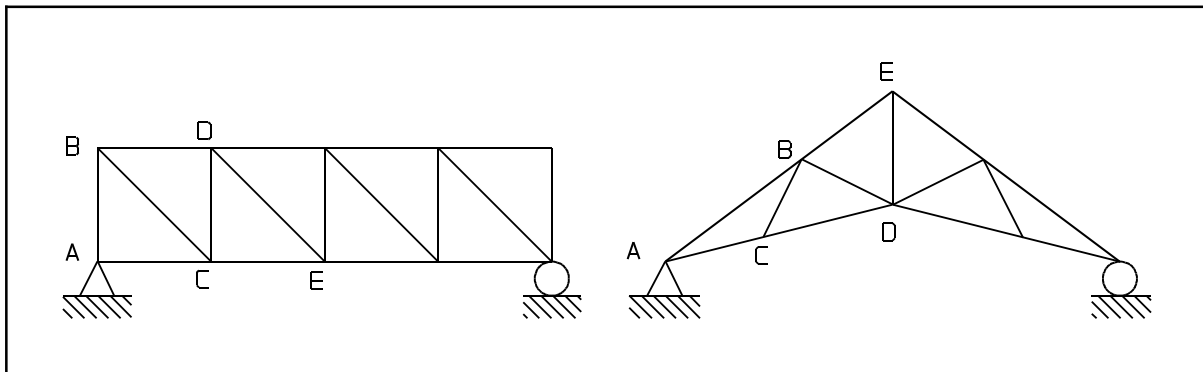


fig.3.30. - Exemple de "treillis".

On appelle "**noeud**" le point de rencontre (ou articulation) de deux ou plusieurs barres (A, B, C... sont des noeuds). Le noeud est donc également l'extrémité des barres qui y aboutissent (le noeud B, par exemple, est l'extrémité des barres \overline{AB} , \overline{CB} et \overline{DB}).

Le calcul des efforts supportés par les barres se fait en posant les hypothèses suivantes :

- [H1] Toutes les charges et sollicitations supportées par le treillis peuvent être ramenées aux noeuds. Une force \vec{f} appliquée à un point N d'une barre \overline{AB} , figure fig. 3.31., sera remplacée par deux forces \vec{f}_1 et \vec{f}_2 parallèles déterminées par les relations :

$$f_1 + f_2 = f \text{ et } f_1 \overline{AN} = f_2 \overline{NB}$$

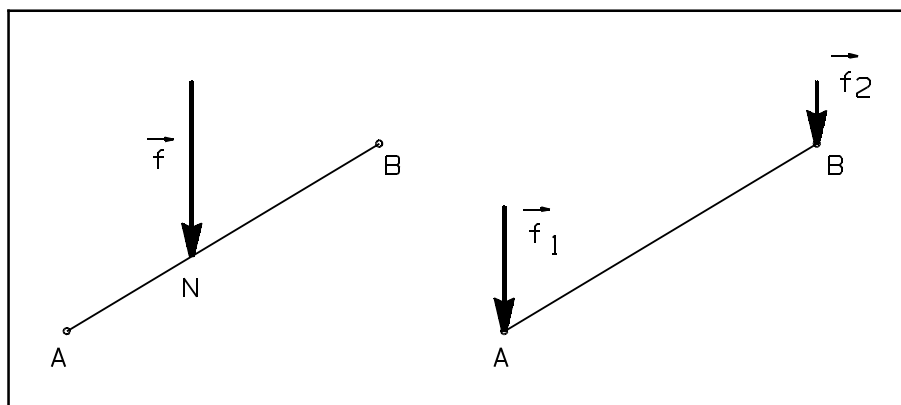


fig.3.31. - Forces aux noeuds.

- [H2] On suppose que le treillis est articulé sans frottement aux noeuds; l'effort exercé par une barre ne pourra être qu'un effort de traction (barre tendue) ou de compression (barre comprimée) **orienté selon l'axe de la barre**; les effets de flexion provoqués par les forces qui s'exercent sur les barres devront donc toujours rester négligeables;
- [H3] On se limitera aux systèmes triangulés plans, avec forces extérieures situées dans le plan du système;
- [H4] On ne traitera que des systèmes triangulés "*isostatiques*" (systèmes dans lesquels on peut déterminer les efforts dans les barres uniquement par les règles de la statique sans qu'il soit nécessaire de calculer les déformations) : on démontrera au cours de Résistance des Matériaux qu'un système triangulé isostatique vérifie la condition :

$$\{b = 2n - 3\}$$

formule dans laquelle : b : représente le nombre de barres
 n : représente le nombre de noeuds.

Cette condition est nécessaire mais non suffisante.

3.12.2. Méthode de calcul des systèmes triangulés

On se propose de calculer l'effort (de traction ou de compression) supporté par chacune des barres; connaissant cet effort, il sera alors possible de déterminer la section de métal à utiliser pour chaque barre et les dimensions des assemblages aux différents noeuds (rivets, boulons, soudure, ... voir cours de Résistance des Matériaux en seconde candidature).

A) Equilibre d'une barre

Etant donné les hypothèses faites, pour la barre \overline{AB} , il faut que la résultante en A des actions du noeud A sur la barre \overline{AB} soit **réciproque** à la résultante en B des actions du noeud B sur la barre \overline{AB} (**fig. 3.32.**).

Réciproquement, une barre ne peut agir sur un noeud considéré auquel elle aboutit que suivant sa direction \overline{AB} . Si la barre est en traction, elle "*tirera*" sur le noeud avec la même intensité que le noeud "*tire*" sur elle.

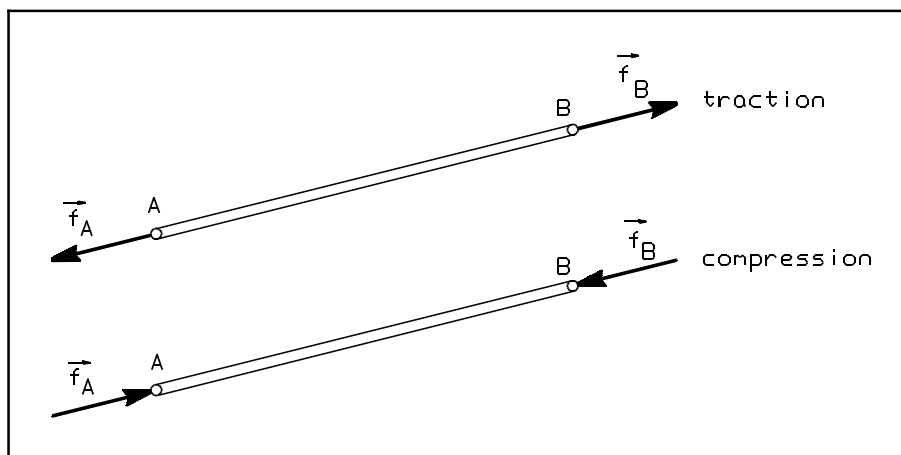


fig.3.32. - Traction - compression.

B) Equilibre d'un noeud

Dans un treillis en équilibre chaque noeud peut être considéré comme un point en équilibre de sorte qu'en faisant la somme vectorielle des forces appliquées à chaque noeud on doit chaque fois obtenir un polygone des forces fermé sur lui-même (**fig. 3.33.**).

Les efforts dus aux barres étant nécessairement dans la direction de la barre (voir hypothèses), s'il n'y a pas plus de **deux** efforts inconnus par noeud, on pourra, à partir de ces éléments, écrire les équations de la statique du noeud considéré. (Pour rappel, en 2D, il n'existe que 2 équations (équilibre des forces) pour l'équilibre d'un point (noeud)).

$$\vec{f}_B + \vec{f}_{AB} + \vec{f}_{CB} + \vec{f}_{EB} + \vec{f}_{DB} = \vec{0}$$

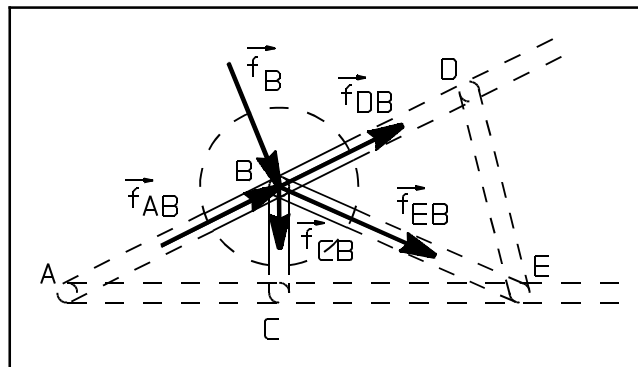


fig.3.33. - Equilibre du noeud.

3.12.3. Méthode des noeuds de Crémona (treillis simples)

La méthode des noeuds de **Crémona**⁽¹⁾ est, en fait, une méthode purement graphique qui est la juxtaposition ordonnée des polygones des forces relatifs aux différents noeuds (voir **chapitre 6 : graphostatique**). Dans ce chapitre-ci nous utiliserons la méthode analytique.

- a. Il faut au départ connaître toutes les forces extérieures appliquées, actives **et** réactives; il faut donc commencer par déterminer les réactions d'appui.
- b. On isole un noeud en laissant les charges qui s'exercent sur lui et en remplaçant toutes les barres qui s'y rattachent par leurs efforts supposés en **traction**.
- c. On étudie ensuite de proche en proche l'équilibre des différents noeuds, de manière qu'à chaque noeud il y ait seulement deux barres dont les forces internes sont encore inconnues, en partant en général d'une extrémité de la structure.
- d. Si l'ouvrage est symétrique (c'est le cas de beaucoup de charpentes) par rapport à un plan vertical par exemple, avec des charges ayant le même plan de symétrie, il est suffisant, en général, d'en étudier la moitié.
- e. Si en un noeud il n'y a qu'une tension de barre inconnue, les équations de la statique relative à ce noeud, servira de contrôle.

⁽¹⁾ Luigi Cremona (1830 [Pavie] - 1903 [Rome]) : mathématicien et homme politique italien.

Noeud B

$$\begin{cases} (\vec{I}_x) \Rightarrow -f_{AB} - f_{BC} \cos 60 + f_{BE} \cos 60 = 0 \\ (\vec{I}_y) \Rightarrow -f_{By} + f_{BC} \cos 30 + f_{BE} \cos 30 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{AB} = +1154.7 \cos 60 - 577.4 \cos 60 = 288.7 \text{ N} \quad \boxed{T}$$

$$\text{Vérif} \Rightarrow 1500 - 1154.7 \cos 30 - 577.4 \cos 30 = 0 \quad \text{Ok}$$

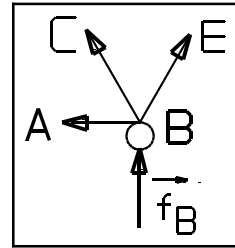


fig.3.38. - Noeud B.

Noeud A

$$\begin{cases} (\vec{I}_x) \Rightarrow -f_{Ax} + f_{AC} \cos 60 + f_{AB} = 0 \\ (\vec{I}_y) \Rightarrow -f_{Ay} + f_{AC} \cos 30 \end{cases}$$

$$(\vec{I}_x) \text{ Vérif} \Rightarrow -866 + 1154.7 \cos 60 + 288.7 = 0 \quad \text{Ok}$$

$$(\vec{I}_y) \text{ Vérif} \Rightarrow -1000 + 1154.7 \cos 30 = 0 \quad \text{Ok}$$

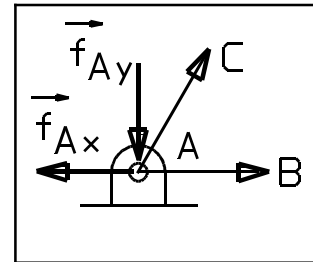


fig.3.39. - Noeud A.

3.12.4. Cas particuliers

Le tableau ci-dessous présente quatre noeuds particuliers, isolés et non chargés d'actions extérieures. On démontre sans peine les propriétés qui en résultent. On observe, dans les géométries 2 et 3, la présence d'efforts normaux nuls, traduisant l'existence de barres à effort nul.

Géométries				
	Barres alignées		Barres 1 et 2 alignées	Barres alignées deux à deux
Propriétés	$f_1 = f_2$	$f_1 = f_2 = 0$	$f_1 = f_2$ $f_3 = 0$	$f_1 = f_4$ $f_2 = f_3$

3.12.5. Méthode des coupures ou méthode de Ritter (treillis simples)

La méthode de Ritter ⁽²⁾ permet de calculer les efforts dans certaines barres choisies à l'avance, sans pour autant faire l'équilibre de tous les nœuds.

Cette méthode consiste à pratiquer une coupure dans la poutre triangulée par une section fictive qui la sépare en 2 tronçons distincts, et qui rencontre que trois barres dont les sollicitations sont inconnues. On isole l'un des tronçons et on écrit qu'il est en équilibre sous l'action des forces connues et inconnues (forces intérieures dans les barres coupées).

On a souvent intérêt à écrire que des équations de moments. Pour que chaque équation ne contienne qu'une seule inconnue, on opère de la façon suivante chaque fois que c'est possible. Pour obtenir l'effort dans une barre coupée, on prend comme centre des moments, *le point de rencontre des 2 autres barres coupées*. Ce point de rencontre peut être situé en dehors du tronçon pris.

Un exemple d'application de la méthode de Ritter ci-dessous.

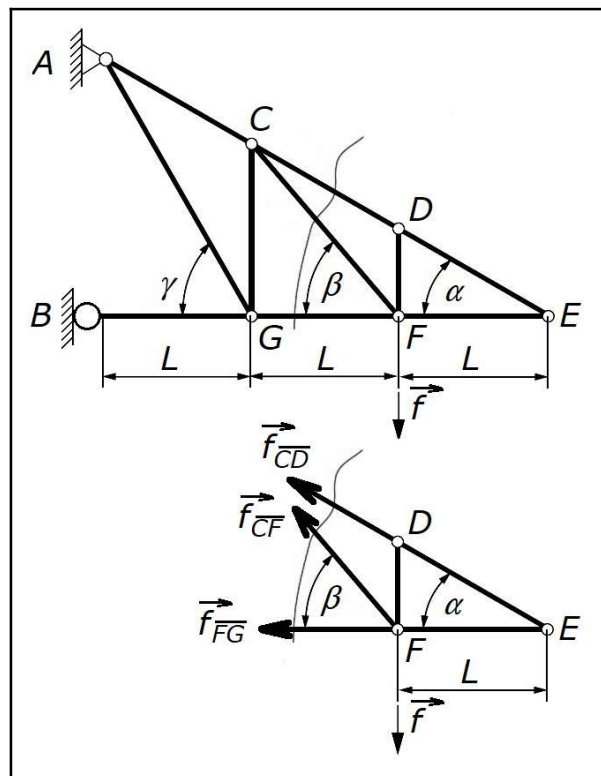


fig.3.44. - Méthode de Ritter.

Si on veut, par exemple, les efforts dans les barres \overline{CD} , \overline{CF} et \overline{FG} , on coupe dans ces 3 barres et on prend, soit le morceau de droite, comprenant dès lors les réactions en A et B, ou le morceau de gauche, comprenant uniquement la force extérieure *f*. Si on ne demande *que* les efforts dans ces barres, nous prendrons le morceau de gauche, cela nous évitera de calculer les réactions en A et B.

Les réactions dans les barres coupées, nous les mettrons tous en **traction** pour effectuer les calculs (comme pour la méthode de Crémona).

⁽²⁾ Karl Wilhelm Ritter (1847 [Liestal] - 1906 [Rämismühle]) : ingénieur suisse.

Nous essayerons, au maximum, d'écrire que des équation de moments, de cette manière nous aurons directement une équation à une inconnue. Soit :

$$\left(\vec{I}_z\right) (\% F) \Rightarrow \left(f_{\overline{CD}} \cos \alpha\right) \frac{\overline{DF}}{L \tan \alpha} = 0 \Rightarrow f_{\overline{CD}} = 0$$

$$\left(\vec{I}_z\right) (\% E) \Rightarrow -\left(f_{\overline{CF}} \sin \beta\right) L + f L = 0 \Rightarrow f_{\overline{CF}} = +\frac{f}{\sin \beta} (\text{traction})$$

$$\left(\vec{I}_z\right) (\% C) \Rightarrow -f_{\overline{FG}} \frac{\overline{CG}}{L \tan \beta} - f L = 0 \Rightarrow f_{\overline{FG}} = -\frac{f}{\tan \beta} (\text{compression})$$

Application 3.19. Dans la poutre treillis ci-dessous, recherchez les efforts dans les barres \overline{CE} , \overline{CF} et \overline{DF} .

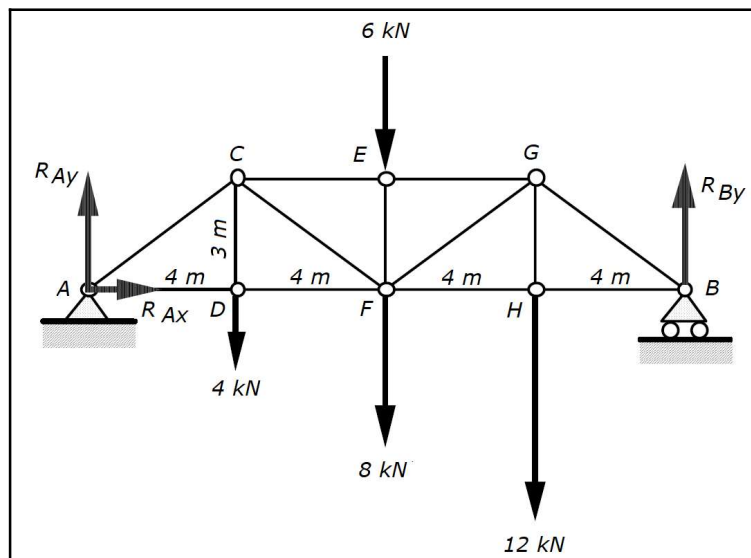


fig.3.45. - Application 3.19.

Solution :

Recherche des réactions d'appuis

Equation de statique (projection suivant les 3 axes) :

$$\left(\vec{I}_x\right) \Rightarrow R_{Ax} = 0 \quad (1)$$

$$\left(\vec{I}_y\right) \Rightarrow R_{Ay} - 4 - 8 - 6 - 12 + R_{By} = 0 \quad (2)$$

$$\left(\vec{I}_z\right) (\% A) \Rightarrow -4 \times 4 - 8 \times 8 - 8 \times 6 - 12 \times 12 + R_{By} = 0 \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow R_{Ay} = 17000 \text{ N}$$

$$(2) \Rightarrow R_{By} = 13000 \text{ N}$$

Isoler - Couper

Isolons la structure à étudier en coupant dans les barres dont on veut trouver les efforts. Soit :

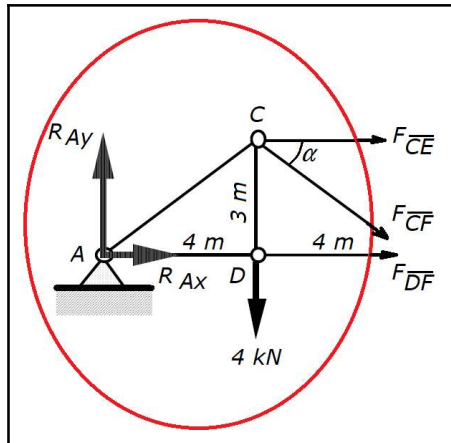


fig.3.46. - Isoler - Couper.

Recherche des efforts dans les barres

Essayons d'écrire, pour rechercher l'effort dans chaque barre, une seule équation. Soit :

$$(\vec{1}_z)(\% C) \Rightarrow 3 \times f_{DF} - 4 \times R_{Ay} = 0 \Rightarrow f_{DF} = \frac{4}{3} \times 13 = 17.33 \text{ kN (traction)}$$

$$(\vec{1}_z)(\% F) \Rightarrow -3 \times f_{CE} + 4 \times 4 - 8 \times R_{Ay} = 0$$

$$\Rightarrow f_{CE} = \frac{16 - 8 \times 13}{3} = -29.33 \text{ kN (compression)}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) = 36.87^\circ$$

$$(\vec{1}_x) \Rightarrow f_{CE} + f_{DF} + f_{CF} \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow f_{CF} = \frac{-f_{CE} - f_{DF}}{\cos \alpha} = \frac{-(-29.33) - 17.33}{\cos 36.87} = 15.0 \text{ kN (traction)}$$

3.13. Dimensionnement des barres suivant l'EUROCODE

{Réf. 9}

3.13.1. Introduction

Une barre tendue transmet un effort de traction entre 2 noeuds de structure. Elle est mise en charge au travers d'assemblages à ses extrémités et cela avec les effets suivants :

- ▶ l'assemblage boulonné (le plus couramment utilisé) implique la présence, dans la barre, des trous destinés à recevoir les boulons. Ces trous réduisent la section résistante aux extrémités de la barre;
- ▶ la résultante des efforts transmis n'agit pas toujours au centre de gravité de la section et, en conséquence, des sollicitations supplémentaires peuvent apparaître.

En principe, tout type de section peut convenir pour réaliser une barre tendue. Le tableau 3.9. reprend les sections les plus courantes.

<i>Type de section de barres tendues et domaines d'utilisation</i>	
Sections	Usages
Cornières, T ou fers en U laminés	Treillis légers, suspentes, contreventements
Sections composées de cornières ou de double U	Treillis (charges moyennes)
Sections laminées en I ou en H, reconstituées ouvertes/fermées	Treillis lourds
Sections tubulaires	Treillis, suspentes, contreventements
Sections composées en treillis ou à étrépillons	Utilisations tombées en désuétude
Sections pleines (ronds, carrés, plats)	Suspentes, contreventements, liernes, tirants
Câbles	Tirants (bâtiments), ponts, toitures suspendues

Tableau 3.8. - Sections et usages des barres tendues.

3.13.2. Vérifications aux ELU

A) Détermination de l'aire de la section nette

L'aire de la section nette A_{net} d'une section transversale de barre tendue est égale à l'aire brute A diminuée des aires des trous de boulons.

En fonction de la disposition des boulons, se présentent les situations suivantes :

- ▶ les trous de boulons sont disposés en rangées parallèles à l'axe de l'élément et orthogonales entre elles (**fig. 3.47. gauche**). L'aire à déduire est la somme des aires des sections des trous dans n'importe quelle section;
- ▶ les boulons sont disposés en quinconce (**fig. 3.47. droit**), l'aire totale à déduire est *la plus grande* des valeurs suivantes :
 - on considère seulement les aires des sections de trous qui se trouvent dans une section perpendiculaire à l'axe de la barre;
 - on considère l'aire des sections de trous situés dans une coupe quelconque, pratiquée

suivant une ligne diagonale ou brisée, diminué des valeurs $s^2 t/4 p$ calculées pour chaque intervalle entre trous le long de la coupe.

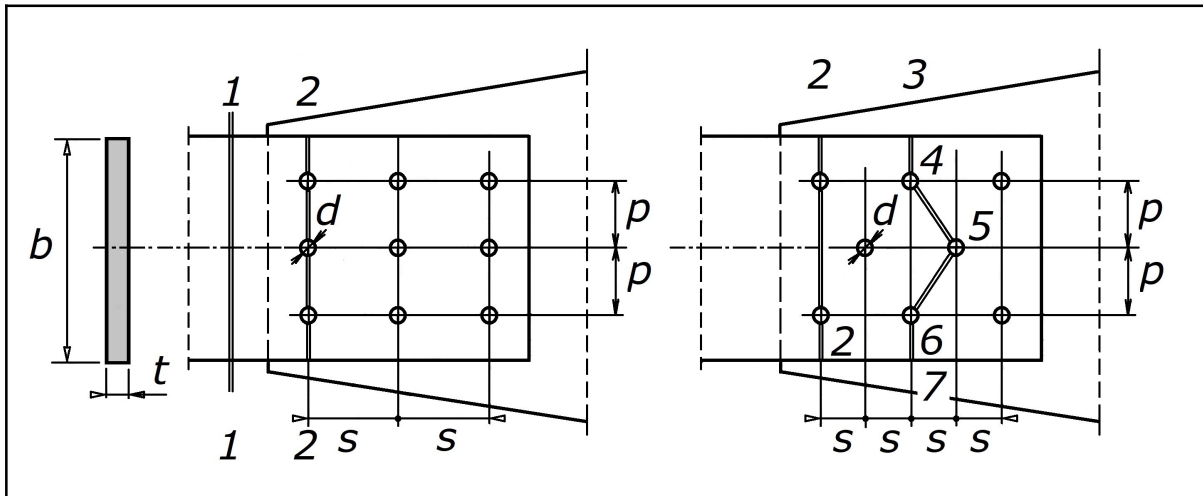


fig.3.47. - Détermination de l'aire de la section nette : rangées parallèles à gauche, en quinconce à droite.

Valeurs de l'aire de la section :

a) Rangées parallèles : la plus petite des valeurs de A_{net} ci-dessous :

$$(1-1) \quad A = b t \quad (\text{éq. 3.286.})$$

$$(2-2) \quad A_{net} = A - n b s_{trous} d t \quad (\text{éq. 3.287.})$$

b) Rangées en quinconces : la plus petite des valeurs de A_{net} ci-dessous :

$$(2-2) \quad A_{net} = A - n b s_{trous} d t \quad (\text{éq. 3.288.})$$

$$(3-4-5-6-7) \quad A_{net} = A - n b s_{trous} d t + \sum \frac{s_i^2 t}{4 p_i} \quad (\text{éq. 3.289.})$$

<u>Notations</u> :	A	aire de la section transversale brute de la barre	mm^2
	A_{net}	aire brute diminuée des aires des sections des trous	mm^2
	b	largeur du plat	mm
	t	épaisseur du plat	mm
	d	diamètre des trous	mm
	s	pas (distance longitudinale entre 2 boulons successifs (// au chargement)	mm
	p	pas (distance transversale entre 2 boulons successifs (\perp au chargement)	mm

B) Vérifications

Remarque préliminaire :

Nous utiliserons ici les notations de l'EUROCODE.

Notations :	A	aire de la section transversale brute de la barre	(= A)	mm^2
	A_{net}	aire brute diminuée des aires des sections des trous		mm^2
	f_y	limite élastique de l'acier	(= R_e ou $R_{p0.2}$)	N/mm^2
	f_u	résistance à la traction de l'acier	(= R_m)	N/mm^2
	N_{Ed}	valeur de l'effort normal de traction	(= N)	N
	$N_{pl, Rd}$	valeur de calcul de la résistance plastique de la section transversale	(= N_{adm})	N
	$N_{u, Rd}$	valeur de calcul de la résistance ultime de la section transversale	(= N_{adm})	N
	γ_{M0}	coefficient partiel pour résistance des sections transversales	(= S)	-
	γ_{M2}	coefficient partiel pour résistance à la rupture des sections transversales	(= S)	-

Dans toutes les sections de la barre tendue, la condition suivante doit être satisfaite :

$$N_{Ed} \leq \min(N_{pl, Rd}; N_{u, Rd}) \quad (\text{éq. 3.290.})$$

Pour rappel :
$$N_{Ed} = 1.35 (\text{Charge permanente}) + 1.5 (\text{Charge mobile ou surcharge})$$

Avec :

$$N_{pl, Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}} \quad (\text{éq. 3.292.}) \quad \gamma_{M0} = 1 \text{ pour les bâtiments}$$

et :

$$N_{u, Rd} = \frac{0.9 A_{net} f_u}{\gamma_{M2}} \quad (\text{éq. 3.294.}) \quad \gamma_{M2} = 1.25 \text{ pour les bâtiments}$$

Application 3.20. Quelle est la charge maximale (sa résistance de calcul) en traction d'une cornière 60 x 60 x 6 en acier S235 ?

Solution :

Caractéristiques de la cornière

Voir catalogue de profilés :

$$A = 6.91 \text{ cm}^2$$

Application de la formule "plastique"

Comme il n'y a pas de trous de boulons, on utilisera la formule **éq. 3.292.** :

$$N_{pl, Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{691 \times 235}{1} = 162\,385 \text{ N} \approx 162 \text{ kN}$$

Application 3.21. Quelle cornière à ailes égales, en S235, choisirons-nous si celle-ci est sollicitée, en position verticale, par un effort (surcharge) normal de traction de 12000 daN ?

Solution :

Recherche de la valeur de l'effort normal de traction pondéré

Hypothèse : on ne tient pas compte du poids de la cornière.

$$N_{Ed} = 1.35(\text{Charge permanente}) + 1.5(\text{Charge mobile ou surcharge})$$

$$= 1.35 \times 0 + 1.5 \times 120\,000 = 180\,000 \text{ N}$$

Application de la formule "plastique"

Comme il n'y a pas de trous de boulons, on utilisera la formule **éq. 3.292** :

$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}} = N_{Ed}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\gamma_{M0} N_{Ed}}{f_y} = \frac{1 \times 180\,000}{235} = 766.0 \text{ mm}^2 = 7.66 \text{ cm}^2$$

Choix du profilé

Dans le catalogue, on choisira un "L" dont la section est supérieure et la plus proche de 7.66 cm².

Soit :

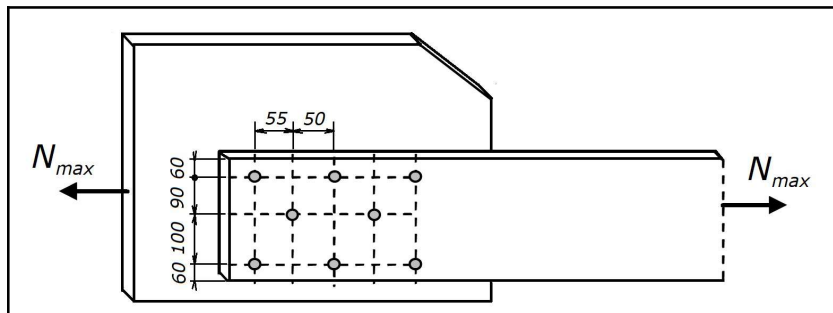
- L 50 x 50 x 9 : A = 8.24 cm²
- L 60 x 60 x 7 : A = 7.98 cm²
- L 63 x 63 x 6.5 : A = 7.85 cm²

Parmi ces profilés, on retiendra celui qui donnera la solution la plus adaptée en tenant compte :

- ▶ du prix d'achat (ou du stock);
- ▶ de la facilité de mise en oeuvre;
- ▶ des possibilités éventuelles de remplir d'autres fonctions;
- ▶ du système d'assemblage (boulonnage, soudage,...);
- ▶ de la réponse au dessin souhaité par le maître d'oeuvre.

Application 3.22.

Déterminer la capacité portante (N_{max}) d'un plat en acier S235 de section 310x14 boulonné ci-contre. Le diamètre des trous est de 20 mm.



Solution :

Application des formules

Dans ce cas-ci, il a des trous et donc il faudra vérifier les 2 formules. Soit :

$$N_{pl,Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}}$$

et :

$$N_{u,Rd} = \frac{0.9 A_{net} f_u}{\gamma_{M2}}$$

Résistance plastique de la section brute

La section brute transversale brute de la barre et :

$$A = b t = 310 \times 14 = 4340 \text{ mm}^2$$

La capacité portante dans ce cas est :

$$N_{pl, Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{4340 \times 235}{1} = 1019900 \text{ N} = 1019.9 \text{ kN}$$

Résistance ultime de la section nette au droit des trous de fixation

Recherche des différentes sections nettes :

a) Ligne droite ABDE (2 trous) :

$$\begin{aligned} A_{net} &= A - nbs_{trous} d t \\ &= 4340 - 2 \times 20 \times 14 \\ &= 3780 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

b) Ligne brisée ABCDE (3trous) :

$$\begin{aligned} A_{net} &= A - nbs_{trous} d t + \sum \frac{s_i^2 t}{4 p_i} \\ &= 4340 - 3 \times 20 \times 14 \\ &\quad + \left(\frac{55^2}{4 \times 90} + \frac{55^2}{4 \times 100} \right) \times 14 \\ &= 3723 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

c) Ligne brisée ABCFG (3trous) :

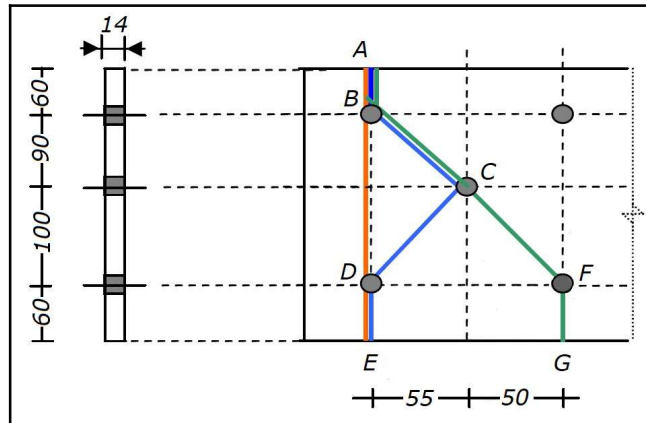
$$\begin{aligned} A_{net} &= A - nbs_{trous} d t + \sum \frac{s_i^2 t}{4 p_i} \\ &= 4340 - 3 \times 20 \times 14 + \left(\frac{55^2}{4 \times 90} + \frac{50^2}{4 \times 100} \right) \times 14 \\ &= 3705 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

La capacité portante dans ce cas est, avec A_{net} minimum et $f_u = 360 \text{ N/mm}^2$:

$$N_{u, Rd} = \frac{0.9 A_{net} f_u}{\gamma_{M2}} = \frac{0.9 \times 3705 \times 360}{1.25} = 960336 \text{ N} = 960.3 \text{ kN}$$

Conclusion

La capacité portante de cet assemblage est donc de 960.3 kN.



3.14. Effet de la force centrifuge sur les solides en rotation

Il est bien connu qu'aux grandes vitesses de rotation les pièces, tels les disques des turbines à gaz et à vapeur, les pierres des rectifieuses, etc., peuvent révéler des déformations permanentes notables, et même être détruites. Examinons le cas d'une tige (ailette de turbine, ...) ainsi que celui d'un disque en rotation rapide.

3.14.1. Solide de section constante en rotation uniforme

Déterminons les contraintes, due à l'effet centrifuge, dans un solide de section A constante en rotation uniforme.

En vertu du principe de d'Alembert, la force dN doit être dirigée en sens contraire de l'accélération, c'est-à-dire à partir de l'axe.

$$dN = a_x dm = (\omega^2 x)(\rho A dx)$$

<u>Notations</u> :	a_x	accélération "centrifuge"	m/s^2
	dm	masse élémentaire	N
	ω	vitesse de rotation	rad/s
	ρ	masse volumique du solide	kg/m^3
	A	section constante du solide	m^2
	R	longueur du solide	m

La contrainte devient :

$$d\sigma = \frac{dN}{A} \Rightarrow \sigma = \int_r^R \frac{(\omega^2 x)(\rho A dx)}{A}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (R^2 - r^2) \quad (\text{éq. 3.314.})$$

La contrainte maximale se situe en $r = 0$:

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2 \quad (\text{éq. 3.316.})$$

Et l'allongement se calcule par :

$$\varepsilon = \frac{du}{dr} = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow u = \Delta R = \int \frac{\sigma}{E} dr = \int \frac{1}{2E} \rho \omega^2 (R^2 - r^2) dr$$

$$\Rightarrow \Delta R = \frac{1}{2E} \rho \omega^2 \left(R^2 r - \frac{r^3}{3} \right) \quad (\text{éq. 3.318.})$$

L'allongement maximal se situe en $r = R$:

$$\Delta R_{\max} = \frac{1}{3E} \rho \omega^2 R^3 \quad (\text{éq. 3.320.})$$

On remarquera que ni la contrainte, ni l'allongement ne sont fonction de la section A du solide en rotation.

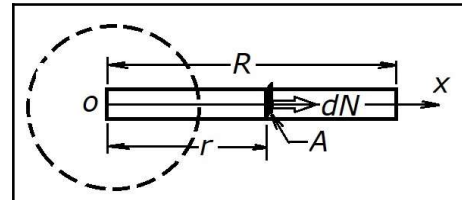


fig.3.50. - Solide en rotation uniforme.

Application 3.23. Une des 3 pales en composite d'une éolienne de longueur $l = 15\text{ m}$, de section A considérée comme constante, de masse volumique $\rho = 2\,000\text{ kg/m}^3$ tourne à une vitesse de rotation maximale de $n = 40\text{ tr/min}$. Calculer la contrainte maximale due uniquement à l'effet centrifuge ainsi que son allongement maximal si $E = 30\text{ GPa}$.

Solution :

Contrainte maximale

Cette contrainte se situe à la base de la pale de l'éolienne. Soit :

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2 = \frac{1}{2} \times 2\,000 \times \left(\frac{2 \times \pi \times 40}{60} \right)^2 \times 15^2 = 3.95 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 3.95 \text{ MPa}$$

Allongement maximal

La pale s'allonge de :

$$\Delta R_{\max} = \frac{1}{3E} \rho \omega^2 R^3 = \frac{1}{3 \times 30 \cdot 10^6} \times 2\,000 \times \left(\frac{2 \times \pi \times 40}{60} \right)^2 \times 15^3 = 1.32 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1.31 \text{ mm}$$

Remarque

Une pale d'éolienne subit notamment d'autres contraintes (flexion, torsion) due notamment à sa forme et à sa fonction.

3.14.2. Disque d'épaisseur constante en rotation uniforme

Considérons un disque tournant à vitesse angulaire constante. On supposera pour la simplicité qu'il est d'épaisseur constante e . Le plus simple pour déterminer les contraintes dans le disque est d'utiliser le principe de d'Alembert et d'introduire en qualité de forces extérieures des forces d'inertie réparties dans le volume du disque. Les forces dN sont donc dirigées en sens contraire de l'accélération, c'est-à-dire à partir de l'axe.

Nous n'entrerons pas dans le détail de la démonstration qui est bien développée dans les référence données.

Sur le contour intérieur du disque les conditions sont moins définies. En effet, d'ordinaire le disque est fixé par un moyen ou un autre à un arbre. Si l'arbre et le disque forment un tout (**fig. 3.52. a**)), on peut prolonger le disque jusqu'à l'axe de l'arbre et, négligeant le rôle de support de l'arbre, considérer en première approximation que le disque est plein (**fig. 3.52. b**)). Dans ce cas le point $r = 0$ appartient au disque.

Après développement, on obtient :

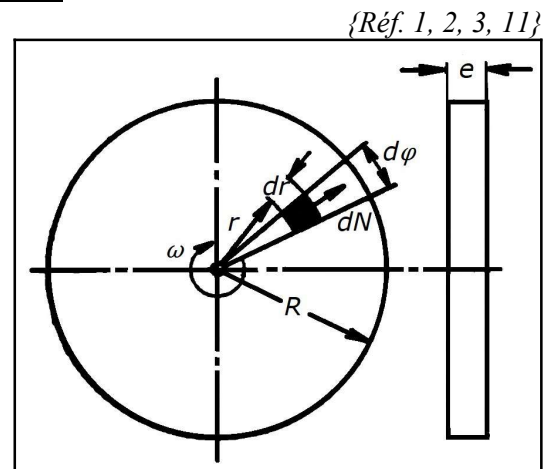


fig.3.51. - Disque d'épaisseur constante soumis à l'effet centrifuge.

$$\sigma_r = \frac{\rho \omega^2}{8} (3 + \nu) (R^2 - r^2)$$

$$\sigma_t = \frac{\rho \omega^2}{8} (3 + \nu) \left(R^2 - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 \right) \quad (\text{éq. 3.324.})$$

Notations : ω vitesse de rotation rad/s
 ρ masse volumique du disque kg/m³
 R rayon du disque m
 ν coefficient de Poisson -

Les contraintes maximales se situent en $r = 0$:

$$\sigma_{r \max} = \sigma_{t \max} = \frac{\rho \omega^2}{8} (3 + \nu) R^2 \quad (\text{éq. 3.326.})$$

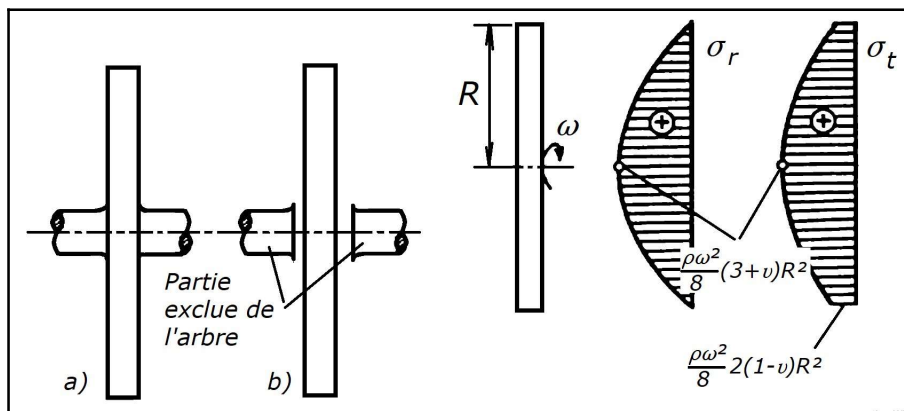


fig.3.52. - Disque plein en rotation : hypothèse.

Les épures des contraintes pour ce cas sont représentées à la figure **fig. 3.52.**

Si le disque est traversé par un trou circulaire de rayon a et si sa liaison avec l'arbre est lâche (**fig. 3.53.**), on peut admettre que sur le contour intérieur la contrainte σ_r est également nulle.

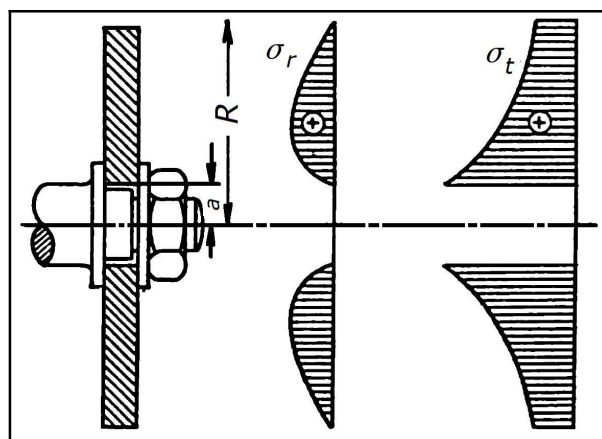


fig.3.53. - Disque percé : hypothèse.

Les formules s'écrivent alors dans ce cas :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\rho \omega^2}{8} (3 + \nu) \left(R^2 + a^2 - \frac{a^2 R^2}{r^2} - r^2 \right) \\ \sigma_t &= \frac{\rho \omega^2}{8} (3 + \nu) \left(R^2 + a^2 + \frac{a^2 R^2}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 \right) \end{aligned} \right\} \text{(éq. 3.327.)}$$

Les épures des contraintes construites conformément à ces formules pour $R = 5a$ sont représentées à la figure **fig. 3.53**.

Les contraintes maximales σ_t se situent en $r = \sqrt{aR}$:

$$\sigma_{r \max} = \frac{\rho \omega^2}{8} (3 + \nu^2) \left(1 - \frac{a}{R} \right)^2 R^2 \text{ (éq. 3.330.)}$$

Quant aux contraintes maximales σ_r , elles se situent en $r = a$:

$$\sigma_{t \max} = \frac{\rho \omega^2}{4} (3 + \nu) \left(R^2 + \frac{1 - \nu}{3 + \nu} a^2 \right) \text{ (éq. 3.332.)}$$

Les contraintes maxima dans le disque ont toujours lieu dans la partie centrale. Aussi les disques de turbines tournant à grande vitesse sont-ils en général d'épaisseur variable. Ils sont renforcés en épaisseur au voisinage du centre.

Il est intéressant de noter que lorsque le rayon intérieur est très petit, c'est-à-dire lorsque a est voisin de zéro, il existe au bord du trou une brusque variation de la contrainte σ_r . Dans ce cas :

$$\sigma_{t \max} = \frac{\rho \omega^2}{4} (3 + \nu) R^2 \text{ (éq. 3.333.)}$$

Quant aux déformations (allongements), elles peuvent se calculer de la manière suivante :

$$\Delta R = \frac{\rho \omega^2}{4} \frac{R}{E} \left((1 - \nu) R^2 + (3 + \nu) a^2 \right) \text{ (éq. 3.334.)}$$

$$\Delta a = \frac{\rho \omega^2}{4} \frac{a}{E} \left((3 + \nu) R^2 + (1 - \nu) a^2 \right) \text{ (éq. 3.335.)}$$

3.14.3. Anneau mince en rotation uniforme

Dans l'autre cas extrême, lorsque le rayon intérieur tend vers le rayon extérieur du disque ($a \rightarrow R$), l'équation **éq. 3.332** devient :

$$\sigma_{t \max} = \rho \omega^2 R^2 \text{ (éq. 3.337.)}$$

Cette contrainte, pour les anneaux minces est constante dans l'épaisseur. La contrainte radiale étant, dans ce cas, nulle.

C'est l'équation concernant les anneaux minces en rotation. On peut voir que, dans le cas du disque percé d'un trou en son centre, la contrainte maximum ne varie pas beaucoup avec le rayon du trou; la valeur correspondant à un anneau très mince n'est que de 20 pour cent supérieure à la valeur correspondant au tout petit trou.