

CHAPITRE 6. • TORSION.....	- 6.1 -
6.1. Définitions	- 6.1 -
6.2. Torsion d'une barre de section circulaire	- 6.3 -
6.2.1. Recherche de la distribution des contraintes.....	- 6.3 -
6.2.2. Relations fondamentales	- 6.3 -
6.3. Dimensionnement.....	- 6.6 -
6.3.1. Contraintes admissibles.....	- 6.6 -
6.3.2. Application au calcul d'arbre	- 6.6 -
A) Arbres creux.....	- 6.6 -
B) Arbres pleins	- 6.7 -
6.3.3. Déformation admissible.....	- 6.8 -
6.3.4. Application au calcul d'arbre	- 6.8 -
6.3.5. Remarques concernant le dimensionnement des arbres	- 6.9 -
A) Relation couple - puissance.....	- 6.9 -
B) Notion de couple maximum	- 6.9 -
6.4. Torsion d'une barre à section transversale non circulaire	- 6.12 -
6.5. Choix de la forme de la section droite	- 6.14 -
6.6. Applications	- 6.19 -
6.6.1. Torsion d'un arbre muni d'une rainure de clavette.....	- 6.19 -
6.6.2. Torsion d'un profilé à parois minces.....	- 6.21 -
A) Profilés ouverts	- 6.21 -
B) Profilés fermés	- 6.22 -

CHAPITRE 6. • TORSION

6.1. Définitions

Par l'exemple de la traction et de la compression, nous avons mis en évidence quelques-unes des plus importantes propriétés de l'état de contrainte. Lors de la traction (compression) l'état de contrainte se réduisait à la seule composante normale σ . Lors de la **torsion**, l'état de contrainte se réduira **aux seules composantes τ** dans le plan de la section.

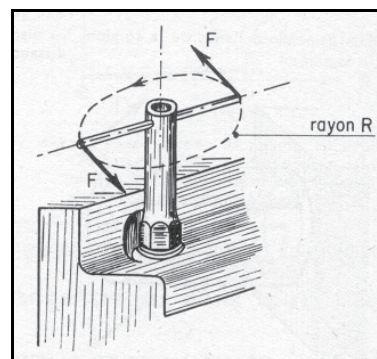


fig 6.1. - Exemple d'une barre soumise à torsion.

Autrement dit, la **torsion pure** est un état de charge tel que dans toute section droite d'une pièce il n'existe qu'un **moment de torsion M_t** .

De plus :

Une **barre** soumise principalement à **torsion** porte le nom d'**arbre**.

Par convention, le moment de torsion (effort interne) est positif s'il agit dans le sens anti-horlogique pour un observateur qui regarde la section.

On peut montrer, à partir de la loi de Hooke, qu'un petit élément soumis uniquement à des contraintes tangentielles τ (**état de cisaillement pur**) se déforme en faisant apparaître un angle γ (**appelé angle de cisaillement**) proportionnel à τ . (Voir figure ci-contre).

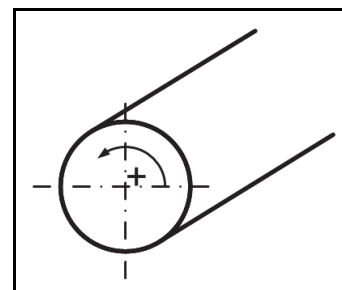


fig 6.2. - Convention de signe "+".

$$\tau = \gamma G \quad (\text{éq. 6.1})$$

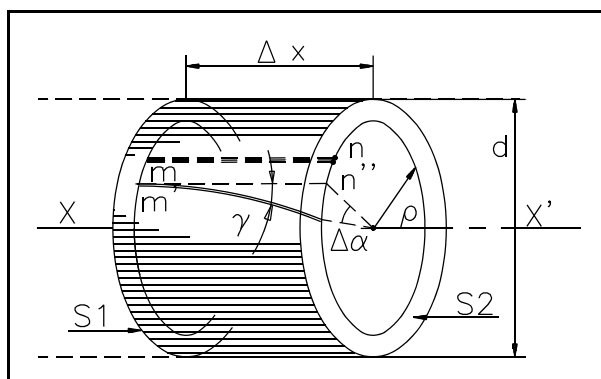


fig 6.3. - Loi de Hooke.

La quantité G , appelé **module de cisaillement** ou **module de Coulomb** ⁽¹⁾ ou **module d'élasticité transversale**, dépend du matériau et est exprimée en N/mm^2 .

Remarque :

Cette formule est à rapprocher de la loi de Hooke : $\sigma = \varepsilon \cdot E$

Il existe une relation entre le module de Young et le module de Coulomb. Cette relation s'écrit :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{éq. 6.3})$$

Notation : ν coefficient de Poisson -

Remarque :

On observe que, quelque soit la valeur du coefficient de Poisson ν , le module d'élasticité transversale G sera toujours inférieur au module d'élasticité longitudinal E . En d'autres termes, un matériau sera toujours moins "rigide" sous l'effet d'un moment de torsion, que sous l'effet d'un effort de traction.

Application 6.1. Que vaut le coefficient de Poisson de la fonte grise sachant que : $E = 90\,000 \text{ N/mm}^2$ et que le module de Coulomb $G = 36\,000 \text{ N/mm}^2$?

Solution :

Application directe de la formule éq. 6.3. :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \nu = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{90\,000}{2 \times 36\,000} - 1 = 0.25$$

Formule approchée (pour les matériaux métalliques) :

$$G \approx 0.4 E \Rightarrow \nu = \frac{E}{2G} - 1 \approx \frac{1}{2 \times 0.4} - 1 = 0.25$$

⁽¹⁾ Coulomb : ingénieur et physicien français (1736 - 1806)

6.2. Torsion d'une barre de section circulaire

6.2.1. Recherche de la distribution des contraintes

Considérons une barre de section circulaire soumise à un moment de torsion constant.

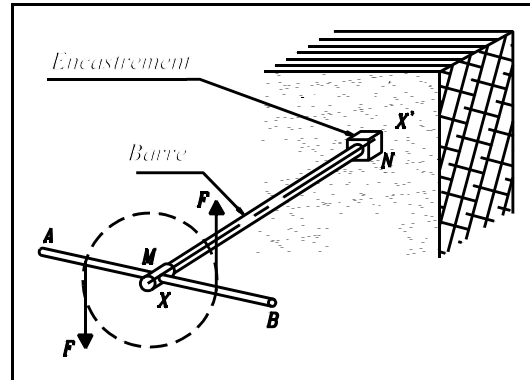


fig 6.4. -

On constate que, pour des raisons de symétrie, chaque section droite tourne dans son plan, autour de son centre, comme un ensemble rigide. On en déduit : *que toute section droite plane reste droite plane après déformation.*

De plus, l'expérience montre que la longueur d'une barre soumise à torsion ne varie pas tant que l'angle de torsion est petit.

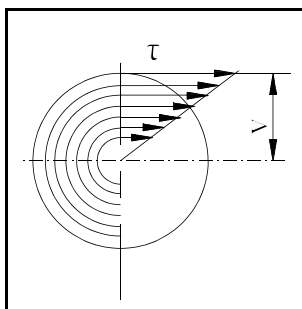


fig 6.5. - Distribution des contraintes tangentielles de torsion.

On constate que les contraintes tangentielles agissant sur une section droite sont proportionnelles à la distance ρ à l'axe de l'arbre et maximales à la périphérie. La distribution des τ est représentée à la figure ci-contre. Les tensions varient donc linéairement de 0 à τ_{\max} .

La tension maximale se situant à la périphérie de la pièce.

6.2.2. Relations fondamentales

Trois *hypothèses* afin d'établir les différentes relations fondamentales de la torsion :

- [H1] pas de variation de section (section constante);
- [H2] moment de torsion constant;
- [H3] déformation angulaire petite par rapport à la longueur.

Si l'angle de déformation γ est petit, nous pouvons l'assimiler à sa tangente. Nous écrirons dès lors : $\gamma \approx \text{tg } \gamma$.

Si, comme l'angle est petit, nous pouvons assimiler l'arc de cercle à une droite, et, dès lors écrire :

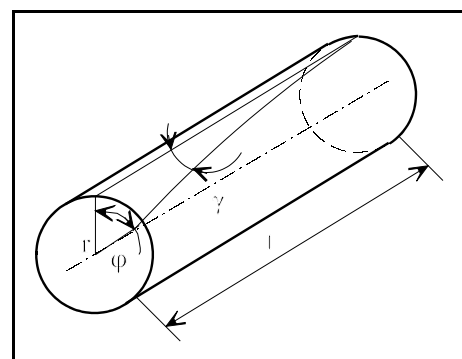


fig 6.6. -

$$\boxed{l \operatorname{tg} \gamma = r \varphi \Rightarrow l \gamma = r \varphi} \quad (1)$$

La loi de Hooke s'écrivant :

$$\boxed{\tau = \gamma G} \quad (2)$$

nous obtenons :

$$\boxed{\tau = \frac{r \varphi G}{l} = r \theta G} \quad (3)$$

<u>Notations</u> :	G	module de Coulomb	N/mm^2
	r	rayon de la section circulaire	mm
	γ	angle de cisaillement	rad
	φ	déformation angulaire	rad
	θ	angle relatif de déformation	rad/mm
	l	longueur de la barre	mm

Analysons le phénomène de torsion quand un moment de torsion $-M_t$ produit une déformation élastique du cylindre-éprouvette.

Sur la figure ci-dessous, $-M_t$ est représenté par le couple F-F', forces situées dans le plan de la section droite d'extrémité; mais dans le cas idéal de torsion que nous étudions, nous devons imaginer des couples f-f', dans le plan de la section (en chaque mm^2 par exemple).

Sur chaque élément de surface ΔA nous avons dessiné la force f tangente à la circonférence de rayon ρ ; ces forces sont telles que leur moment : $\sum \rho_i f_i = -M_t$.

Isolons par une coupure (section droite) un tronçon d'arbre. Pour le maintenir en équilibre, il faut appliquer sur chaque élément de section ΔA des forces tangentielles f'.

Le poids étant négligé, pour maintenir ce tronçon en équilibre, nous pouvons appliquer à chaque élément ΔA (à chaque mm^2 par exemple) une force f' située dans le plan de la coupure, donc tangentielle.

L'ensemble des forces f' constitue la réaction au couple $-M_t$.

Quelles sont les conditions d'équilibre imposées par la statique ?

$$\sum (\vec{f}_i) = 0 \quad \text{et} \quad \sum (\vec{C}_i) = 0$$

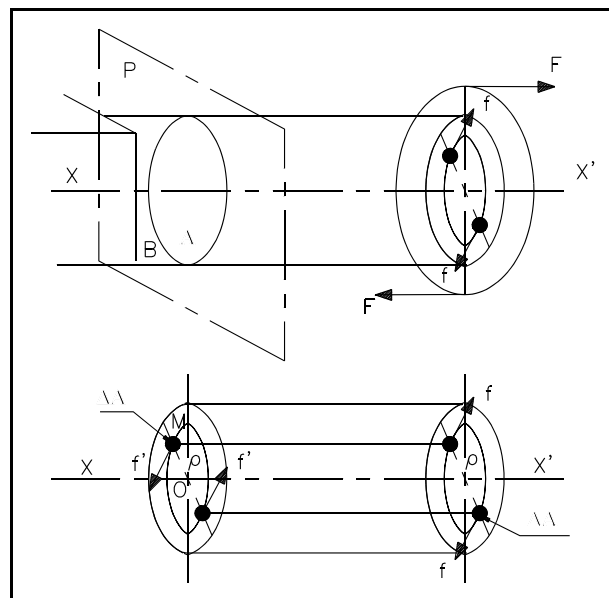


fig 6.7. - Démonstration.

Ces conditions sont satisfaites si à chaque force f nous faisons correspondre comme l'indique la figure une force f' égale et de sens opposés à f. Dans ce cas :

$$\boxed{\sum \rho_i f_i' = M_t} \quad (4)$$

La contrainte tangentielle τ est par définition une force par unité de surface. Dans notre cas, nous pouvons dire :

$$\tau = \frac{f_i'}{\Delta A_i} \Rightarrow f_i' = \tau \Delta A_i$$

Avec la relation (4) nous avons :

$$M_t = \sum \rho_i f_i' = \sum \rho_i \tau \Delta A_i .$$

Introduisons la relation (3) dans l'équation ci-dessus :

$$M_t = \sum \rho_i (\rho_i \theta G) \Delta A_i = \sum \rho_i^2 \Delta A_i \theta G .$$

En ce rappelant que :

$$I_0 = \sum \rho_i^2 \Delta A_i ,$$

nous obtenons la relation entre le moment de torsion M_t et les autres paramètres. Soit :

$$\boxed{M_t = I_0 \theta G} \quad (5)$$

On ainsi déduire les deux relations fondamentales pour le calcul des barres rondes soumises à torsion.

La première donne la relation entre **la déformation angulaire φ** (ou **l'angle relatif θ**) et le **moment de torsion M_t** . A partir de l'équation (5), nous écrivons :

$$\boxed{\theta_{\max} = \frac{M_t}{G I_0}} \quad (\text{éq. 6.18}) \quad [\text{rad/mm}]$$

et sachant que : $\varphi/l = \theta$, nous obtenons :

$$\boxed{\varphi = \frac{M_t l}{G I_0}} \quad (\text{éq. 6.20}) \quad [\text{rad}]$$

La seconde donne la relation entre **la contrainte tangentielle maximum τ_{\max}** et le **moment de torsion M_t** . En mettant l'équation (4) dans l'équation (3), nous obtenons :

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_0/r} = \frac{M_t}{W_p}} \quad (\text{éq. 6.21}) \quad [\text{N/mm}^2]$$

(τ_{\max} se situant à la périphérie de la section circulaire)

<u>Notations :</u>	M_t	moment de torsion	Nmm
	I_0	moment d'inertie polaire de la section	mm^4
	r	rayon de la section circulaire	mm
de plus :	$G.I_0$	est appelé rigidité à la torsion	Nmm^2
	I_0/r	est appelé module de résistance à la torsion ou module de résistance polaire	mm^3

6.3. Dimensionnement

6.3.1. Contraintes admissibles

- 1) Dans le cas d'un **matériau ductile**, la contrainte tangentielle admissible en torsion τ_{adm} est obtenue en tenant compte d'un coefficient de sécurité S par rapport à la limite d'élasticité en cisaillement τ_e :

$$\tau_{adm} = \frac{\tau_e}{S} \quad (\text{éq. 6.22})$$

On peut montrer que les critères de résistance permettent de déterminer τ_e à partir de la limite apparente d'élasticité R_e en traction :

$$\tau_{e\text{ cis}} = (0.5) \dots 0.577 \dots (0.6) R_e \quad \text{et donc :}$$

$$\tau_{adm} = 0.58 \frac{R_e}{S} \quad (\text{éq. 6.24})$$

- 2) Si le **matériau est fragile**, l'expérience montre que la rupture se produit suivant une surface hélicoïdale inclinée à 45° par rapport à l'axe de l'arbre (ex. : la craie).

La fissuration est due aux contraintes normales de traction qui atteignent leur valeur maximale σ_{max} sur des facettes contenues dans la surface hélicoïdale. Dès lors la contrainte tangentielle admissible τ_{adm} se déterminera à partir de la résistance à la rupture R_m et non plus à partir de τ_e :

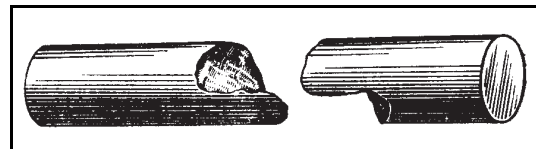


fig 6.8. - Rupture fragile en torsion.

La fissuration est due aux contraintes normales de traction qui atteignent leur valeur maximale σ_{max} sur des facettes contenues dans la surface hélicoïdale. Dès lors la contrainte tangentielle admissible τ_{adm} se déterminera à partir de la résistance à la rupture R_m et non plus à partir de τ_e :

$$\tau_{adm} = \frac{R_m}{S} \quad (\text{éq. 6.25})$$

- 3) **Quel que soit le type de matériau utilisé**, le dimensionnement des sections droites devra être tel que les contraintes tangentielles maximales τ_{max} ne dépassent pas la contrainte tangentielle admissible τ_{adm} :

$$\tau_{max} \leq \tau_{adm} \quad (\text{éq. 6.26})$$

- 4) Les coefficients de sécurité S seront les mêmes que ceux définis au chapitre "Traction - Compression".

6.3.2. Application au calcul d'arbre

Déterminons la relation qui existe entre le diamètre extérieur d d'un arbre de section annulaire (diamètre intérieur d_i), soumis à un moment de torsion M_t , en fonction de la contrainte tangentielle admissible τ_{adm} .

A) Arbres creux

On suppose connu la proportion qui existe entre le diamètre extérieur d et le diamètre intérieur d_i . Soit : $k_d = d_i/d$.

Dès lors :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{16 d M_t}{\pi (d^4 - d_i^4)} = \frac{16 M_t}{\pi d^3 (1 - k_d^4)} \leq \tau_{adm}$$

d'où :

$$\tau_{adm} \geq \frac{16}{\pi} \frac{M_t}{d^3 (1 - k_d^4)} \approx 5.1 \frac{M_t}{d^3 (1 - k_d^4)} \quad (\text{éq. 6.29})$$

Après mise en évidence du diamètre d , on trouve l'équation pour la conception des arbres :

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{M_t}{(1 - k_d^4) \tau_{adm}}} \approx 1.72 \sqrt[3]{\frac{M_t}{(1 - k_d^4) \tau_{adm}}} \quad (\text{éq. 6.30})$$

Ainsi que la formule dérivée concernant le couple admissible transmis pour un arbre donné :

$$M_t = \frac{\pi}{16} d^3 (1 - k_d^4) \tau_{adm} \approx 0.2 d^3 (1 - k_d^4) \tau_{adm} \quad (\text{éq. 6.31})$$

B) Arbres pleins

Pour un arbre cylindrique plein de diamètre d , on aura dans les formules précédentes :

$d_i = 0 \Rightarrow k_d = 0$ et dans ce cas nous obtenons :

$$\tau_{adm} \geq \frac{16}{\pi} \frac{M_t}{d^3} \approx 5.1 \frac{M_t}{d^3} \quad (\text{éq. 6.33})$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{M_t}{\tau_{adm}}} \approx 1.72 \sqrt[3]{\frac{M_t}{\tau_{adm}}} \quad (\text{éq. 6.34})$$

$$M_t = \frac{\pi}{16} d^3 \tau_{adm} \approx 0.2 d^3 \tau_{adm} \quad (\text{éq. 6.35})$$

6.3.3. Déformation admissible

Généralement, on limite l'angle relatif de torsion à une valeur admissible θ_{adm} déterminé suivant le type d'utilisation de la barre :

$$\theta_{max} \leq \theta_{adm} \quad (\text{éq. 6.36})$$

Remarques :

- 1) En général les arbres de transmission se calculent à la déformation admissible plutôt qu'à la contrainte admissible, et dans ce cas θ_{adm} vaut :

$$\begin{aligned} \theta_{adm} &= \dots 0.25 \dots 0.33 \dots (0.5)^\circ/m \\ \theta_{adm} &= \dots 0.00436 \dots 0.00576 \dots (0.00873) \text{ rad}/m \end{aligned} \quad (\text{éq. 6.37})$$

- 2) Si l'angle θ_{adm} est exprimé en $^\circ/mm$, il faut convertir, en rad/mm suivant la formule :

$$\theta_{adm} [\text{rad} / \text{mm}] = \theta_{adm} [^\circ / \text{mm}] \frac{\pi}{180} \quad (\text{éq. 6.38})$$

6.3.4. Application au calcul d'arbre

Déterminons la relation qui existe entre le diamètre extérieur d d'un arbre de section annulaire (diamètre intérieur d_i), soumis à un moment de torsion M_t , en fonction de la déformation tangentielle admissible θ_{adm} .

A) Arbres creux

On supposera connu la proportion : $k_d = d_i / d$. Dès lors :

$$\theta_{max} = \frac{M_t}{G I_0} = \frac{32 M_t}{\pi (d^4 - d_i^4) G} = \frac{32 M_t}{\pi d^4 (1 - k_d^4) G} \leq \theta_{adm}$$

d'où :

$$\theta_{adm} \geq \frac{32 M_t}{\pi d^4 (1 - k_d^4) G} \approx 10.2 \frac{M_t}{d^4 (1 - k_d^4) G} \quad (\text{éq. 6.41})$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_t}{\pi (1 - k_d^4) G \theta_{adm}}} \approx 1.79 \sqrt[4]{\frac{M_t}{(1 - k_d^4) G \theta_{adm}}} \quad (\text{éq. 6.42})$$

$$M_t = \frac{\pi}{32} d^4 (1 - k_d^4) G \theta_{adm} \approx 0.1 d^4 (1 - k_d^4) G \theta_{adm} \quad (\text{éq. 6.43})$$

si θ_{adm} est exprimé en rad/mm , M_t en $N.mm$, G en N/mm^2 et d en mm .

B) Arbres pleins

Pour un arbre cylindrique plein de diamètre d , on aura dans les formules précédentes :

$d_i = 0 \Rightarrow k_d = 0$ et dans ce cas nous obtenons :

$$\theta_{adm} \geq \frac{32}{\pi} \frac{M_t}{d^4 G} \approx 10.2 \frac{M_t}{d^4 G} \quad (\text{éq. 6.45})$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32}{\pi} \frac{M_t}{G \theta_{adm}}} \approx 1.79 \sqrt[4]{\frac{M_t}{G \theta_{adm}}} \quad (\text{éq. 6.46})$$

$$M_t = \frac{\pi}{32} d^4 G \theta_{adm} \approx 0.1 d^4 G \theta_{adm} \quad (\text{éq. 6.47})$$

En résumé :

Arbres courts : ils se calculent uniquement à la résistance.

Arbres longs : ils se calculent à la déformation, malgré une résistance convenable.

6.3.5. Remarques concernant le dimensionnement des arbres

A) Relation couple - puissance

Dans de nombreuses applications de torsion on connaît la **puissance** à transmettre et non le **moment de torsion**. Si tel est le cas, connaissant la puissance P à transmettre (en watt) et la vitesse de rotation n de cet arbre (en tours par minute), nous pouvons retrouver le moment de torsion M_t par la relation :

$$P = M_t \omega \quad (\text{éq. 6.48})$$

avec ω la vitesse de rotation rad/s et la relation entre n et ω est :

$$\omega = \frac{2 \pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \quad (\text{éq. 6.49})$$

d'où :

$$M_t = \frac{30}{\pi} \frac{P}{n} \approx 9.55 \frac{P}{n} \quad (\text{éq. 6.50})$$

Sans oublier que si P est en W et n en $tours/min$, M_t est en Nm . Il faudra donc transformer le moment de torsion en Nmm pour qu'il soit compatible avec les formules précédentes.

B) Notion de couple maximum

Souvent les machines, électriques et autres, sont dimensionnées pour un couple nominal. Cependant, lors du calcul des arbres de transmissions de ces machines, il faut tenir compte des chocs éventuels qui peuvent se produire suite à la transmission des différents efforts. C'est pourquoi, on majore le couple nominal d'un certain coefficient de choc k_c (voir tableau des coefficients de choc dans le

chapitre Introduction à la résistance des matériaux).

Le moment de torsion M_t à utiliser dans les formules précédentes sera donc :

$$M_t = k_c M_{t \text{ nominal}} \quad (\text{éq. 6.51})$$

Application 6.2. Un moteur électrique d'une puissance de 20 kW tourne à la vitesse de 600 tr/min. Son arbre est en acier ($G = 80\,000 \text{ N/mm}^2$). Déterminer son diamètre dans le cas où :

- on considère l'arbre comme court avec une contrainte admissible $\tau_{adm} = 40 \text{ N/mm}^2$;
- on considère l'arbre comme un arbre de transmission avec un angle relatif admissible $\theta_{adm} = 0.25^\circ/\text{m}$.

Solution :

a) Arbre court

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{480}{\pi^2} \frac{P}{n \tau_{adm}}} = \sqrt[3]{\frac{480}{\pi^2} \times \frac{20\,000}{600 \times 40 \cdot 10^6}} = 0.0343 \text{ m} \Rightarrow 35 \text{ mm}$$

b) Arbre long

$$\theta = \frac{0.25 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{720} \text{ rad/m}$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{960}{\pi^2} \frac{P}{n G \theta_{adm}}} = \sqrt[4]{\frac{960}{\pi^2} \times \frac{20\,000}{600 \times 80\,000 \cdot 10^6 \times \pi/720}} = 0.0552 \text{ m} \Rightarrow 56 \text{ mm}$$

Application 6.3. Un moteur électrique d'une puissance de 10 kW tourne à la vitesse de 750 tr/min. Son arbre est en acier XC 32 de limite élastique égale à 320 N/mm². Déterminer son diamètre si on prend un coefficient de sécurité égal à 2.3.

L'arbre du moteur est court; on peut donc le considérer comme sollicité uniquement à la torsion (sans flexion).

Solution :

Recherche de la contrainte admissible

$$\tau_{adm} = 0.58 \frac{R_e}{S} = 0.58 \times \frac{320}{2.3} = 80.7 \text{ N/mm}^2$$

Recherche du moment de torsion

$$M_t = \frac{30}{\pi} \frac{P}{n} = \frac{30}{\pi} \times \frac{10\,000}{750} = 127.3 \text{ Nm} = 127.3 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$$

Recherche du diamètre : arbre court

$$d \geq 1.72 \sqrt[3]{\frac{M_t}{\tau_{adm}}} = 1.72 \sqrt[3]{\frac{127.3 \cdot 10^3}{80.7}} = 20.0 \text{ mm}$$

Application 6.4. On considère l'une des barres de torsion servant à la suspension élastique du châssis d'une automobile. L'effort qui agit à l'extrémité D du levier \overline{CD} , de longueur 400 mm, est de 300 daN.

- Calculer le diamètre de la barre sachant qu'elle est en acier au chrome-silicium-molybdène 45 SCD 6 pour lequel on peut admettre une contrainte tangentielle de 400 N/mm^2 .
- Calculer la longueur de la barre de façon que la levier tourne au plus d'un angle de 18° lorsque la voiture repose sur ses roues. On calculera G .

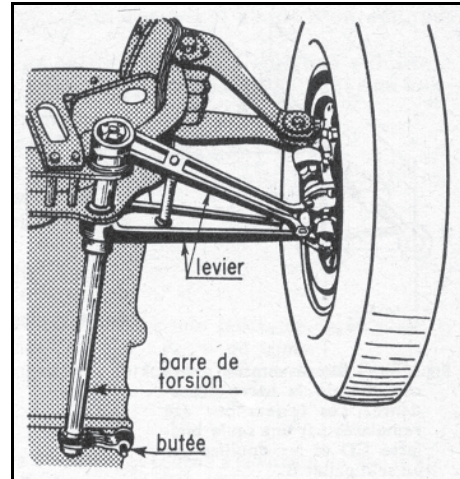


fig 6.9. - Application 6.4.

Solution :

- Calcul du module d'élasticité transversal

Acier 45 SCD 6 :

$$E = 220\,000 \text{ N/mm}^2 \text{ et } \nu = 0.285$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{220\,000}{2 \times (1+0.285)} = 85\,600 \text{ N/mm}^2$$

- Calcul du diamètre

$$M_t = F l = 3\,000 \times 400 = 1\,200\,000 \text{ Nmm}$$

$$d \geq 1.72 \sqrt[3]{\frac{M_t}{\tau_{adm}}} = 1.72 \sqrt[3]{\frac{1\,200\,000}{400}} = 24.8 \text{ mm} \Rightarrow d = 25 \text{ mm}$$

- Calcul de la longueur

$$\theta_{\max} = 10.2 \frac{M_t}{d^4 G} \text{ et } \frac{\varphi}{l} = \theta$$

$$\varphi = 18^\circ \Rightarrow \varphi = 18 \times \frac{\pi}{180} = 0.314 \text{ rad}$$

$$l = \frac{\varphi d^4 G}{10.2 M_t} = \frac{0.314 \times 25^4 \times 85\,600}{10.2 \times 1\,200\,000} = 858 \Rightarrow 860 \text{ mm}$$

6.4. Torsion d'une barre à section transversale non circulaire

On constate expérimentalement que, sous l'action du moment de torsion, la section de la barre subit un gauchissement. Celui-ci provoquera l'apparition de contraintes normales si les sections ne peuvent se déformer librement.

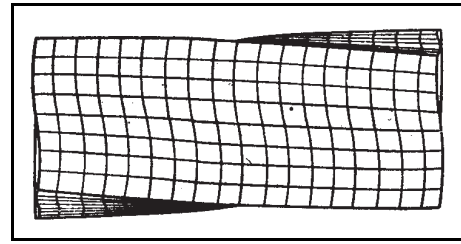


fig 6.10. - Torsion d'une barre non circulaire.

Si nous supposons que :

- [H1] les **dimensions de la section droite de la barre ne varient pas** suivant l'axe de celle-ci,
- [H2] le **moment de torsion est constant** le long de la barre,
- [H3] les **extrémités sont libres de gauchir**,

la **torsion est qualifiée de libre** et seules des contraintes tangentielles apparaissent dans la section droite.

Etant donné que l'hypothèse de la conservation des sections planes n'est plus vérifiée, le problème ne pourra pas être résolu par la résistance des matériaux mais par la théorie de l'élasticité.

Néanmoins, on pourra se raccrocher aux formules générales vues précédemment moyennant un moment d'inertie et un module de résistance à la torsion approprié.

Autrement dit, les formules définitives pour le calcul des contraintes tangentielles maximales τ_{\max} et de l'angle de torsion θ_{\max} se présentent comme suit :

$$\theta_{\max} = \frac{M_t}{G I_t} \quad (\text{éq. 6.66}) \quad [\text{rad/mm}]$$

et :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \quad (\text{éq. 6.67}) \quad [\text{N/mm}^2]$$

Notations : I_t moment d'inertie en torsion libre mm^4
 W_t module de résistance en torsion libre mm^3

Pour les valeurs des différents I_t et W_t voir tableau des modules de résistance à la torsion au chapitre "Moment d'inertie".

A titre d'exemple la distribution des contraintes tangentielles dans une section rectangulaire est schématisée à la figure **fig. 6.11.** ci-contre. La contrainte tangentielle maximale se produisant au milieu du grand côté.

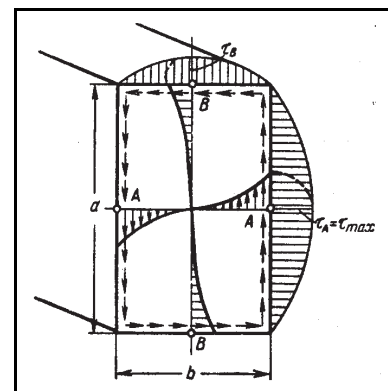


fig 6.11. - Distribution des contraintes.

Dans le cas des sections pleines, on peut aussi utiliser la formule de Saint-Venant ⁽²⁾ afin de calculer le moment de torsion libre. Soit :

$$I_t \approx \frac{A^4}{40 I_0} \quad (\text{éq. 6.68}) \quad [m^4]$$

Notations : A la surface de la section pleine m^2
 I_0 l'inertie polaire de la section m^4

Application 6.5. Un treuil à main est commandé par deux hommes donnant chacun un effort de 200 N. Quel est le côté du carré à faire sur l'arbre pour le placement de la manivelle, celle-ci ayant une longueur de 400 mm ? Prendre comme contrainte admissible : 60 N/mm².

Solution :

Le moment de torsion exercé sur l'arbre est égal à :

$$M_t = (2 F) L = (2 \times 200) \times 400 = 160\,000 \text{ Nmm}$$

Pour un carré, nous avons le module de résistance à la torsion qui est égal à :

$$W_t = 0.2082 c^3$$

Recherche du côté via la formule de la contrainte

$$\tau_{adm} \geq \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{0.2082 c^3} \Rightarrow c \geq \sqrt[3]{\frac{M_t}{0.2082 \tau_{adm}}}$$

$$c \geq \sqrt[3]{\frac{M_t}{0.2082 \tau_{adm}}} = \sqrt[3]{\frac{160\,000}{0.2082 \times 60}} = 23.4 \text{ mm} \Rightarrow c = 25 \text{ mm}$$

Recherche du diamètre admissible de l'arbre

Sachant que la diagonale du carré est le diamètre du cercle circonscrit.

$$d = \frac{c}{\cos 45^\circ} = \frac{25}{\cos 45^\circ} = 35.4 \text{ mm} \Rightarrow d = 36 \text{ mm}$$

⁽²⁾ Saint-Venant (Adhémar Jean Claude Barré de) : (1797 - 1886)

$$k_{g\tau} = 1 - \sqrt[3]{\frac{1 - k_d^2}{1 + k_d^2}} \quad (\text{éq. 6.76})$$

De même on peut montrer que le gain de poids de l'arbre creux par rapport à un arbre plein, (*pour une même déformation*), suit la loi suivante :

$$k_{g\theta} = 1 - \sqrt{\frac{1 - k_d^2}{1 + k_d^2}} \quad (\text{éq. 6.77})$$

Notations : $k_{g\tau}$ coefficient de gain de poids (pour une même contrainte)
 $k_{g\theta}$ coefficient de gain de poids (pour une même déformation)
 k_d rapport (diamètre intérieur sur diamètre extérieur)

Tout ceci peut être résumé dans le tableau ci-après :

k_d	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$k_{g\tau}$	0.01	0.04	0.08	0.14	0.22	0.30	0.39	0.49	0.61
$k_{g\theta}$	0.01	0.04	0.09	0.15	0.23	0.31	0.41	0.53	0.68

Tableau 6.2. - Gain de poids pour une même contrainte $k_{g\tau}$ ou une même déformation $k_{g\theta}$ (arbre creux par rapport à l'arbre plein).

Notons qu'à partir de : $k_d = 0.8$, le gain de poids est d'au moins de 50 %.

En avant-projet, on peut se permettre de prendre : $k_d = 0.8$.

Remarque importante :

Nous avons toujours intérêt à avoir $k_d \leq 0.9$ *afin d'éviter tout risque de flambement de torsion*. En effet si la parois est trop mince, l'arbre (tube) périra par flambement et non par dépassement de la limite de rupture (exemple de la boîte de Coca).

Application 6.6. Soit un arbre d'hélice de bateau de 15 m de longueur. La puissance à transmettre est de 4.5 MW à 350 tr/min. La contrainte admissible de l'acier en torsion est de 80 N/mm².

- Déterminer le diamètre de l'arbre et l'angle de torsion ($G = 80\,000 \text{ N/mm}^2$).
- Ensuite remplacer cet arbre par un arbre de transmission creux pour obtenir le même angle de torsion que précédemment et ce pour un gain de poids de 50 %.

Solution :

Recherche du moment de torsion

$$M_t = \frac{30}{\pi} \frac{P}{n} = \frac{30}{\pi} \times \frac{4.5 \cdot 10^6}{350} = 1.23 \cdot 10^5 \text{ Nm}$$

Recherche du diamètre

$$d \geq 1.72 \sqrt[3]{\frac{M_t}{\tau_{adm}}} = 1.72 \sqrt[3]{\frac{1.23 \cdot 10^8}{80}} \approx 200 \text{ mm}$$

Recherche de la déformation angulaire de cet arbre

$$\theta_{\max} = 10.2 \frac{M_t}{d^4 G} = 10.2 \frac{1.23 \cdot 10^8}{200^4 \times 80\,000} = 0.00001 \text{ rad/mm}$$

Pour rappel :

$$\theta^{[^\circ]} = \theta^{[rad]} \frac{180}{\pi} = 0.00001 \times \frac{180}{\pi} = 5.7 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ/\text{mm} = 0.57 \text{ }^\circ/\text{m}$$

Recherche du diamètre intérieur pour un gain de poids de 50 %

Dans le tableau résumé, on remarque pour un gain de poids de $k_{g_\theta} = 50\%$, il faut : $k_d = 0.8$.

$$\begin{aligned} d &\geq 1.79 \sqrt[4]{\frac{M_t}{(1 - k_d^4) G \theta_{adm}}} = 1.79 \sqrt[4]{\frac{1.23 \cdot 10^8}{(1 - 0.8^4) \times 80\,000 \times 0.00001}} \\ &= 227 \text{ mm} \Rightarrow d = 230 \text{ mm} \\ d_i &= k_d d = 0.8 \times 230 = 184 \text{ mm} \Rightarrow d_i = 180 \text{ mm} \end{aligned}$$

Remarque :

Avec les diamètres de 230 mm extérieur et 180 mm intérieur, nous n'avons pas un gain de 50 %

Application 6.7. Un arbre creux de diamètre extérieur de 50 mm et de diamètre intérieur de 40 mm, a une longueur de 1.50 m.

- Calculer le module de torsion de la section droite.
- Sachant que la contrainte tangentielle est de 30 N/mm², calculer le couple moteur transmis par cet arbre.
- Déduire du résultat précédent la puissance transmise sachant que la vitesse de rotation est de 1200 tr/min.
- De quel angle tournent les sections extrêmes, l'une par rapport à l'autre ? (Prendre $G = 80\,000 \text{ N/mm}^2$).

Solution :a) *Module de torsion*

$$I_0 = \frac{\pi (d^4 - d_i^4)}{32} = \frac{\pi (50^4 - 40^4)}{32} = 362\,265 \text{ mm}^4$$

b) *Couple ou Moment de torsion*

$$\begin{aligned} M_t &= 0.2 d^3 (1 - k_d^4) \tau_{adm} \\ &= 0.2 \times 50^3 \times \left(1 - \left(\frac{40}{50}\right)^4\right) \times 30 = 442\,800 \text{ Nmm} \approx 443 \text{ Nm} \end{aligned}$$

c) *Puissance transmise*

$$P = M_t \omega = M_t \frac{\pi n}{30} = 443 \times \frac{\pi \times 1200}{30} = 55\,669 \approx 55.7 \text{ kW}$$

d) *Angle de torsion*

$$\begin{aligned} \theta &= 10.2 \frac{M_t}{d^4 (1 - k_d^4) G} \\ &= 10.2 \times \frac{442\,800}{50^4 \times \left(1 - \left(\frac{40}{50}\right)^4\right) \times 80\,000} = 0.0000153 \text{ rad/mm} \end{aligned}$$

$$\theta_{adm} [\text{°/m}] = \theta_{adm} [\text{rad/mm}] \frac{180}{\pi} \times 1000 = 0.0000153 \times \frac{180}{\pi} \times 1000 = 0.877 \text{ °/m}$$

Déviation sur la longueur de l'arbre :

$$\theta_{Tot} = 0.877 \times 1.5 = 1.31 \approx 1.3 \text{ °}$$

Application 6.8. Un arbre creux de diamètre extérieur de 120 mm et de diamètre intérieur de 100 mm, a une longueur de 3 m. Il tourne à la vitesse de 180 tr/min. Un système de mesure stroboscopique indique un angle de torsion de 3° entre les deux extrémités de l'arbre. Déterminer la puissance transmise et la contrainte de torsion maximale, prendre $G = 77 \text{ GPa}$.

Solution :a) *Angle relatif de torsion*

$$\theta_{adm} [\text{°/m}] = \frac{\theta_{adm} [\text{°}]}{l} \frac{\pi}{180} = \frac{3}{3} \times \frac{\pi}{180} = 0.0175 \text{ rad/m}$$

b) *Couple ou moment de torsion*

$$\begin{aligned} M_t &= 0.1 d^4 (1 - k_d^4) G \theta \\ &= 0.1 \times 120^4 \times \left(1 - \left(\frac{100}{120}\right)^4\right) \times 77\,000 \times 0.0175 \cdot 10^{-3} \\ &= 1.447 \cdot 10^{+7} \text{ Nmm} = 1.447 \cdot 10^{+4} \text{ Nm} \end{aligned}$$

c) *Puissance transmise*

$$P = M_t \omega = M_t = \frac{\pi n}{30} = 1.447 \cdot 10^4 \times \frac{\pi \times 180}{30} = 273\,000 \text{ W}$$

d) *Contrainte maximale*

$$\tau_{\max} = 5.1 \frac{M_t}{d^3 (1 - k_d^4)} = \frac{1.447 \cdot 10^7}{120^3 \times \left(1 - \left(\frac{100}{120}\right)^4\right)} = 82.5 \text{ N/mm}^2$$

Application 6.9. Estimer la contrainte maximale et l'angle total de torsion de l'ensemble des tubes d'un forage pétrolier, lorsque la profondeur atteinte par le trépan est de 2000 m et que le couple de torsion correspondant est de 40 kNm. Le train de tubes vissés les uns aux autres est assimilable à un tube unique de diamètre extérieur 115 mm et de diamètre intérieur de 92 mm.

Solution :

a) *Contrainte maximale*

$$\tau_{\max} = 5.1 \frac{M_t}{d^3 (1 - k_d^4)} = \frac{40\,000 \cdot 10^3}{115^3 \times \left(1 - \left(\frac{92}{115}\right)^4\right)} = 226.7 \text{ N/mm}^2$$

b) *Angle de torsion*

$$\varphi = 10.2 \frac{M_t l}{d^4 (1 - k_d^4) G} = 10.2 \times \frac{40\,000\,000 \times 2\,000\,000}{115^4 \times \left(1 - \left(\frac{92}{115}\right)^4\right) \times 80\,000} = 98.64 \text{ rad}$$

Soit l'équivalent de 15.7 tours !

6.6. Applications

6.6.1. Torsion d'un arbre muni d'une rainure de clavette

Détermination du diamètre d d'un arbre de transmission pourvu d'une clavette longitudinale.

Nous partirons de l'équation fondamentale de la torsion pour déterminer le diamètre d de l'arbre.

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \leq \tau_{adm}$$

Il s'agit, maintenant de déterminer le module de résistance en torsion libre W_t .

Nous pourrions prendre W_t correspondant à un disque muni d'une rainure de clavette [voir tableau en annexe], mais nous remarquons que nous avons trois inconnues : le diamètre d , la largeur a de la rainure de clavette ainsi que sa profondeur t .

En fait, les dimensions des clavettes longitudinales (donc les rainures) sont normalisées en fonction du diamètre de l'arbre [voir tableau en annexe]. Et lors d'un pré-dimensionnement on peut admettre que la largeur de la rainure a est, environ, le quart du diamètre d , c'est-à-dire : $a/t \approx 0.25$. De plus, la profondeur de la rainure est, environ, la moitié de la largeur, c'est-à-dire $a/2 \approx t$.

De plus, nous pouvons, dès à présent tenir compte de l'effet d'entaille [voir "concentration de contrainte"], et nous supposons que la section utile soumise à torsion est une ellipse (voir figure ci-contre). Le module de résistance en torsion libre d'une ellipse étant égal à :

$$W_{t(ellipse)} = \frac{\pi d d_p^2}{16} \quad (\text{éq. 6.104})$$

<u>Notations</u> :	d	le grand axe de l'ellipse (c'est-à-dire le diamètre de l'arbre)	mm
	d_p	le petit axe de l'ellipse	mm

et, dans notre cas :

$$d_p = d - 2t \approx d - a \approx d - 0.25d = 0.75d$$

d'où :

$$W_{t(ellipse)} = \frac{\pi \times 0.75^2}{16} \times d^3$$

et :

$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi \times 0.75^2} \frac{M_t}{d^3} \leq \tau_{adm}$$

et donc :

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \times 0.75^2} \frac{M_t}{\tau_{adm}}} \approx 2.08 \sqrt[3]{\frac{M_t}{\tau_{adm}}} \quad (\text{éq. 6.108})$$

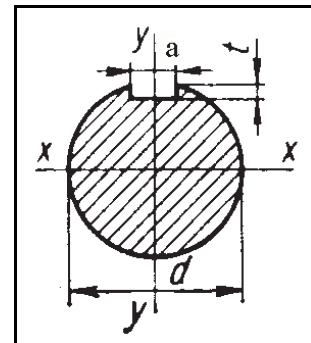


fig 6.15. - Dimensions arbre claveté.

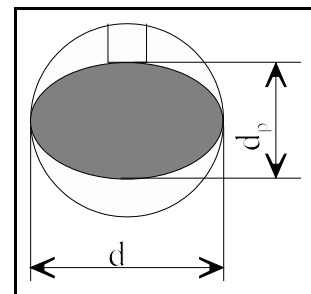


fig 6.16. - Section utile.

Dès lors, connaissant le diamètre d de l'arbre de transmission on recherchera les dimensions exactes de la rainure de clavette (largeur a et profondeur t) pour vérifier, à l'aide cette fois-ci du module de résistance correspondant à un disque doté d'une rainure de clavette, si on ne dépasse pas la valeur de la contrainte de torsion admissible.

Application 6.10. Un moteur électrique d'une puissance de 10 kW tourne à la vitesse de 750 tr/min . Son arbre est en acier XC 32 de limite élastique égale à 320 N/mm^2 . Déterminer son diamètre si on prend un coefficient de sécurité égal à 2.3 et sachant que celui-ci est muni d'une rainure de clavette.

Solution :

Recherche de la contrainte admissible

$$\tau_{adm} = 0.58 \frac{R_e}{S} = 0.58 \times \frac{320}{2.3} = 80\text{ N/mm}^2$$

Recherche du moment de torsion

$$M_t = \frac{30}{\pi} \frac{P}{n} = \frac{30}{\pi} \times \frac{10000}{750} = 127.3\text{ Nm} = 127.3 \cdot 10^3\text{ Nmm}$$

Recherche du diamètre

$$d \geq 2.08 \sqrt[3]{\frac{M_t}{\tau_{adm}}} = 2.08 \sqrt[3]{\frac{127.3 \cdot 10^3}{80}} = 24.3 \Rightarrow d = 25\text{ mm}$$

Dimension de la rainure de clavette normalisée :

$$a = 8\text{ mm} \quad \text{et} \quad t = 4\text{ mm}$$

Vérification :

recherche du module de résistance

$$\begin{aligned} W_t &= \frac{\pi d^3}{16} - \frac{a t (d - t)^2}{2 d} \\ &= \frac{\pi \times 25^3}{16} - \frac{8 \times 4 \times (25 - 4)^2}{2 \times 25} = 2786\text{ mm}^4 \end{aligned}$$

recherche de la contrainte maximale réelle

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{127.3 \cdot 10^3}{2786} = 45.7 \leq 80\text{ N/mm}^2 \quad \text{OK}$$

La différence est relativement grande pour tenir compte des concentrations de contrainte.

6.6.2. Torsion d'un profilé à parois minces

Par définition, une **barre est à parois minces** si son épaisseur (E est largement inférieur à ses autres dimensions (de l'ordre de $1/10^{\text{ème}}$).

On distinguera les profilés ouverts (les quatre premiers) et les profilés fermés (sections en caissons) (les trois derniers).

Nous supposeront, comme nous l'avons fait pour les sections non circulaires, que la torsion est libre.

A) Profilés ouverts

Les contraintes sont pratiquement réparties linéairement suivant l'épaisseur du profil.

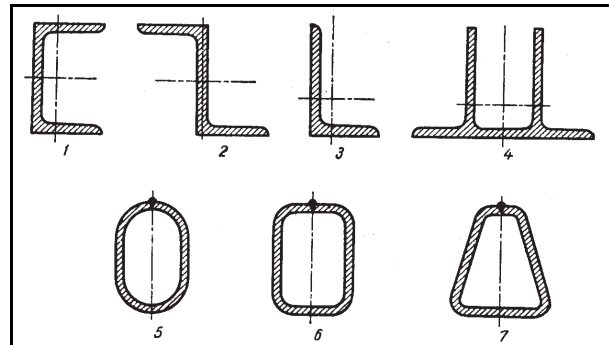


fig 6.17. - Exemples de barres à parois minces.

On peut démontrer que dans le cas de profilés composés (formés d'éléments rectangulaires d'épaisseurs inégales) que les contraintes maximales les plus importantes se développeront au milieu des côtés possédant l'épaisseur la plus grande. Soit :

$$\tau_{\max} = M_t \frac{e_{\max}}{\frac{1}{3} k_1 \sum (l_i e_i^3)} \quad (\text{éq. 6.116})$$

<u>Notations :</u>	l_i	longueur	mm
	e_i	épaisseur correspondante à la longueur	mm
	e_{\max}	épaisseur maximum	mm
	k_1	coefficient de forme	-

$k_1 = 1.15$	pour les profilés laminés en : "T", "U" ou "L"
$k_1 = 1.30$	pour les profilés laminés en : "I", "H"
$k_1 = 1.00$	pour les autres profilés laminés.

De plus, dans la mesure où la section possède un ou plusieurs angle(s) rentrant(s), il y a apparition de concentration de contraintes, et donc la contrainte à l'endroit de ces angles se calcule par :

$$\tau^* = K_t \tau_{\max} \quad (\text{éq. 6.117})$$

<u>Notations :</u>	τ^*	la contrainte au droit de l'angle rentrant.	N/mm^2
	τ_{\max}	la contrainte donnée par (éq. 6.117).	N/mm^2
	K_t	le facteur de concentration de contrainte	-

Ce facteur K_t est un facteur sans dimension supérieur à 1 et d'autant plus important que le rayon de raccordement r est faible vis-à-vis de l'épaisseur e . K_t pouvant être déterminé par :

$$K_t = 1.74 \sqrt[3]{\frac{e}{r}} \quad (\text{éq. 6.118})$$

B) Profils fermés

Pour les sections fermées à parois minces, on utilise la formule de Bredt afin de calculer l'inertie de torsion libre :

$$I_t = \frac{4 A_t^2}{\oint \frac{ds}{e(s)}} = \frac{4 A_t^2}{\sum \frac{s_i}{e_i}} \quad (\text{éq. 6.119}) \quad [m^4]$$

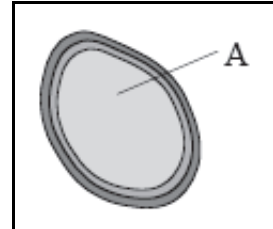


fig 6.18. -

<u>Notations</u> :	A_t	aire limitée par la ligne moyenne de la section	m^2
	s_i	longueur de la ligne moyenne i	m
	e_i	épaisseur correspondante	m

Quant au module de résistance en torsion libre W_t , il peut se calculer suivant la formule suivante :

$$W_t = 2 A_t e_{\min} \quad (\text{éq. 6.120}) \quad [m^3]$$

<u>Notation</u> :	e_{\min}	l'épaisseur minimale du profilé	m
-------------------	------------	---------------------------------	-----

La contrainte de torsion ainsi que l'angle maximal de torsion se déterminent par les formules classiques (§ 6.4.).

Application 6.11. Ci-contre une coupe d'une des poutres d'un pont roulant, bi-poutre, de 12 tonnes et d'une portée de 13.8 m. En tenant compte de la charge, des divers poids morts, ainsi que de la charge dynamique, on peut estimer la charge sur un galet comme étant égal à 40.25 kN ($P_v = 80,5 \text{ kN}$). La charge dynamique horizontale peut être estimée à $P_h = 0.1 P_v$. Quant au poids de la passerelle F il est égal à 4.8 kN. Calculer la contrainte et la déformation maximum de cette poutre en caisson.

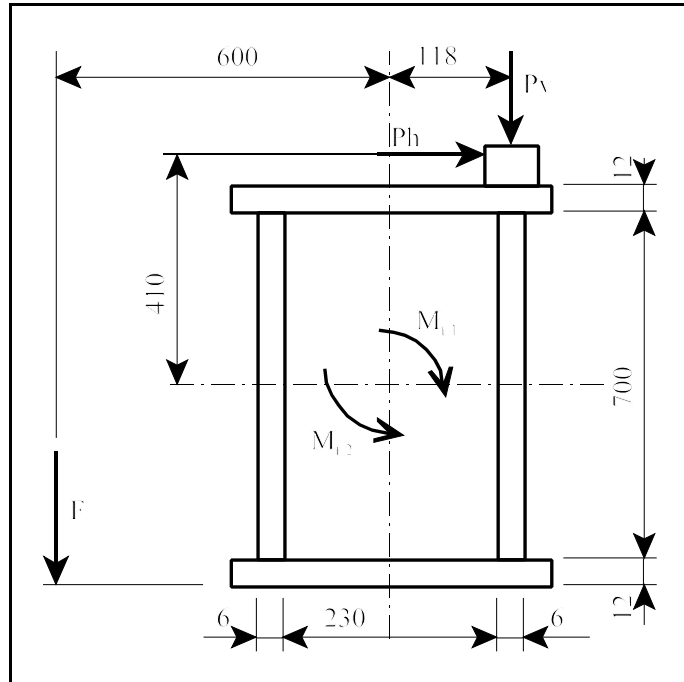


fig 6.19. - Application 6.11.

Solution :

Calcul de l'aire limitée par la ligne moyenne de la section

$$A_t = \left(230 + 2 \times \frac{6}{2} \right) \left(700 + 2 \times \frac{12}{2} \right) = 168032 \text{ mm}^2$$

Calcul de $\sum \frac{s_i}{e_i}$:

$$\sum \frac{s_i}{e_i} = 2 \times \frac{\left(230 + 2 \times \frac{6}{2} \right)}{12} + 2 \times \frac{\left(700 + 2 \times \frac{12}{2} \right)}{6} = 276.7$$

Calcul du moment d'inertie de torsion libre

$$I_t = \frac{4 A_t^2}{\sum \frac{s_i}{e_i}} = \frac{4 \times 168032^2}{276.7} = 408164120 \text{ mm}^4 = 40816.4 \text{ cm}^4$$

Calcul du module de torsion libre

$$W_t = 2 A_t e_{min} = 2 \times 168032 \times 6 = 2016384 \text{ mm}^3 = 2016 \text{ cm}^3$$

Recherche du moment de torsion maximum

Moment de torsion dû à la pression des galets

$$M_{t1} = P_v \times 118 + P_h \times 410 = 80500 \times 125 + 0.1 \times 80500 \times 410$$

$$= 12863900 \text{ Nmm}$$

Moment de torsion dû au poids de la passerelle

$$M_{t2} = F \times 600 = 4800 \times 600 = 2880000 \text{ Nmm}$$

Moment de torsion résultant

cas 1 Pleine charge et sans passerelle :

$$M_{t \text{ tot}} = M_{t1} = 12863900 \text{ Nmm}$$

cas 2 Pleine charge et avec passerelle :

$$M_{t_{tot}} = M_{t_1} - M_{t_2} = 12\,863\,900 - 2\,880\,000 = 9\,983\,900 \text{ Nmm}$$

cas 3 Sans charge, chariot à une extrémité et avec passerelle :

$$M_{t_{tot}} = M_{t_2} = 2\,880\,000 \text{ Nmm}$$

D'où : $M_{t_{max}} = M_{t_1} = 12\,863\,900 \text{ Nmm}$

Contrainte maximale de torsion

$$\tau_{max} = \frac{M_{t_{max}}}{W_t} = \frac{12\,863\,900}{2\,016\,384} = 6.38 \text{ N/mm}^2$$

Angle maximum de torsion

$$\varphi = \frac{M_{t_{max}}}{G I_t} l = \frac{180}{\pi} \times \frac{(12\,863\,900/2)}{80\,000 \times 408\,164\,120} \times \frac{13\,800}{2} = 0.0779^\circ$$

Remarques :

- 1) Le moment de torsion est repris par les 2 extrémités. Pour le calcul de l'angle de torsion il faut donc prendre la moitié du moment de torsion maximum.
 - 2) Dans le même état d'esprit, la longueur est donc la moitié de la portée.
-