

CHAPITRE 4. CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES DES SECTIONS PLANES	- 4.1 -
4.1. Introduction	- 4.1 -
4.2. Moment statique et centre de gravité.	- 4.1 -
4.2.1. Définition du moment statique.	- 4.1 -
4.2.2. Définition et recherche du centre de gravité.	- 4.2 -
A) Attraction universelle (Newton).	- 4.2 -
B) Principe de détermination de G	- 4.2 -
C) Détermination expérimentale de G	- 4.3 -
D) Simplifications (si corps homogène)	- 4.3 -
4.2.3. Marche à suivre.	- 4.4 -
4.2.4. Les théorèmes de Guldin	- 4.6 -
A) Premier théorème de Guldin (théorème des surfaces)	- 4.6 -
B) Deuxième théorème de Guldin (théorème des volumes)	- 4.7 -
4.3. Moment d'inertie	- 4.8 -
4.3.1. Définition	- 4.8 -
4.3.2. Cas particulier : les systèmes plans	- 4.8 -
4.3.3. Théorème de König-Huyghens (changement d'axe)	- 4.10 -
4.3.4. Marche à suivre.	- 4.11 -
4.4. Moments résistants	- 4.21 -
4.5. Rayon de giration.	- 4.21 -

CHAPITRE 4. CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES DES SECTIONS PLANES

4.1. Introduction

La résistance qu'une barre offre à différentes formes de déformations dépend souvent non seulement du matériau dont il est fait et de ses dimensions, mais aussi de la configuration de son axe, de la forme des sections transversales ainsi que de leur disposition par rapport aux charges de sollicitations. Examinons les caractéristiques géométriques principales des sections transversales d'une barre en faisant abstraction des propriétés physiques de celle-ci. Ces caractéristiques sont : *aire des sections transversales, moment statique, moment d'inertie, moment résistant, rayon de giration.*

Dans la suite de ce chapitre nous développerons les notions de : *moment d'inertie, moment statique, moment résistant et de rayon de giration.*

4.2. Moment statique et centre de gravité

4.2.1. Définition du moment statique

Une première notion que nous utiliserons en résistance des matériaux est la notion de *Moment statique* noté S . Nous le définirons uniquement dans le cas des surfaces.

Définition : Le moment statique d'une section est la *somme des produits de surfaces* élémentaires de cette section par *la distance* d à un élément de référence r qui peut être un point, une droite ou un plan.

$$S_r = A d + A' d' + A'' d'' + \dots$$

ou :

$$S_r = \sum_{i=1}^n A_i d_i \quad (\text{éq. 4.2.})$$

L'unité du moment statique, pour une surface, est la longueur à la puissance trois (m^3).

Ce qui se passe, c'est qu'en résistance des matériaux, l'élément de référence pour calculer les moments statiques est en général un axe.

Et en pratique, on utilisera surtout ces moments statiques par rapport aux axes de références qui se noteront : S_x et S_y . Dès lors (éq. 4.2.) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_x = \sum_{i=1}^n A_i y_i \\ S_y = \sum_{i=1}^n A_i x_i \end{array} \right. \quad (\text{éq. 4.3.})$$

Conclusions :

- ▶ le moment statique par rapport à un axe passant par le centre géométrique est nul;
- ▶ le moment statique d'une surface d'aire A est égal au produit de l'aire A par la distance de son centre de gravité à l'axe;

4.2.2. Définition et recherche du centre de gravité

A) Attraction universelle (Newton)

Newton ⁽¹⁾ a montré, que deux corps (**fig. 4.1.A**), de masses (quantités de matière) M et m et qui sont séparés d'une distance d , s'attirent avec une force f proportionnelle au produit des masses; inversement, proportionnelle au carré de leur distance.

$$f = k \frac{M m}{d^2} \text{ (éq. 4.4.)}$$

k étant la constante de gravitation universelle.

Cas particulier : la Terre (fig. 4.1.B), attire les corps avec une force f particulière qu'on appelle *poids* et qui est représentée par la lettre p . Les caractéristiques du vecteur poids sont :

- ▶ direction : verticale;
- ▶ sens : de haut en bas;
- ▶ intensité : $Poids = k \frac{M m}{d^2}$ variable suivant la latitude et l'altitude,
- ▶ point d'application : G, appelé *centre de gravité*.

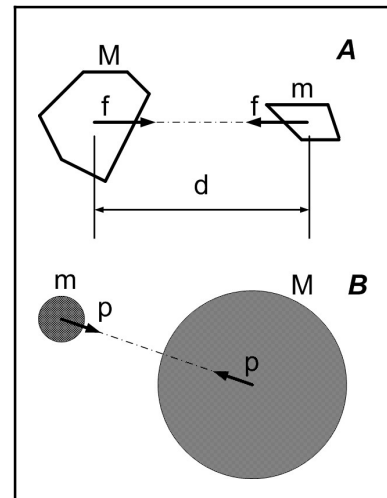


fig. 4.1. - Attraction universelle.

Définition : le centre de gravité d'un corps est le point d'application de la force pesanteur (poids).

B) Principe de détermination de G

Considérons un corps C dans une position A et, par la pensée, décomposons-le en petits éléments dont les poids $p, p', p''...$ sont connus. Ces forces $p, p', p''...$ sont des forces parallèles et de même sens. Il nous est possible de rechercher la résultante : $P = \sum p_i$ qui aura la direction xx mais dont on ignore le point d'application.

Considérons le même corps C dans une position B différente de la position A, mais toujours décomposé, par la pensée, en petits éléments dont les poids sont $p, p', p''...$

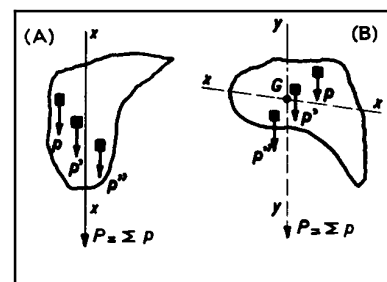


fig. 4.2. - Détermination de G

Il nous est possible de rechercher la résultante : $P = \sum p_i$ mais qui aura cette fois la direction yy.

L'intersection de xx et de yy donnera le point d'application de la résultante qui est le centre de gravité G cherché.

⁽¹⁾ Newton, Isaac (1642 ou 1643 [National Trust - Woolsthorpe Manor] - 1727 [Londres]) : mathématicien, physicien, philosophe, alchimiste, astronome et théologien anglais, puis britannique.

C) Détermination expérimentale de G

On peut déterminer G expérimentalement en suspendant le corps tantôt par un point tantôt par un autre et en recherchant l'intersection des deux verticales V. Deux suspensions suffisent.

Une autre méthode expérimentale consiste à poser le corps en équilibre sur une arête vive horizontale. G se trouve dans le plan vertical π qui contient l'arête. Trois poses sont nécessaires et G est à l'intersection des trois plans.

D) Simplifications (si corps homogène)

(Important !)

- ▶ Quand le corps possède un plan diamétral le centre de gravité G est dans ce plan. (En particulier quand le corps possède un plan de symétrie : G est dans ce plan.);
- ▶ Quand un corps possède une ligne diamétrale (ou diamètre) : G est sur ce diamètre (En particulier, quand le corps possède un axe de symétrie : G est sur cet axe.);
- ▶ Quand un corps possède un centre de symétrie, ce point est le centre de gravité G.

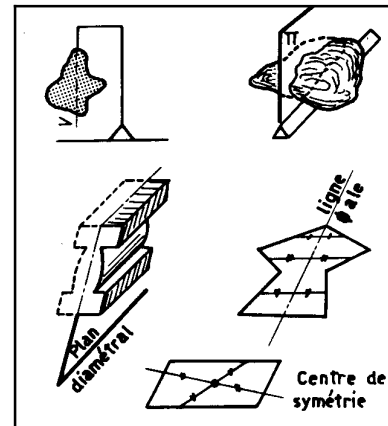


fig. 4.3. - Symétrie.

E) Détermination analytique de G

Décomposons le corps en petits éléments dont les poids $p, p', p'' \dots$ sont connus.

Comme ces forces sont parallèles, on sait que la résultante :

$$P = \sum p_i .$$

Recherchons la position de P et pour ce faire, appliquons le *théorème de Varignon* ⁽²⁾ de la façon suivante :

- ▶ Choisissons un plan xx quelconque;
- ▶ mesurons les distances x, x', x'', \dots des efforts p, p', p'' au plan xx;
- ▶ d'après Varignon, on peut écrire :

$$P \times X = p x + p' x' + p'' x'' + \dots$$

$$\text{D'où : } X = \frac{p x + p' x' + p'' x'' + \dots}{P} = \frac{\sum p_i x_i}{P}$$

G se trouve dans le plan α (1^{er} lieu).

- ▶ On changera le corps de position et on considérera un plan yy.

En répétant l'opération similaire, on trouvera la position du plan β dans lequel se trouvera G (2^{ème} lieu). On changera encore une fois le corps de position et on trouvera que G devra se trouver dans le plan γ (3^{ème} lieu).

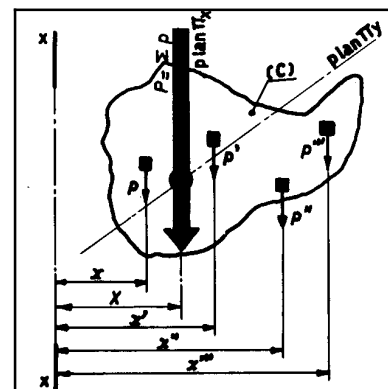


fig. 4.4. - Détermination de G.

⁽²⁾ Varignon, Pierre (1654 [Caen] - 1722 [Paris]) : jésuite, mathématicien français.

L'intersection des trois plans donnera G.

Des simplifications apparaîtront quand :

- ▶ les volumes seront plus réguliers;
- ▶ on aura affaire aux surfaces;
- ▶ on aura affaire aux lignes.

4.2.3. Marche à suivre

Pour la détermination du centre de gravité, nous avons 2 grandes façons de procéder.

A) Système discret

Dans le cas où l'on peut décomposer la surface en plusieurs parties dont on peut connaître facilement les grandeurs de ces petites surfaces ainsi que leur centre de gravité, on peut utiliser les formules générales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} \\ y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} \end{array} \right. \quad (\text{éq. 4.11.})$$

La marche à suivre sera dès lors la suivante :

1. Traçons un système d'axes (x; y) rectangulaires arbitraire.
2. Divisons la figure en parties simples.
3. Au moyen des équations *éq. 4.11.*, déterminons son centre de gravité. Les coordonnées de G seront fonction du systèmes d'axes utilisés.

B) Système continu

Dans le cas d'une surface indécomposables en petites surfaces simples, il faut passer par le calcul intégral. (Voir cours de mécanique chapitre 4.)

Application 4.1. Calculer la position du centre de gravité de la figure ci-contre.

Solution :

Positionnement des axes

Le centre de gravité G se trouve sur l'axe de symétrie y.

Donc prenons comme système d'axes, l'axe Ox passant par la base du "U" et comme axe Oy, l'axe de symétrie.

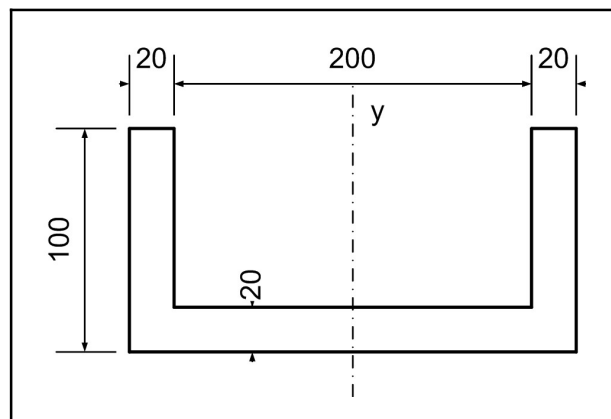


fig. 4.5. - Application 4.1.

Décomposons en surfaces simples.

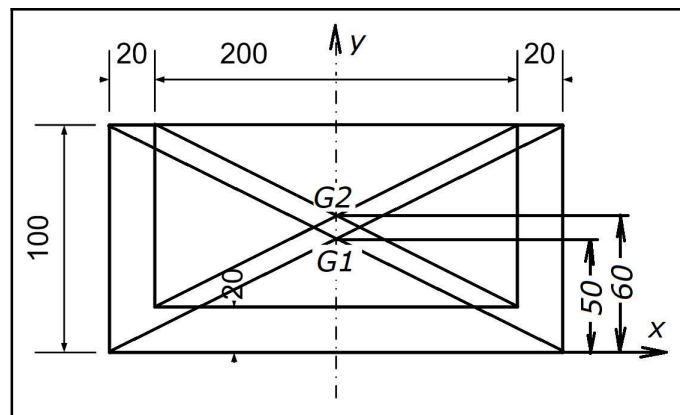


fig. 4.6. - Décomposition en 2 surfaces (rectangles) simples.

Soit :

A_1 le “grand” rectangle (100 x 240) avec $y_{G1} = 50 \text{ mm}$

A_2 le “petit” rectangle (80 x 200) avec $y_{G2} = 60 \text{ mm}$

A noter que cette surface est “négative” puisqu’elle est “enlevée”.

$$x_G = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{(240 \times 100) \times 0 - (200 \times 80) \times 0}{(240 \times 100) - (200 \times 80)} = 0 \text{ mm} \quad (\text{Évident})$$

$$y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{(240 \times 100) \times 50 - (200 \times 80) \times 60}{(240 \times 100) - (200 \times 80)} = 30 \text{ mm}$$

4.2.4. Les théorèmes de Guldin

Il existe deux théorèmes de Guldin ⁽³⁾, l'un qui s'occupe des surfaces et l'autre qui s'occupe des volumes. La démonstration de ces théorèmes ressort du domaine de la géométrie dans l'espace et ne sera pas abordée ici.

A) Premier théorème de Guldin (théorème des surfaces)

Définition : La surface engendrée A_l par la révolution complète, autour d'un axe xx , d'une ligne l située dans le même plan que xx et ne le traversant pas, est égale au produit de la longueur de la ligne par la longueur de la circonférence décrite par le centre de gravité.

Guldin a montré que :

$$A_l = 2 \pi \overline{OG} l \quad (\text{éq. 4.16.})$$

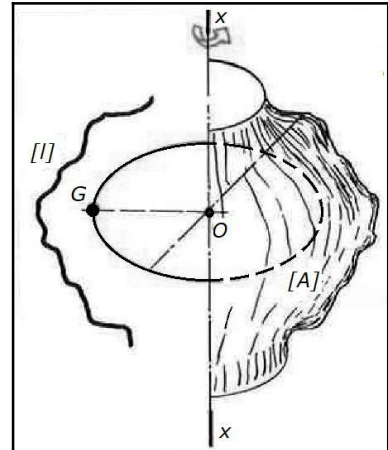


fig. 4.7. - Guldin : premier théorème.

<u>Notations :</u>	l	longueur de la ligne	m
	A_l	la surface de révolution	m^2
	\overline{OG}	distance entre le centre de rotation et le centre de gravité de la ligne	m
	$2 \pi \overline{OG}$	représentant la longueur de la circonférence décrite par G, centre de masse de la courbe l (le centre de gravité G ne se trouvant pas nécessairement sur la courbe l)	m

Application 4.2. Recherchez la surface latérale d'un tore (surface d'une chambre à air) dont on connaît : le rayon de la circonférence $r = 0.10 \text{ m}$ et le rayon d'enroulement $R = 0.25 \text{ m}$.

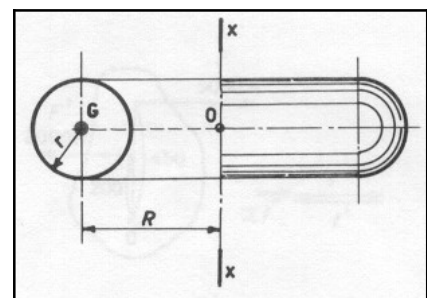


fig. 4.8. - Application 4.2.

Solution :

Appliquons Guldin

$$\begin{aligned} A_l &= 2 \pi \overline{OG} l \\ &= 2 \pi \times R \times (2 \pi r) \\ &= 4 \pi^2 R r = 4 \times \pi^2 \times 0.25 \times 0.1 = 0.99 \approx 1 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

⁽³⁾ Guldin, Paul (Guldin Habakuk) (1577 [Mels] - 1643 [Graz] : jésuite suisse, astronome et mathématicien.

B) Deuxième théorème de Guldin (théorème des volumes)

Définition : Le volume engendré V_A par la révolution complète, autour d'un axe xx , d'une surface A située dans le même plan que xx et ne le traversant pas, est égale au produit de la surface de la ligne par la longueur de la circonférence décrite par le centre de gravité.

Guldin a montré que :

$$V_A = 2 \pi \overline{OG} A \quad \text{(éq. 4.20.)}$$

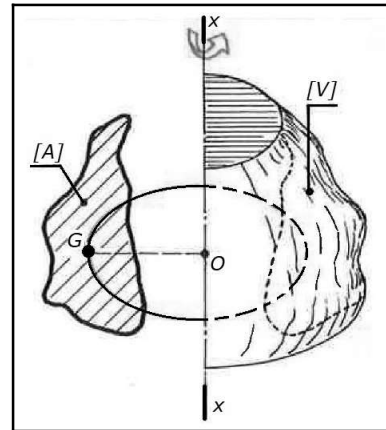


fig. 4.9. - Guldin : second théorème.

Notations :	A	surface	
	V_A	le volume de révolution	m^3
	\overline{OG}	distance entre le centre de rotation et le centre de gravité de la surface	m
	$2 \pi \overline{OG}$	représentant la longueur de la circonférence décrite par G, centre de masse de la surface A (le centre de gravité G ne se trouvant pas nécessairement sur la surface A)	m

Application 4.3. Recherchez le centre de gravité d'un demi-cercle de rayon $r = 0.7 \text{ m}$.

Solution :

Appliquons Guldin

$$V_A = 2 \pi \overline{OG} A \Rightarrow \overline{OG} = \frac{V_A}{2 \pi A}$$

Avec : volume d'une sphère : $V_A = \frac{4}{3} \pi r^3$

Surface d'un $\frac{1}{2}$ disque : $A = \frac{1}{2} \pi r^2$

$$\overline{OG} = \frac{\left(\frac{4}{3} \pi r^3\right)}{2 \pi \left(\frac{1}{2} \pi r^2\right)} = \frac{4r}{3\pi} \Rightarrow \overline{OG} = x = \frac{4 \times 0.7}{3 \times \pi} = 0.297 \text{ m}$$

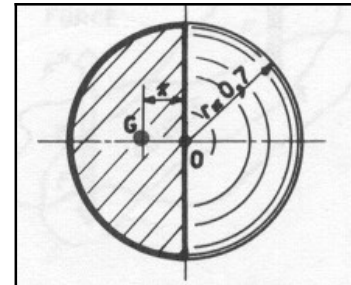


fig. 4.10. - Application 4.3.

4.3. Moment d'inertie

4.3.1. Définition

Définition : Nous définirons le moment d'inertie d'un corps comme étant la somme des produits de masses élémentaires de ce corps par le produit du carré de leur distance d à un élément de référence r qui peut être un point, une droite ou un plan.

$$J_r = m d^2 + m' d'^2 + m'' d''^2 + \dots \quad \text{ou} \quad \boxed{J_r = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2} \quad (\text{éq. 4.28.})$$

L'unité du moment d'inertie (de masse) est une masse multipliée par une distance au carré (kgm^2).

Le moment d'inertie caractérise ainsi grossièrement la dispersion des masses autour de l'élément de référence : il est d'autant plus grand qu'il y a plus de masses élevées à grande distance de l'élément de référence.

4.3.2. Cas particulier : les systèmes plans

Le cas des systèmes plans est particulièrement important en résistance des matériaux. On peut toujours réécrire la définition du moment d'inertie (éq. 4.28.) de la manière suivante :

$$I_r = \sum_{i=1}^n (\rho A_i l_i) d_i^2 \quad (\text{éq. 4.29.})$$

<u>Notations</u> :	ρ	la masse volumique	kg/m^3
	A_i	la section i	m^2
	l_i	la longueur de la section i	m

et on peut montrer que dans le cas d'une **surface plane**, le moment d'inertie, si la pièce est homogène, devient :

$$\boxed{I_r = \sum_{i=1}^n A_i d_i^2} \quad (\text{éq. 4.30.})$$

car, de par les hypothèses de la résistance des matériaux, le matériau considéré est homogène, isotrope et continu et dès lors, pour une section donnée, on peut "oublier" : ρl_i , et transformer ainsi la masse m en surface A .

L'unité du moment d'inertie (de surface) est une surface m^2 multipliée par une distance au carré (m)² : ce qui donne une longueur exposant 4 : m^4 .

Ce qui se passe, c'est qu'en pratique en résistance des matériaux, l'élément de référence pour calculer les moments d'inertie sont en général des axes.

On peut par ailleurs montrer qu'il existe deux directions (orthogonales entre elles) pour lesquelles le moment d'inertie correspondant est un extremum local. Si le point d'intersection des deux directions se situe au centre de gravité G de la section, ces deux directions seront appelées : **axes centraux principaux d'inertie (A.C.P.I.)**, et les moments d'inertie correspondant : **moments d'inertie principaux**.

Remarque :

Si la section possède un (ou plusieurs) axe(s) de symétrie, celui-ci (ceux-ci) est (sont) nécessairement un (des) A.C.P.I.

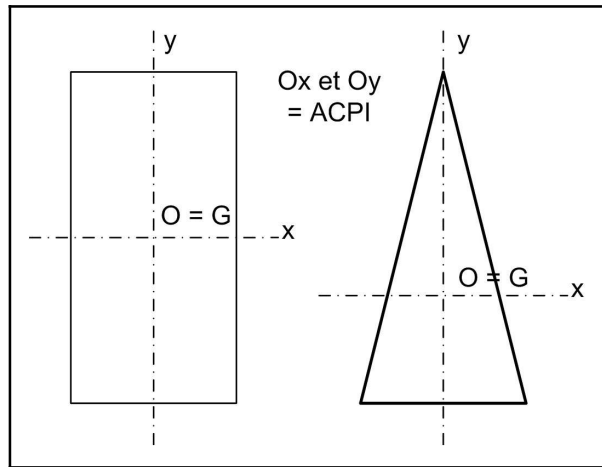


fig. 4.11. - ACPI = axe de symétrie.

Et en pratique, on utilisera surtout ces moments d'inertie par rapport à ces A.C.P.I. Axes qui se noteront : x et y. Dès lors (éq. 4.29) devient :

$$\left. \begin{array}{l} I_x = \sum_{i=1}^n A_i y_i^2 \\ I_y = \sum_{i=1}^n A_i x_i^2 \end{array} \right\} \text{(éq. 4.32.)}$$

Le moment d'inertie particulier par rapport à "O" (appelé pôle), c'est-à-dire, en fait, par rapport à un axe perpendiculaire à la surface et passant par l'intersection des deux axes x et y (le point "O" étant le centre de gravité G de la surface), s'appelle : **inertie polaire I_O** et vaut, dans le plan :

$$I_O = I_x + I_y \text{ (éq. 4.33.)}$$

Le calcul proprement dit de ces moments d'inertie est relativement complexe (on fait appel au calcul intégral). C'est pourquoi, les moments d'inertie les plus habituels se trouvent déjà consignés dans des tableaux .

Cette notion de moment d'inertie de surface est importante car elle permettra de comparer la manière dont réagit une forme de section par rapport à un autre, sous l'influence de diverses charges extérieures.

4.3.3. Théorème de König-Huyghens (changement d'axe)

Le théorème de König ⁽⁴⁾-Huyghens ⁽⁵⁾ (aussi appelé théorème du changement d'axe) permet de calculer un moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à un axe passant par le centre de gravité de la surface et dont on connaît déjà le moment d'inertie. Il s'énonce comme suit (**fig. 4.13.**) :

$$I_a = I_{x_p} + A d^2 \quad (\text{éq. 4.34.})$$

<u>Notations</u> :	I_{x_p}	inertie par rapport à l'axe passant par le centre de gravité G de la surface (connu) (moment d'inertie propre)	m^4
	I_a	inertie par rapport à un axe parallèle à Ox	m^4
	A	surface de la section	m^2
	d	distance séparant les deux axes	m

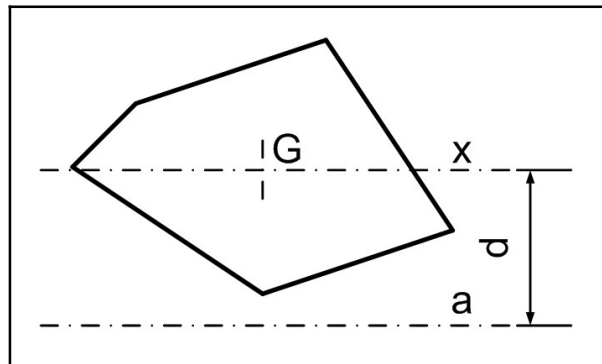


fig. 4.12. - Théorème du changement d'axe.

L'application du théorème d'Huyghens est intéressant afin de calculer l'inertie d'une surface complexe en la décomposant en éléments de base dont on connaît déjà l'inertie par rapport à leur propre centre de gravité.

Remarque :

Pour la commodité des calculs, il est préférable de prendre le *cm* comme unité de longueur. Les moments d'inertie sont repris, pour chaque profilé standard, dans des catalogues appelés "album de laminoirs".

Les principaux profilés standards sont : les IPN, IPE, UPN, HEB, HEA, HEM et les cornières.

⁽⁴⁾ König (Koenig), Samuel (1712 [Büdingen] - 1757 [Zuilenstein]) : mathématicien allemand.

⁽⁵⁾ Huygens, Christiaan (Huygens Christianus - Hugenius Christianus), (1629 [La Haye] - 1695 [La Haye]) : mathématicien, astronome et physicien néerlandais.

Application 4.4. Calculez le moment d'inertie d'un rectangle de base b et de hauteur h par rapport à un axe passant par sa base en connaissant l'inertie de ce rectangle par rapport à son centre de gravité. ($I_{x_P} = b h^3 / 12$) supposé connu.

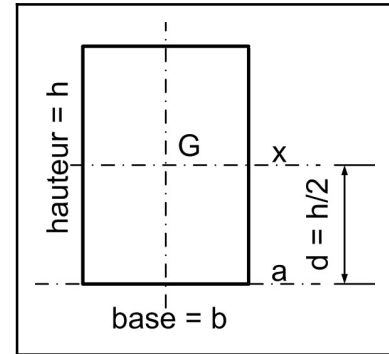


fig. 4.13. - Application 4.4.

Solution :

Appliquons le théorème d'Huyghens

$$\begin{aligned} I_a &= I_{x_P} + A d^2 \\ &= \frac{b h^3}{12} + (b h) \left(\frac{h}{2} \right)^2 \\ &= \frac{b h^3}{3} \end{aligned}$$

Application 4.5. Calculez le moment d'inertie de cette cornière à branche égale (L 50 x 50 x 4) par rapport à un axe a passant par sa base.

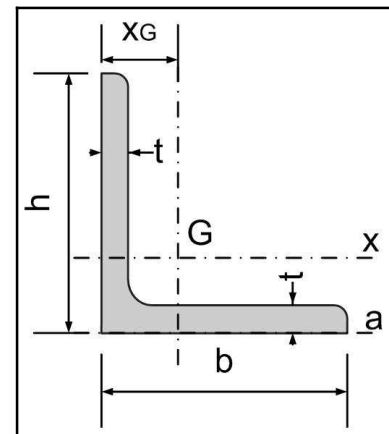


fig. 4.14. - Application 4.5.

Solution :

Recherche des caractéristiques du L 50 x 50 x 4 dans le catalogue :

$$\begin{aligned} I_x &= 8.97 \text{ cm}^4 \\ A &= 3.89 \text{ cm}^2 \\ h &= b = 50 \text{ mm} \\ x_G &= 1.36 \text{ cm} \end{aligned}$$

Appliquons le théorème d'Huyghens

$$\begin{aligned} I_a &= I_{x_P} + A d^2 \\ &= 8.97 + 3.89 \times 1.36^2 \\ &= 16.16 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

4.3.4. Marche à suivre

Pour la détermination du moment d'inertie, nous avons, comme pour la détermination de G , 2 grandes façons de procéder.

A) Système discret

Dans le cas où l'on peut décomposer la surface en plusieurs parties dont on peut connaître facilement les grandeurs de ces petites surfaces, leur centre de gravité ainsi leur moment d'inertie propre, on peut utiliser les formules générales suivantes (formule de changement d'axe généralisé) :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{x AC} = \sum (I_{x i \text{ propre}}) + \sum (A_i d_{y i}^2) \\ I_{y AC} = \sum (I_{y i \text{ propre}}) + \sum (A_i d_{x i}^2) \end{array} \right\} \text{(éq. 4.41.)}$$

La marche à suivre sera dès lors la suivante :

1. Après avoir trouvé le centre de gravité G de l'ensemble de la surface (voir étape précédente), Mettre un nouveaux système d'axes passant par le centre de gravité global de la surface (appelés axes centraux Oxy) et sera placé de façon à simplifier au possible le calcul des moments d'inertie des parties de la figure par rapport à ces axes.
2. Pour ce faire, en usant des formules (éq. 4.41) de transport à des axes parallèles (théorème d'Huyghens) déterminons les moments d'inertie des parties de la figure par rapport à leurs propres axes centraux parallèles aux axes Oxy. De cette façon, nous obtenons les valeurs de I_x et I_y .

B) Système continu

Dans le cas d'une surface indécomposables en petites surfaces simples, il faut passer par le calcul intégral. (Voir cours de mécanique chapitre 4.)

Application 4.6. Calculez le moment d'inertie par rapport à l'axe xx' de la poutrelle composée illustrée ci-contre.

Solution :

Position du centre de gravité

La pièce ayant 2 axes de symétrie, nous connaissons la position du centre de gravité G.

Décomposition en 3 parties

- ▶ le plat supérieur
- ▶ le IPN 240
- ▶ le plat inférieur

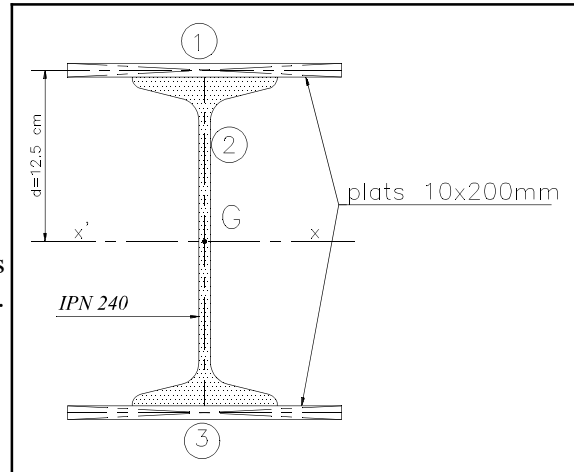


fig. 4.15. - Application 4.6.

Recherche dans les catalogues des caractéristiques géométriques de l'IPN 240 :

$$I_{axe\ fort} = 4\,250\ cm^4$$

$$A = 46.1\ cm^2$$

Recherche du moment d'inertie

Application du théorème d'Huyghens

	$I_{xP} (cm^4)$	$A_i (cm^2)$	$d_{iy} (cm)$	$A_i d_{iy}^2 (cm^4)$
1	$\frac{bh^3}{12} = 1.67$	20.0	12.5	3125.0
2	4250.00	46.1	0.0	0.0
3	$\frac{bh^3}{12} = 1.67$	20.0	12.5	3125.0
Σ	4253.34			6250.0

L'inertie totale vaut :

$$\begin{aligned}
 I_{x\ tot} &= I_{xP} + A_i d_{iy}^2 \\
 &= 4253.34 + 6250 = 10\,503.34\ cm^4
 \end{aligned}$$

Application 4.7. Déterminer la position du centre de gravité G et le moment d'inertie correspondant à un axe horizontal passant par ce centre de gravité G, pour la poutre composée ci-contre.

Solution :

Décomposition en 4 parties

- ▶ le IPE 300
- ▶ les 2 L (70 x 50 x 6)
- ▶ le plat inférieur de 210 x 7

Les données du catalogue sont les suivantes :

- ▶ IPE 300 (300 x 150 x 7.1 x 10.7)

$$I_{\text{axe fort}} = 8356 \text{ cm}^4$$

$$I_{\text{axe faible}} = 604 \text{ cm}^4$$

$$A = 53.8 \text{ cm}^2$$

- ▶ L (70 x 50 x 6)

$$I_{xP} = 33.4 \text{ cm}^4$$

$$I_{yP} = 14.2 \text{ cm}^4$$

$$A = 6.9 \text{ cm}^2$$

$$x_A = -1.25 \text{ cm}$$

$$y_A = -2.23 \text{ cm}$$

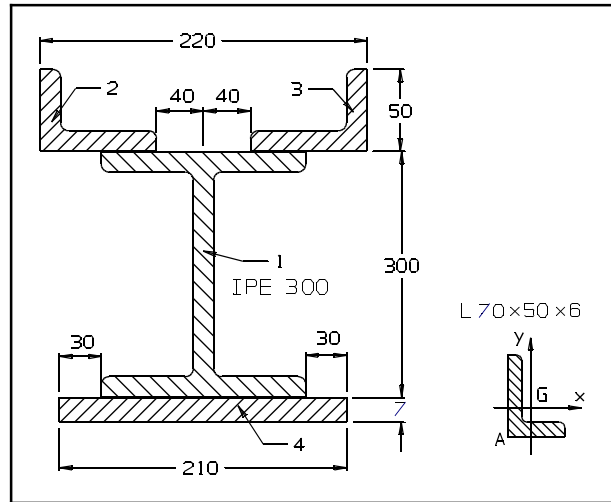


fig. 4.16. - Application 4.7.

Recherche du centre de gravité G

Prenons comme référence pour calculer la position du centre de gravité G, la base du plat.

	$A_i \text{ (cm}^2\text{)}$	$y_i \text{ (cm)}$	$S_x = A_i y_i \text{ (cm}^3\text{)}$
1	53.8	$0.7 + 15.0 = 15.70$	844.66
2	6.9	$0.7 + 30 + 1.25 = 31.95$	220.46
3	6.9	$0.7 + 30 + 1.25 = 31.95$	220.46
4	$21.0 \times 0.7 = 14.7$	0.35	5.15
Σ	82.3		1290.73

Finalement nous trouvons :

$$y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{1290.73}{82.3} = 15.68 \text{ cm}$$

Remarque :

Cela revient à dire que le centre de gravité G de la poutrelle composée, si on prend comme référence le centre de gravité du "I", "descend" de **0.2 mm**. Autrement dit, le centre de gravité de la poutrelle "I" et celui de la poutrelle composée se confondent. C'est pourquoi, dans la suite des calculs, la référence sera le centre G de la poutrelle "I".

Recherche du moment d'inertie

Application du théorème d'Huyghens

	$I_{xP} (cm^4)$	$A_i (cm^2)$	$d_{iy} (cm) = y_i - y_G$	$A_i d_{iy}^2 (cm^4)$
1	8356.0	53.8	0.00	0.0
2	14.2	6.9	15.70 - 31.95 = -16.25	1836.2
3	14.2	6.9	15.70 - 31.95 = -16.25	1836.2
4	$\frac{bh^3}{12} = 0.6$	14.7	15.70 - 0.35 = 15.35	3464.3
Σ	8385.0			7136.7

L'inertie totale vaut :

$$I_{xTot} = I_{xP} + A_i d_{iy}^2$$

$$= 8385.0 + 7136.7 = 15521.7 \text{ cm}^4$$

Application 4.8. Rechercher la position du centre de gravité G de la poutre composée d'un IPE 200, d'un UPN 120 et d'un carré de 50. Rechercher ensuite le moment d'inertie maximum par rapport à ce centre de gravité.

Solution :

Décomposition en 3 parties

- ▶ le IPE 200
- ▶ le carré de 50
- ▶ le UPN 120

Les données du catalogue sont les suivantes :

- ▶ IPE 200 (200 x 100 x 5.6 x 8.5)

$$I_{axe\ fort} = 1943 \text{ cm}^4$$

$$I_{axe\ faible} = 142.4 \text{ cm}^4$$

$$A = 28.5 \text{ cm}^2$$

- ▶ UPN 120 (120 x 55 x 7 x 8.72)

$$I_{axe\ fort} = 364 \text{ cm}^4$$

$$I_{axe\ faible} = 43.2 \text{ cm}^4$$

$$A = 17.0 \text{ cm}^2$$

Position du centre de gravité par rapport à la base de la semelle : 1.61 cm

Recherche du centre de gravité G

Prenons comme référence pour calculer la position du centre de gravité G, le centre de gravité du "I".

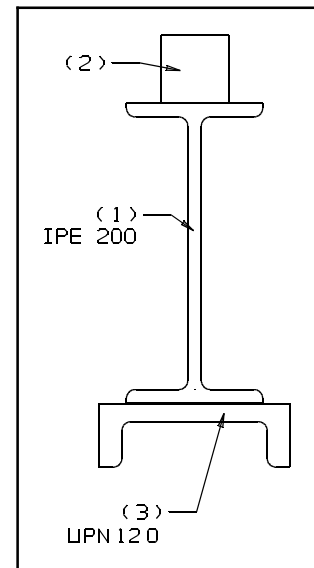


fig. 4.17. - Application 4.8.

	$A_i (cm^2)$	$y_i (cm)$	$S_x = A_i y_i (cm^3)$
1	28.5	0.00	0.00
2	$5 \times 5 = 25.0$	$2.5 + 10.0 = 12.50$	312.50
3	17.0	$-1.61 - 10.0 = -11.61$	-197.37
Σ	70.5		115.13

$$y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{115.13}{70.5} = 1.63 \text{ cm}$$

Cela revient à dire que le centre de gravité G de la poutrelle composée, si on prend comme référence le centre de gravité du "I", "monte" de **16.3 mm**.

Recherche du moment d'inertie

Application du théorème d'Huyghens

	$I_{xP} (cm^4)$	$A_i (cm^2)$	$d_{iy} (cm) = y_i - y_G$	$A_i d_{iy}^2 (cm^4)$
1	1943.00	28.5	$0 - 1.6 = -1.63$	75.72
2	$\frac{h^4}{12} = 52.08$	25.0	$12.50 - 1.6 = 10.87$	2953.92
3	43.20	17.0	$-11.61 - 1.63 = -16.24$	2980.06
Σ	2038.28			6009.70

L'inertie totale vaut :

$$I_{xTot} = I_{xP} + A_i d_{iy}^2$$

$$= 2038.28 + 6009.70 = 8047.98 \text{ cm}^4$$

Application 4.9. Déterminer la position du centre de gravité G de la poutrelle composée ci-contre et calculer les moments d'inertie par rapport aux ACPI.

Solution :

Décomposition en 5 parties

- ▶ le plat de 360 x 10
- ▶ les 2 L (100 x 100 x 10)
- ▶ le plat de 800 x 10
- ▶ les 2 L (80 x 80 x 8)
- ▶ le UPN 300

Les données du catalogue sont les suivantes :

- ▶ UPN 300 (300 x 100 x 10 x 16)

$$I_{\text{axe fort}} = 8030 \text{ cm}^4$$

$$I_{\text{axe faible}} = 495 \text{ cm}^4$$

$$A = 58.8 \text{ cm}^2$$

Position du centre de gravité par rapport à la base de la semelle : 2.70 cm

- ▶ L (80 x 80 x 8)

$$I_{\text{axe fort}} = I_{\text{axe faible}} = 72.25 \text{ cm}^4$$

$$A = 12.3 \text{ cm}^2$$

Position du centre de gravité par rapport à la base de la semelle : 2.26 cm

- ▶ L (100 x 100 x 10)

$$I_{\text{axe fort}} = I_{\text{axe faible}} = 176.7 \text{ cm}^4$$

$$A = 19.2 \text{ cm}^2$$

Position du centre de gravité par rapport à la base de la semelle : 2.82 cm

Recherche du centre de gravité G

Prenons comme référence pour calculer la position du centre de gravité G, la face inférieure du UPN.

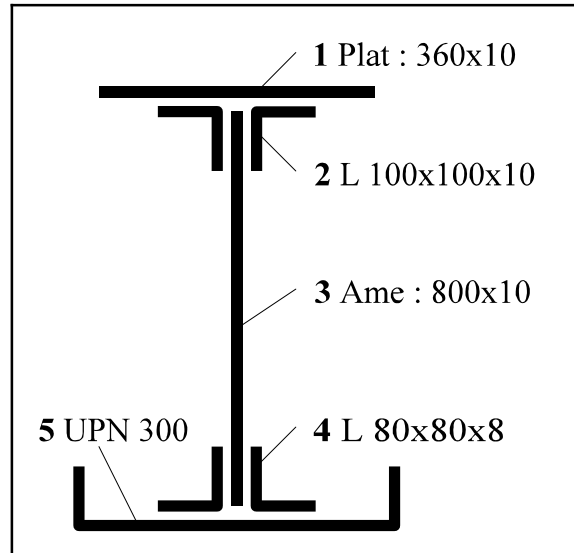


fig. 4.19. - Application 4.9.

	$A_i \text{ (cm}^2\text{)}$	$y_i \text{ (cm)}$	$S_x = A_i y_i \text{ (cm}^3\text{)}$
1	36.00	$1 + 80 + 0.5 = 81.50$	2934.00
2	$2 \times 19.20 = 38.40$	$1 + 80 - 2.82 = 78.18$	3002.11
3	80.00	$1 + 40 = 41.00$	3280.00
4	$2 \times 12.30 = 24.60$	$1 + 2.26 = 3.26$	80.20
5	58.80	2.70	158.76
Σ	237.64		9455.07

$$y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{9455.07}{237.64} = 39.79 \text{ cm}$$

La position du centre de gravité ce situe à 1.25 cm *en dessous* du centre de gravité de l'âme.

Recherche des moments d'inertie

Application du théorème d'Huyghens

	$I_{xP} (cm^4)$	$I_{yP} (cm^4)$	$d_{ix} (cm) = x_i - x_G$	$d_{iy} (cm) = y_i - y_G$	$A_i d_{ix}^2 (cm^4)$	$A_i d_{iy}^2 (cm^4)$
1	$\frac{b h^3}{12} = 3.0$	$\frac{b h^3}{12} = 3888.0$	0.0	$81.50 - 39.79 = 41.71$	0.00	62630.07
2	$2 \times 176.7 = 353.4$	$2 \times 176.7 = 353.4$	$2.82 + 0.5 = 3.32$	$78.18 - 39.79 = 38.39$	422.16	56593.62
3	$\frac{b h^3}{12} = 42666.7$	$\frac{80 \times 1^3}{12} = 6.7$	0.0	$41.00 - 39.79 = 1.21$	0.00	117.13
4	$2 \times 72.3 = 144.6$	$2 \times 72.3 = 144.6$	$2.26 + 0.5 = 2.76$	$3.26 - 39.79 = -36.53$	187.39	32827.25
5	495.0	8030.0	0.0	$2.70 - 39.79 = -37.09$	0.00	80889.28
Σ	43662.7	12422.7			609.55	233057.35

L'inertie totale vaut :

$$I_{x Tot} = I_{xP} + A_i d_{iy}^2$$

$$= 43662.7 + 233057.35 = 276720.05 cm^4$$

$$I_{y Tot} = I_{yP} + A_i d_{ix}^2$$

$$= 12422.7 + 609.55 = 13032.25 cm^4$$

Remarque :

Si on prend l'inertie par rapport au centre de gravité du plat n°3 (de 800 x 10) on trouve l'inertie suivant Ox égal à : $I_{x Tot} = 276947 cm^4$, soit une erreur de :

$$\frac{276947 - 276492.25}{276492.25} \times 100 = 0.16 \% !$$

Application 4.10. Un mat de monte-charge est réalisé à l'aide de 4 montants ayant les caractéristiques suivantes :

- ▶ 2 profilés UPN 80
 - ▶ 2 profilés L (50 x 50 x 5)
- Calculez la distance d pour que, pour l'ensemble, $I_x = I_y$.

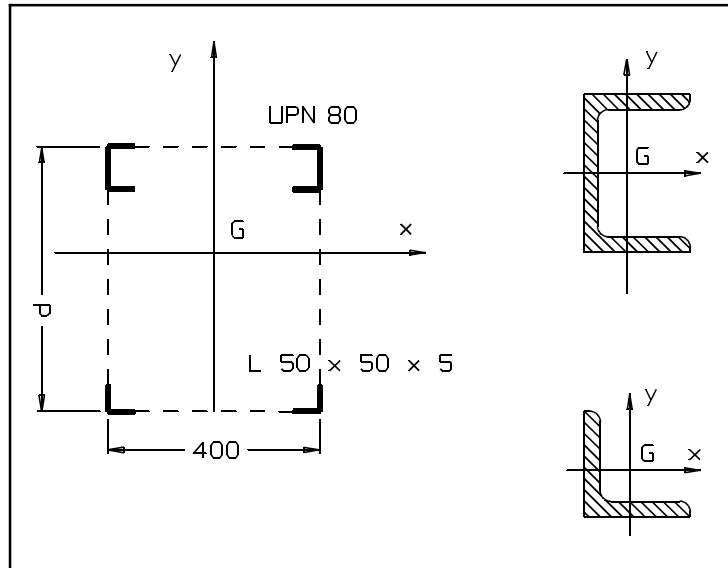


fig. 4.23. - Application 4.10.

Solution :

Décomposition en 2 parties

- ▶ les UPN 80
- ▶ les 2 L (50 x 50 x 5)

Les données du catalogue sont les suivantes :

- ▶ UPN 80 (80 x 45 x 6 x 8)
 - $I_{\text{axe fort}} = 106 \text{ cm}^4 = I_{xP}$
 - $I_{\text{axe faible}} = 19,4 \text{ cm}^4 = I_{yP}$
 - $A = 11 \text{ cm}^2$
 - $d_{xG} = 14,5 \text{ mm}$
- ▶ L (50 x 50 x 5)
 - $I_{\text{axe fort}} = I_{\text{axe faible}} = 11,25 \text{ cm}^4 = I_{xP} = I_{yP}$
 - $A = 4,75 \text{ cm}^2$
 - $d_{xG} = 14,3 \text{ mm}$

Recherche du centre de gravité G

Exprimons la position du centre de gravité (suivant y) par rapport à la base des L.

	$A_i \text{ (cm}^2\text{)}$	$y_i \text{ (cm)}$	$S_x = A_i y_i \text{ (cm}^3\text{)}$
UPN80	2 x 11,0 = 22,0	$d - 4$	$22 \times (d - 4)$
L 50x50x5	2 x 4,75 = 9,5	1,43	13,585
Σ	31,5		$13,585 + 22(d - 4)$

$$y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{13,585 + 22(d - 4)}{31,5} = 0,698d - 2,362 \text{ cm}$$

Recherche des moments d'inertie

Application du théorème d'Huyghens

	$I_{xP} (cm^4)$	$I_{yP} (cm^4)$	$d_{ix} (cm) = x_i - x_G$	$d_{iy} (cm) = y_i - y_G$	$A_i d_{ix}^2 (cm^4)$	$A_i d_{iy}^2 (cm^4)$
UPN	$2 \times 106 = 212$	$2 \times 19.4 = 38.8$	$ 20 - 1.45 = 18.55$	$ 0.302 d - 1.638 $	$22 \times 18.55^2 = 7570.255$	$22 \times 0.302 d - 1.638 ^2$
L	$2 \times 11.25 = 22.5$	$2 \times 11.25 = 22.5$	$ 20 - 1.43 = 18.57$	$ 0.698 d - 3.792 $	$9.5 \times 18.57^2 = 3276.027$	$9.5 \times 0.698 d - 3.792 ^2$
Σ	234.5	61.3			10846.28	Résultat

Le moment d'inertie I_y vaut :

$$I_y = 10846.28 + 61.3 = 10907.58 \text{ cm}^4$$

Le moment d'inertie I_x vaut :

$$234.5 + \underbrace{\left(22 \times |0.302 d - 1.638|^2 \right) + \left(9.5 \times |0.698 d - 3.792|^2 \right)}_{\text{Résultat}} = I_x = 10907.58$$

Recherche de la distance

D'où :

$$3.317 d^2 - 36.028 d - 5238.64 = 0$$

et donc :

$$d = 45.54 \text{ cm} \quad \text{ou} \quad d = -34.68 \text{ cm} \quad (\text{les "U" sont rejetés en dessous des "L"})$$

Position du centre de gravité

$$y_G = 0.698 d - 2.362 = 29.43 \text{ cm}$$

Application 4.11. L'arbre de machine ci-contre est déformé par une rainure de cale et par un trou de graissage axial. Calculer le moment d'inertie polaire " I_0 " de la section de diamètre 28 mm pleine et celui de la section déformée, en négligeant le déplacement du centre de gravité.

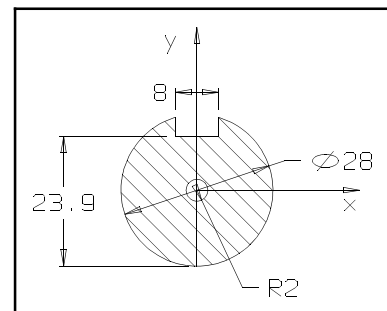


fig. 4.24. - Application 4.11.

Solution :

Moment d'inertie

Arbre plein :

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \times 28^4}{32} = 60344 \text{ mm}^4$$

Trou de graissage :

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \times 4^4}{32} = 25.1 \text{ mm}^4$$

Arbre avec rainure (voir **Chapitre 6 : Torsion** - Arbre muni d'une rainure de clavette) :

$$I_t \approx \frac{\pi d^4}{32} - \frac{a t (d - t)^2}{4} \approx \frac{\pi \times 28^4}{32} - \frac{8 \times 4.1 \times (28 - 4.1)^2}{4} = 55660 \text{ mm}^4$$

Arbre de machine :

$$I_t \text{ arbre avec rainure} - I_0 \text{ trou de graissage} \approx 55660 - 25.1 = 55635 \text{ mm}^4$$

4.4. Moments résistants

Définition : On appelle module de résistance à la flexion W_x le rapport entre le moment d'inertie par rapport à un axe donné et la distance de cet axe jusqu'au point le plus éloigné de la section transversale v .

Soit :

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{I_x}{v} \quad (\text{éq. 4.122.})$$

Le moment résistant a pour dimension l'unité de longueur prise au cube (m^3).

Définition : On appelle module de résistance polaire W_p le rapport entre le moment d'inertie polaire et la distance du pôle jusqu'au point le plus éloigné de la section v .

Soit :

$$W_p = \frac{I_0}{v} \quad (\text{éq. 4.123.}) \quad (\text{unité le } m^3)$$

Pour pôle O on prend le centre de gravité G de la section transversale.

4.5. Rayon de giration

Par définition le **rayon de giration** i_{gr} (par rapport à un axe de référence r) est :

$$i_{gr} = \sqrt{\frac{I_r}{A}} \quad (\text{éq. 4.124.}) \quad (\text{unité le } m)$$

Il représente le rayon d'un tube fictif mince de même inertie I_r et de rayon i_{gr} tel que la matière se trouve idéalement concentré sur ce rayon. En effet :

$$I_r = A i_{gr}^2 \quad (\text{éq. 4.125.})$$

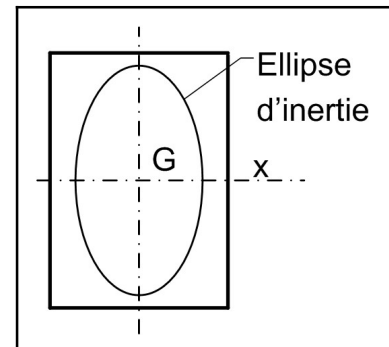


fig. 4.25. - Ellipse d'inertie.

Il sera surtout employé dans les calculs de résistance au flambage.

On peut aussi écrire le rayon de giration comme étant :

$$i_{gr} = \sqrt{\frac{E I_r}{E A}} = \frac{\text{rigidité à la flexion}}{\text{rigidité à la traction - compression}} \quad (\text{éq. 4.126.})$$

et donc le rayon de giration représente le rapport entre la rigidité à la flexion par rapport à la rigidité à la traction - compression.

Remarque :

L'indice dont est affecté le symbole du rayon de giration représente l'axe par rapport auquel il est mesuré perpendiculairement. Par exemple i_x est mesuré perpendiculairement à l'axe Ox.