

| | |
|----------------------------------------------------------------------|----------|
| CHAPITRE 6. TORSION | - 6.1 - |
| 6.1. Définitions | - 6.1 - |
| 6.2. Torsion d'une barre de section circulaire | - 6.3 - |
| 6.2.1. Recherche de la distribution des contraintes | - 6.3 - |
| 6.2.2. Relations fondamentales | - 6.3 - |
| 6.3. Dimensionnement | - 6.6 - |
| 6.3.1. Contraintes admissibles | - 6.6 - |
| 6.3.2. Application au calcul d'arbre | - 6.6 - |
| A) Arbres creux | - 6.6 - |
| B) Arbres pleins | - 6.7 - |
| 6.3.3. Déformation admissible | - 6.8 - |
| 6.3.4. Application au calcul d'arbre | - 6.8 - |
| 6.3.5. Remarques concernant le dimensionnement des arbres | - 6.9 - |
| A) Relation couple - puissance | - 6.9 - |
| B) Notion de couple maximum | - 6.9 - |
| 6.4. Torsion d'une barre à section transversale non circulaire | - 6.12 - |
| 6.4.1. Théorie | - 6.12 - |
| 6.4.2. Exemples | - 6.13 - |
| A) Rectangle | - 6.13 - |
| B) Ellipse | - 6.14 - |
| C) Arbre hexagonal | - 6.14 - |
| D) Arbre muni d'une rainure de clavette | - 6.14 - |
| E) Arbre triangulaire | - 6.15 - |
| 6.5. Torsion d'un profilé à parois minces | - 6.16 - |
| 6.5.1. Profilés ouverts | - 6.16 - |
| 6.5.2. Profilés fermés | - 6.17 - |
| 6.6. Choix de la forme de la section droite | - 6.21 - |
| 6.7. Applications | - 6.25 - |
| 6.7.1. Torsion d'un arbre muni d'une rainure de clavette | - 6.25 - |
| 6.8. Résumé : calcul des arbres | - 6.27 - |

CHAPITRE 6. TORSION

6.1. Définitions

Par l'exemple de la traction et de la compression, nous avons mis en évidence quelques-unes des plus importantes propriétés de l'état de contrainte. Lors de la traction (compression) l'état de contrainte se réduisait à la seule composante normale σ . Lors de la **torsion**, l'état de contrainte se réduira **aux seules composantes τ** dans le plan de la section.

Autrement dit, la **torsion pure** est un état de charge tel que dans toute section droite d'une pièce il n'existe qu'un **moment de torsion M_t** .

De plus :

Une **barre** soumise principalement à **torsion** porte le nom d'**arbre**.

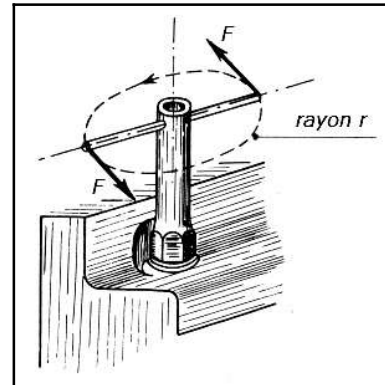


fig 6.1. - Exemple de barre soumise à torsion.

Par convention, le moment de torsion (effort interne) est positif s'il agit dans le sens anti-horlogique pour un observateur qui regarde la section.

On peut montrer, à partir de la loi de Hooke, qu'un petit élément soumis uniquement à des contraintes tangentielles τ (état de cisaillement pur) se déforme en faisant apparaître un angle γ (appelé angle de cisaillement) proportionnel à τ (voir fig.6.3.).

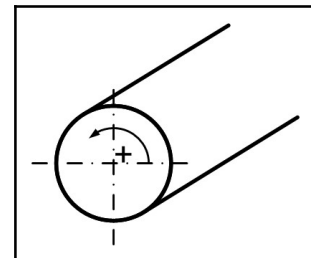


fig 6.2. - Convention de signe "+".

$$\tau = \gamma G \quad (\text{éq. 6.1})$$

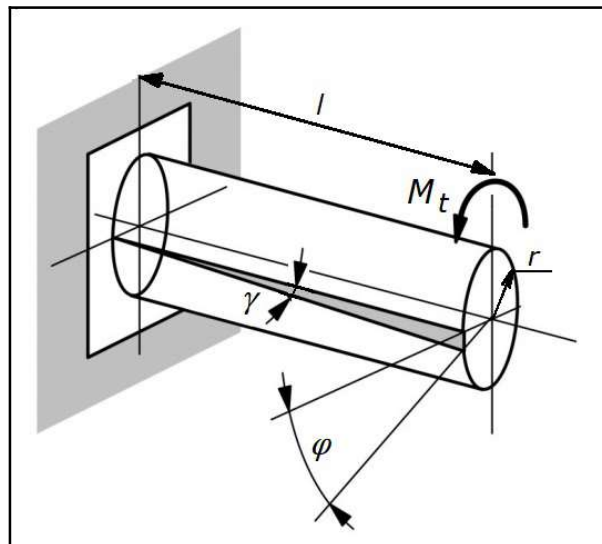


fig 6.3. - Loi de Hooke et angles de déformation.

La quantité G , appelé **module de cisaillement** ou **module de Coulomb** ⁽¹⁾ ou **module d'élasticité transversale**, dépend du matériau et est exprimée en N/mm^2 .

Remarque :

Cette formule est à rapprocher de la loi de Hooke : $\sigma = \varepsilon \cdot E$

Il existe une relation entre le module de Young et le module de Coulomb. Cette relation s'écrit :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{éq. 6.3})$$

Notation : ν coefficient de Poisson -

Remarque :

On observe que, quelque soit la valeur du coefficient de Poisson ν , le module d'élasticité transversale G sera toujours inférieur au module d'élasticité longitudinal E . En d'autres termes, un matériau sera toujours moins "rigide" sous l'effet d'un moment de torsion, que sous l'effet d'un effort de traction.

Application 6.1. Que vaut le coefficient de Poisson de la fonte grise sachant que : $E = 90\,000 \text{ N/mm}^2$ et que le module de Coulomb $G = 36\,000 \text{ N/mm}^2$?

Solution :

Application directe de la formule éq. 6.3. :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \nu = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{90\,000}{2 \times 36\,000} - 1 = 0.25$$

Formule approchée (pour les matériaux métalliques) :

$$G \approx 0.4 E \Rightarrow \nu = \frac{E}{2G} - 1 \approx \frac{1}{2 \times 0.4} - 1 = 0.25$$

⁽¹⁾ Coulomb (Charles-Augustin) (1736 [Angoulême] - 1806 [Paris]) : ingénieur et physicien français

6.2. Torsion d'une barre de section circulaire

6.2.1. Recherche de la distribution des contraintes

Considérons une barre de section circulaire soumise à un moment de torsion constant.

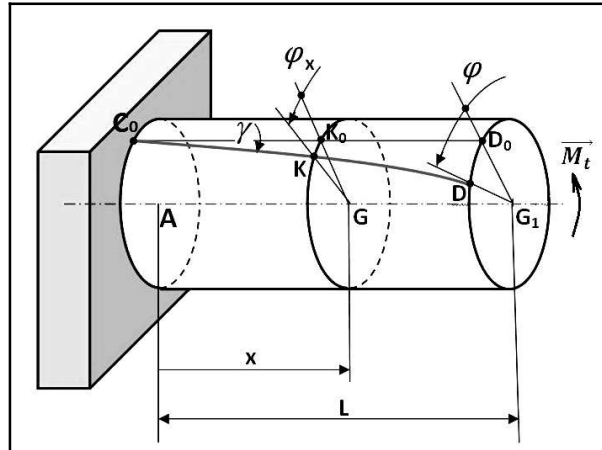


fig 6.4. - Barre soumise à torsion pure : les sections restent planes.

On constate que, pour des raisons de symétrie, chaque section droite tourne dans son plan, autour de son centre, comme un ensemble rigide. On en déduit : *que toute section droite plane reste droite plane après déformation.*

De plus, l'expérience montre que la longueur d'une barre soumise à torsion ne varie pas tant que l'angle de torsion est petit.

On constate que les contraintes tangentielles agissant sur une section droite sont proportionnelles à la distance ρ à l'axe de l'arbre et maximales à la périphérie. La distribution des τ est représentée à la figure ci-contre. Les tensions varient donc linéairement de 0 à τ_{\max} .

La tension maximale se situant à la périphérie de la pièce.

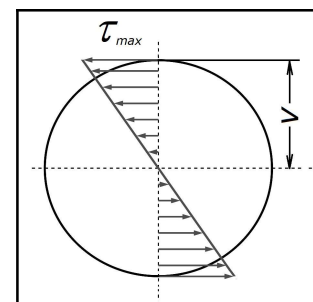


fig 6.5. - Répartition des contraintes tangentielles pour une section circulaire.

6.2.2. Relations fondamentales

Trois *hypothèses* afin d'établir les différentes relations fondamentales de la torsion :

- [H1] pas de variation de section (section constante);
- [H2] moment de torsion constant;
- [H3] déformation angulaire petite par rapport à la longueur.

Si l'angle de déformation γ (voir **fig.6.3.**) est petit, nous pouvons l'assimiler à sa tangente. Nous écrivons dès lors : $\gamma \approx \tan \gamma$.

Si, comme l'angle est petit, nous pouvons assimiler l'arc de cercle à une droite, et, dès lors écrire :

$$\boxed{l \operatorname{tg} \gamma = r \varphi \Rightarrow l \gamma = r \varphi} \quad (1)$$

La loi de Hooke s'écrivant :

$$\tau = \gamma G \quad (2)$$

nous obtenons, en posant $\theta = \varphi/l$ l'angle relatif de déformation :

$$\tau = \frac{r \varphi G}{l} = r \theta G \quad (3)$$

| | | | |
|--------------------|-----------|--------------------------------|----------|
| <i>Notations :</i> | G | module de Coulomb | N/mm^2 |
| | r | rayon de la section circulaire | mm |
| | γ | angle de cisaillement | rad |
| | φ | déformation angulaire | rad |
| | θ | angle relatif de déformation | rad/mm |
| | l | longueur de la barre | mm |

Analysons le phénomène de torsion quand un moment de torsion M_t produit une déformation élastique du cylindre-éprouvette.

Sur la figure ci-dessous, $-M_t$ est représenté par le couple $F-F'$, forces situées dans le plan de la section droite d'extrémité; mais dans le cas idéal de torsion que nous devons imaginer, nous devons imaginer des couples $f-f'$, dans le plan de la section (en chaque mm^2 par exemple).

Sur chaque élément de surface ΔA nous avons dessiné la force f tangente à la circonférence de rayon ρ ; ces forces sont telles que leur moment : $\sum \rho_i f_i = -M_t$.

Isolons par une coupure (section droite) un tronçon d'arbre. Pour le maintenir en équilibre, il faut appliquer sur chaque élément de section ΔA des forces tangentielles f' .

Le poids étant négligé, pour maintenir ce tronçon en équilibre, nous pouvons appliquer à chaque élément ΔA (à chaque mm^2 par exemple) une force f' située dans le plan de la coupure, donc tangentielle.

L'ensemble des forces f' constitue la réaction au couple $-M_t$.

Quelles sont les conditions d'équilibre imposées par la statique ?

$$\sum (\vec{f}_i) = 0 \quad \text{et} \quad \sum (\vec{C}_i) = 0$$

Ces conditions sont satisfaites si à chaque force f nous faisons correspondre comme l'indique la figure une force f' égale et de sens opposés à f . Dans ce cas :

$$\sum \rho_i f_i = M_t \quad (4)$$

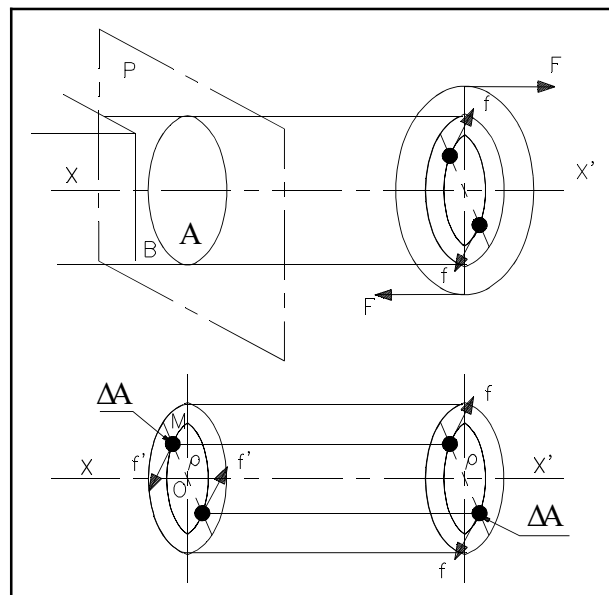


fig 6.6. - Démonstration.

La contrainte tangentielle τ est par définition une force par unité de surface. Dans notre cas, nous pouvons dire :

$$\tau = \frac{f_i'}{\Delta A_i} \Rightarrow f_i' = \tau \Delta A_i$$

Avec la relation (4) nous avons :

$$M_t = \sum \rho_i f_i' = \sum \rho_i \tau \Delta A_i .$$

Introduisons la relation (3) dans l'équation ci-dessus :

$$M_t = \sum \rho_i (\rho_i \theta G) \Delta A_i = \sum \rho_i^2 \Delta A_i \theta G .$$

En ce rappelant que :

$$I_0 = \sum \rho_i^2 \Delta A_i ,$$

nous obtenons la relation entre le moment de torsion M_t et les autres paramètres. Soit :

$$\boxed{M_t = I_0 \theta G} \quad (5)$$

On ainsi déduire les deux relations fondamentales pour le calcul des barres rondes soumises à torsion.

La première donne la relation entre **la déformation angulaire φ** (ou **l'angle relatif θ**) et **le moment de torsion M_t** . A partir de l'équation (5), nous écrivons :

$$\boxed{\theta_{\max} = \frac{M_t}{G I_0}} \quad (\text{éq. 6.20}) \quad [rad/mm]$$

et sachant que : $\varphi/l = \theta$, nous obtenons :

$$\boxed{\varphi = \frac{M_t l}{G I_0}} \quad (\text{éq. 6.22}) \quad [rad]$$

La seconde donne la relation entre **la contrainte tangentielle maximum τ_{\max}** et **le moment de torsion M_t** . En mettant l'équation (4) dans l'équation (3), nous obtenons :

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_0/r} = \frac{M_t}{W_p}} \quad (\text{éq. 6.23}) \quad [N/mm^2]$$

(τ_{\max} se situant à la périphérie de la section circulaire)

| | | | |
|--------------------|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <u>Notations</u> : | M_t | moment de torsion | Nmm |
| | I_0 | moment d'inertie polaire de la section | mm^4 |
| | r | rayon de la section circulaire | mm |
| de plus : | $G I_0$ | est appelé rigidité à la torsion | Nmm^2 |
| | I_0/r | est appelé module de résistance à la torsion ou module de résistance polaire | mm^3 |

6.3. Dimensionnement

6.3.1. Contraintes admissibles

- 1) Dans le cas d'un **matériau ductile**, la contrainte tangentielle admissible en torsion τ_{adm} est obtenue en tenant compte d'un coefficient de sécurité S par rapport à la limite d'élasticité en cisaillement τ_e :

$$\tau_{adm} = \frac{\tau_e}{S} \quad (\text{éq. 6.26})$$

On peut montrer que les critères de résistance permettent de déterminer τ_e à partir de la limite apparente d'élasticité R_e en traction :

$$\tau_{e\text{ cis}} = (0.5) \dots 0.577 \dots (0.6) R_e \quad \text{et donc :}$$

$$\tau_{adm} = 0.58 \frac{R_e}{S} \quad (\text{éq. 6.28})$$

- 2) Si le **matériau est fragile**, l'expérience montre que la rupture se produit suivant une surface hélicoïdale inclinée à 45° par rapport à l'axe de l'arbre (ex. : la craie).

La fissuration est due aux contraintes normales de traction qui atteignent leur valeur maximale σ_{max} sur des facettes contenues dans la surface hélicoïdale. Dès lors la contrainte tangentielle admissible τ_{adm} se déterminera à partir de la résistance à la rupture R_m et non plus à partir de τ_e :

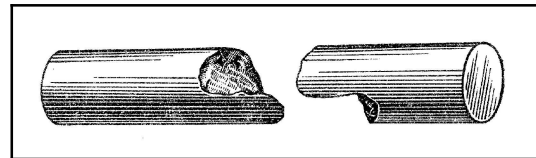


fig 6.7. - Rupture fragile en torsion.

Dès lors la contrainte tangentielle admissible τ_{adm} se déterminera à partir de la résistance à la rupture R_m et non plus à partir de τ_e :

$$\tau_{adm} = \frac{R_m}{S} \quad (\text{éq. 6.29})$$

- 3) **Quel que soit le type de matériau utilisé**, le dimensionnement des sections droites devra être tel que les contraintes tangentielles maximales τ_{max} ne dépassent pas la contrainte tangentielle admissible τ_{adm} :

$$\tau_{max} \leq \tau_{adm} \quad (\text{éq. 6.30})$$

- 4) Les coefficients de sécurité S seront les mêmes que ceux définis au chapitre "Traction - Compression".

6.3.2. Application au calcul d'arbre

Déterminons la relation qui existe entre le diamètre extérieur d d'un arbre de section annulaire (diamètre intérieur d_i), soumis à un moment de torsion M_p , en fonction de la contrainte tangentielle admissible τ_{adm} .

A) Arbres creux

On suppose connu la proportion qui existe entre le diamètre extérieur d et le diamètre intérieur d_i . Soit : $k_d = d_i / d$.

Dès lors :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{16 d M_t}{\pi (d^4 - d_i^4)} = \frac{16 M_t}{\pi d^3 (1 - k_d^4)} \leq \tau_{adm}$$

d'où :

$$\tau_{adm} \geq \frac{16}{\pi} \frac{M_t}{d^3 (1 - k_d^4)} \approx 5.1 \frac{M_t}{d^3 (1 - k_d^4)} \quad (\text{éq. 6.33})$$

Après mise en évidence du diamètre d , on trouve l'équation pour la conception des arbres :

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{M_t}{(1 - k_d^4) \tau_{adm}}} \approx 1.72 \sqrt[3]{\frac{M_t}{(1 - k_d^4) \tau_{adm}}} \quad (\text{éq. 6.34})$$

Ainsi que la formule dérivée concernant le couple admissible transmis pour un arbre donné :

$$M_t = \frac{\pi}{16} d^3 (1 - k_d^4) \tau_{adm} \approx 0.2 d^3 (1 - k_d^4) \tau_{adm} \quad (\text{éq. 6.35})$$

B) Arbres pleins

Pour un arbre cylindrique plein de diamètre d , on aura dans les formules précédentes :

$d_i = 0 \Rightarrow k_d = 0$ et dans ce cas nous obtenons :

$$\tau_{adm} \geq \frac{16}{\pi} \frac{M_t}{d^3} \approx 5.1 \frac{M_t}{d^3} \quad (\text{éq. 6.37})$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{M_t}{\tau_{adm}}} \approx 1.72 \sqrt[3]{\frac{M_t}{\tau_{adm}}} \quad (\text{éq. 6.38})$$

$$M_t = \frac{\pi}{16} d^3 \tau_{adm} \approx 0.2 d^3 \tau_{adm} \quad (\text{éq. 6.39})$$

6.3.3. Déformation admissible

Généralement, on limite l'angle relatif de torsion à une valeur admissible θ_{adm} déterminé suivant le type d'utilisation de la barre :

$$\theta_{max} \leq \theta_{adm} \quad (\text{éq. 6.40})$$

Remarques :

- 1) En général les arbres de transmission se calculent à la déformation admissible plutôt qu'à la contrainte admissible, et dans ce cas θ_{adm} vaut :

$$\begin{aligned} \theta_{adm} &= \dots 0.25 \dots 0.33 \dots (0.5)^\circ/m \\ \theta_{adm} &= \dots 0.00436 \dots 0.00576 \dots (0.00873) \text{ rad}/m \end{aligned} \quad (\text{éq. 6.41})$$

- 2) Si l'angle θ_{adm} est exprimé en $^\circ/mm$, il faut convertir, en rad/mm suivant la formule :

$$\theta_{adm} [\text{rad}/mm] = \theta_{adm} [^\circ/mm] \frac{\pi}{180} \quad (\text{éq. 6.42})$$

6.3.4. Application au calcul d'arbre

Déterminons la relation qui existe entre le diamètre extérieur d d'un arbre de section annulaire (diamètre intérieur d_i), soumis à un moment de torsion M_t , en fonction de la déformation tangentielle admissible θ_{adm} .

A) Arbres creux

On supposera connu la proportion : $k_d = d_i/d$. Dès lors :

$$\theta_{max} = \frac{M_t}{G I_0} = \frac{32 M_t}{\pi (d^4 - d_i^4) G} = \frac{32 M_t}{\pi d^4 (1 - k_d^4) G} \leq \theta_{adm}$$

d'où :

$$\theta_{adm} \geq \frac{32 M_t}{\pi d^4 (1 - k_d^4) G} \approx 10.2 \frac{M_t}{d^4 (1 - k_d^4) G} \quad (\text{éq. 6.45})$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_t}{\pi (1 - k_d^4) G \theta_{adm}}} \approx 1.79 \sqrt[4]{\frac{M_t}{(1 - k_d^4) G \theta_{adm}}} \quad (\text{éq. 6.46})$$

$$M_t = \frac{\pi}{32} d^4 (1 - k_d^4) G \theta_{adm} \approx 0.1 d^4 (1 - k_d^4) G \theta_{adm} \quad (\text{éq. 6.47})$$

si θ_{adm} est exprimé en rad/mm , M_t en Nmm , G en N/mm^2 et d en mm .

B) Arbres pleins

Pour un arbre cylindrique plein de diamètre d , on aura dans les formules précédentes :

$d_i = 0 \Rightarrow k_d = 0$ et dans ce cas nous obtenons :

$$\theta_{adm} \geq \frac{32}{\pi} \frac{M_t}{d^4 G} \approx 10.2 \frac{M_t}{d^4 G} \quad (\text{éq. 6.49})$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32}{\pi} \frac{M_t}{G \theta_{adm}}} \approx 1.79 \sqrt[4]{\frac{M_t}{G \theta_{adm}}} \quad (\text{éq. 6.50})$$

$$M_t = \frac{\pi}{32} d^4 G \theta_{adm} \approx 0.1 d^4 G \theta_{adm} \quad (\text{éq. 6.51})$$

En résumé :

Arbres courts : ils se calculent uniquement **à la résistance**.

Arbres longs : ils se calculent **à la déformation**, malgré une résistance convenable.

6.3.5. Remarques concernant le dimensionnement des arbres

A) Relation couple - puissance

Dans de nombreuses applications de torsion on connaît la **puissance** à transmettre et non le **moment de torsion**. Si tel est le cas, connaissant la puissance P à transmettre (en watt) et la vitesse de rotation n de cet arbre (en tours par minute), nous pouvons retrouver le moment de torsion M_t par la relation :

$$P = M_t \omega \quad (\text{éq. 6.52})$$

avec ω la vitesse de rotation rad/s et la relation entre n et ω est :

$$\omega = \frac{2 \pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \quad (\text{éq. 6.53})$$

d'où :

$$M_t = \frac{30}{\pi} \frac{P}{n} \approx 9.55 \frac{P}{n} \quad (\text{éq. 6.54})$$

Sans oublier que si P est en W et n en $tours/min$, M_t est en Nm . Il faudra donc transformer le moment de torsion en Nmm pour qu'il soit compatible avec les formules précédentes.

B) Notion de couple maximum

Souvent les machines, électriques et autres, sont dimensionnées pour un couple nominal. Cependant, lors du calcul des arbres de transmissions de ces machines, il faut tenir compte des chocs éventuels qui peuvent se produire suite à la transmission des différents efforts. C'est pourquoi, on majore le couple nominal d'un certain coefficient de choc k_c (voir tableau des coefficients de choc dans le

chapitre *Introduction à la résistance des matériaux*).

Le moment de torsion M_t à utiliser dans les formules précédentes sera donc :

$$M_t = k_c M_{t \text{ nominal}} \quad (\text{éq. 6.55})$$

Application 6.2. Un moteur électrique d'une puissance de 20 kW tourne à la vitesse de 600 tr/min. Son arbre est en acier ($G = 80\,000 \text{ N/mm}^2$). Déterminer son diamètre dans le cas où :

- on considère l'arbre comme court avec une contrainte admissible $\tau_{adm} = 40 \text{ N/mm}^2$;
- on considère l'arbre comme un arbre de transmission avec un angle relatif admissible $\theta_{adm} = 0.25^\circ/\text{m}$.

Solution :

a) *Arbre court*

Recherche du moment de torsion

$$M_t = \frac{30}{\pi} \frac{P}{n} = \frac{30}{\pi} \times \frac{20\,000}{600} = 318.3 \text{ Nm} = 318.3 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$$

Calcul du diamètre (à la contrainte)

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{M_t}{\tau_{adm}}} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \times \frac{318.3 \cdot 10^3}{40}} = 34.3 \text{ mm} \Rightarrow 35 \text{ mm}$$

b) *Arbre long*

Angle relatif admissible

$$\theta = \frac{0.25 \times \pi}{180} 10^{-3} = \frac{\pi}{720} 10^{-3} \text{ rad/mm}$$

Calcul du diamètre (à déformation)

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32}{\pi} \frac{M_t}{G \theta_{adm}}} = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi} \times \frac{318.3 \cdot 10^3}{80\,000 \times \left(\frac{\pi}{720}\right) 10^{-3}}} = 55.2 \text{ mm} \Rightarrow 56 \text{ mm}$$

Application 6.3. Un moteur électrique d'une puissance de 10 kW tourne à la vitesse de 750 tr/min. Son arbre est en acier XC 32 de limite élastique égale à 320 N/mm². Déterminer son diamètre si on prend un coefficient de sécurité égal à 2.3.

L'arbre du moteur est court; on peut donc le considérer comme sollicité uniquement à la torsion (sans flexion).

Solution :

Recherche de la contrainte admissible

$$\tau_{adm} = 0.58 \frac{R_e}{S} = 0.58 \times \frac{320}{2.3} = 80.7 \text{ N/mm}^2$$

Recherche du moment de torsion

$$M_t = \frac{30}{\pi} \frac{P}{n} = \frac{30}{\pi} \times \frac{10\,000}{750} = 127.3 \text{ Nm} = 127.3 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$$

Recherche du diamètre : arbre court

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{M_t}{\tau_{adm}}} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{127.3 \cdot 10^3}{80.7}} = 20.0 \text{ mm}$$

Application 6.4. On considère l'une des barres de torsion servant à la suspension élastique du châssis d'une automobile. L'effort qui agit à l'extrémité D du levier \overline{CD} , de longueur 400 mm, est de 300 daN.

- En se basant sur le tableau du Chapitre 2 (Tableau 2.1. - Module d'élasticité E et coefficient de Poisson ν de divers matériaux), on calculera G .
- Calculer le diamètre de la barre sachant qu'elle est en acier au chrome-silicium-molybdène 45 SCD 6 pour lequel on peut admettre une contrainte tangentielle de 400 N/mm^2 .
- Calculer la longueur de la barre de façon que la levier tourne au plus d'un angle de 18° lorsque la voiture repose sur ses roues.

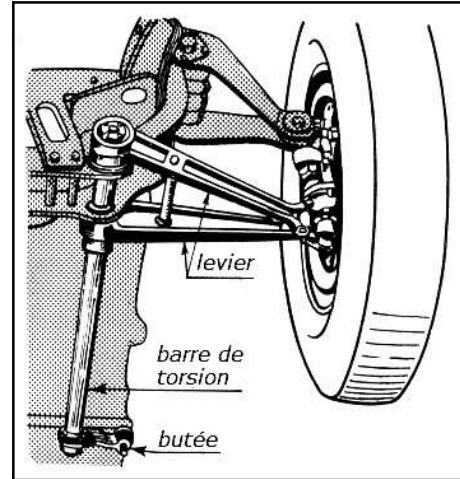


fig 6.8. - Application 6.4.

Solution :

- a) Calcul du module d'élasticité transversal

Acier 45 SCD 6 :

$$E = 220\,000 \text{ N/mm}^2 \text{ et } \nu = 0.285$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{220\,000}{2 \times (1+0.285)} = 85\,600 \text{ N/mm}^2$$

- a) Calcul du diamètre

Recherche du moment de torsion :

$$M_t = F l = 3\,000 \times 400 = 1\,200 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{M_t}{\tau_{adm}}} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{1\,200 \cdot 10^3}{400}} = 24.8 \text{ mm} \Rightarrow d = 25 \text{ mm}$$

- b) Calcul de la longueur

$$\theta_{\max} = 10.2 \frac{M_t}{d^4 G} \text{ et } \frac{\varphi}{l} = \theta$$

$$\varphi = 18^\circ \Rightarrow \varphi = 18 \times \frac{\pi}{180} = 0.314 \text{ rad}$$

$$l = \frac{\varphi d^4 G}{10.2 M_t} = \frac{0.314 \times 25^4 \times 85\,600}{10.2 \times 1\,200 \cdot 10^3} = 858 \Rightarrow 860 \text{ mm}$$

6.4. Torsion d'une barre à section transversale non circulaire

6.4.1. Théorie

On constate expérimentalement que, sous l'action du moment de torsion, la section de la barre subit un gauchissement. Celui-ci provoquera l'apparition de contraintes normales si les sections ne peuvent se déformer librement.

Si nous supposons que :

- [H1] les **dimensions de la section droite de la barre ne varient pas** suivant l'axe de celle-ci,
- [H2] le **moment de torsion est constant** le long de la barre,
- [H3] les **extrémités sont libres de gauchir**.

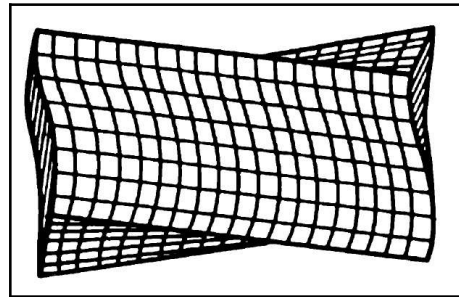


fig 6.9. - Torsion d'une barre non circulaire.

la **torsion est qualifiée de libre** et seules des contraintes tangentielles apparaissent dans la section droite.

Etant donné que l'hypothèse de la conservation des sections planes n'est plus vérifiée, le problème ne pourra pas être résolu par la résistance des matériaux mais par la théorie de l'élasticité.

Néanmoins, on pourra se raccrocher aux formules générales vues précédemment moyennant un moment d'inertie et un module de résistance à la torsion approprié.

Autrement dit, les formules définitives pour le calcul des contraintes tangentielles maximales τ_{\max} et de l'angle de torsion θ_{\max} se présentent comme suit :

$$\theta_{\max} = \frac{M_t}{G I_t} \quad (\text{éq. 6.71}) \quad [\text{rad/mm}]$$

et :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \quad (\text{éq. 6.72}) \quad [\text{N/mm}^2]$$

| | | | |
|--------------------|-------|---------------------------------------|---------------|
| <u>Notations</u> : | I_t | moment d'inertie en torsion libre | mm^4 |
| | W_t | module de résistance en torsion libre | mm^3 |

Remarque :

Les valeurs de I_t et de W_t ne représentent nullement des moments ou des modules d'inertie. Ce sont simplement des grandeurs ayant mêmes dimensions. De plus les valeurs de I_t sont toujours inférieurs au moment d'inertie polaire I_0 .

La contraintes tangentielles maximales a toujours lieu sur la périphérie et au point le plus rapproché du centre de torsion, contrairement à la torsion des barres rondes.

Dans le cas *des sections pleines*, on peut aussi utiliser la formule de Saint-Venant ⁽²⁾ afin de calculer le moment de torsion libre. Soit :

⁽²⁾ Saint-Venant (Adhémar Jean Claude Barré de) (1797 - 1886) : ingénieur, physicien et mathématicien français.

$$I_t \approx \frac{A^4}{4\pi^2 I_0} \approx \frac{A^4}{40 I_0} \quad (\text{éq. 6.73}) \quad [m^4]$$

Notations : A la surface de la section pleine m^2
 I_0 l'inertie polaire de la section m^4

Cette dernière formule revient à remplacer la section donnée par une section elliptique équivalente ayant même surface et même moment d'inertie polaire.

6.4.2. Exemples

A) Rectangle

A titre d'exemple la distribution des contraintes tangentielles dans une section rectangulaire est schématisée à la figure **fig.6.10.** ci-contre. La contrainte tangentielle maximale se produisant au milieu du grand côté.

Les formules spécifiques concernant le rectangles sont :

- moment d'inertie en torsion libre :

$$I_{t(\text{rectangle})} = k_1 a b^3 \approx \frac{a b^3}{3} \left(1 - \frac{192 b}{\pi^5 a} \tanh\left(\frac{\pi a}{2b}\right) \right) \quad (\text{éq. 6.74})$$

- module de résistance en torsion libre :

$$W_{t(\text{rectangle})} = k_2 a b^2 \approx \frac{a b^2}{\left(3 + 1.8 \frac{b}{a} \right)} \quad (\text{éq. 6.75})$$

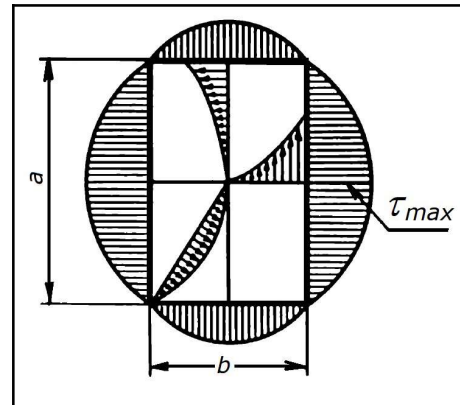


fig 6.10. - Distribution des contraintes dans une section rectangulaire.

Notations : a le plus grand côté m
 b le plus petit côté ($a > b$) m
 k_1, k_2 coefficients (voir tableau ci-dessus) -

| a/b | k_1 | k_2 | a/b | k_1 | k_2 | a/b | k_1 | k_2 |
|-------|--------|--------|-------|--------|--------|----------|--------|--------|
| 1.0 | 0.1406 | 0.2082 | 1.9 | 0.2233 | 0.2432 | 4.5 | 0.2866 | 0.2870 |
| 1.1 | 0.1540 | 0.2139 | 2.0 | 0.2287 | 0.2459 | 5.0 | 0.2913 | 0.2915 |
| 1.2 | 0.1651 | 0.2189 | 2.2 | 0.2380 | 0.2509 | 6.0 | 0.2983 | 0.2984 |
| 1.3 | 0.1771 | 0.2234 | 2.4 | 0.2459 | 0.2554 | 7.0 | 0.3033 | 0.3033 |
| 1.4 | 0.1869 | 0.2273 | 2.6 | 0.2526 | 0.2597 | 8.0 | 0.3071 | 0.3071 |
| 1.5 | 0.1958 | 0.2310 | 2.8 | 0.2583 | 0.2636 | 9.0 | 0.3100 | 0.3100 |
| 1.6 | 0.2037 | 0.2343 | 3.0 | 0.2633 | 0.2672 | 10 | 0.3123 | 0.3123 |
| 1.7 | 0.2109 | 0.2375 | 3.5 | 0.2733 | 0.2751 | 20 | 0.3228 | 0.3228 |
| 1.8 | 0.2174 | 0.2404 | 4.0 | 0.2808 | 0.2817 | ∞ | 1/3 | 1/3 |

Tableau 6.1. - Coefficients k_1 et k_2 pour le calcul en torsion libre d'un rectangle.

Remarque :

Si $b \ll a \Rightarrow a/b = \infty$, ce qui correspond à un mince rectangle (plaque mince).

B) Ellipse

Dans le cas d'une section elliptique, nous avons comme :

- moment d'inertie en torsion libre :

$$I_{t(\text{ellipse})} = \frac{\pi}{16} \frac{d^3 d_p^3}{d^2 + d_p^2} \quad (\text{éq. 6.78})$$

- module de résistance en torsion libre :

$$W_{t(\text{ellipse})} = \frac{\pi d d_p^2}{16} \quad (\text{éq. 6.79})$$

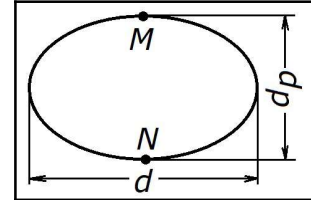


fig 6.11. - Section elliptique.

Notations :

| | | |
|-------|------------------------|----|
| d | grand axe de l'ellipse | mm |
| d_p | petit axe de l'ellipse | mm |

Les contraintes tangentielles sont maximales aux 2 extrémités M et N du petit axe.

C) Arbre hexagonal

Dans le cas d'une section hexagonale, nous avons comme :

- moment d'inertie en torsion libre :

$$I_{t(\text{hexagone})} = 0.1154 d^4 \quad (\text{éq. 6.80})$$

- module de résistance en torsion libre :

$$W_{t(\text{hexagone})} = 0.1888 d^3 \quad (\text{éq. 6.81})$$

La relation entre r et d est :

$$d = \sqrt{3} r \quad (\text{éq. 6.82})$$

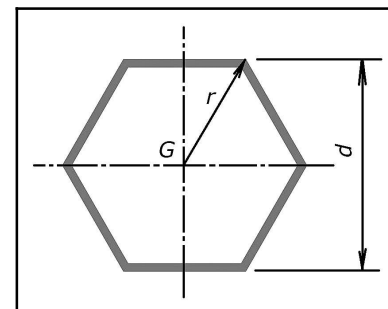


fig 6.12. - Section hexagonale.

La contrainte tangentielle maximale se situe au milieu des côtés.

D) Arbre muni d'une rainure de clavette

Dans le cas d'un arbre muni d'une clavette, le module de résistance en torsion libre peut s'approximer par la formule suivante :

$$W_t \approx \frac{\pi d^3}{16} - \frac{a t (d-t)^2}{2d} \quad (\text{éq. 6.83})$$

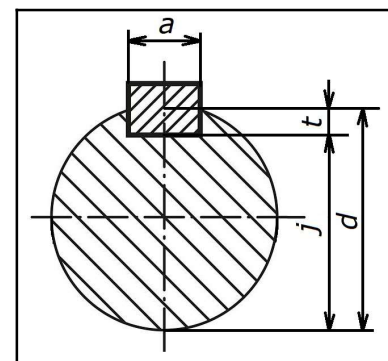


fig 6.13. - Dimensions d'un arbre muni d'une clavette.

Notations :

| | | |
|-----|---------------------------------------------------|----|
| d | diamètre de l'arbre | mm |
| a | largeur de la rainure de clavette | mm |
| t | profondeur entaillée dans l'arbre ($t = d - j$) | mm |

E) Arbre triangulaire

Dans le cas d'une section triangulaire, nous avons comme :

- moment d'inertie en torsion libre :

$$I_t (\text{hexagone}) = 0.0361 c^4 \quad (\text{éq. 6.85})$$

- module de résistance en torsion libre :

$$W_t (\text{hexagone}) = c^3 / 20 \quad (\text{éq. 6.86})$$

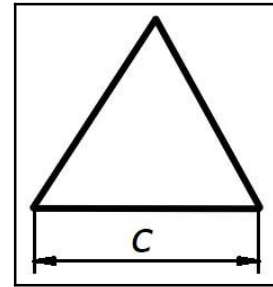


fig 6.14. - Section triangulaire.

La contrainte tangentielle maximale se situe au milieu des côtés.

Application 6.5. Un treuil à main est commandé par deux hommes donnant chacun un effort F de 200 N. Quel est le côté c du carré à faire sur l'arbre pour le placement de la manivelle, celle-ci ayant une longueur L de 400 mm ? Prendre comme contrainte admissible de cisaillement 60 N/mm^2 .

Solution :

Recherche du moment de torsion

$$M_t = (2 F) L = (2 \times 200) \times 400 = 160\,000 \text{ Nmm}$$

Recherche du module de résistance (pour un carré)

Dans notre cas $a = b$ (voir **Tableau 6.1**) :

$$W_t = k_2 a b^2 = 0.2082 c^3$$

Recherche du côté via la formule de la contrainte

$$\tau_{adm} \geq \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{0.2082 c^3} \Rightarrow c \geq \sqrt[3]{\frac{M_t}{0.2082 \tau_{adm}}}$$

$$c \geq \sqrt[3]{\frac{160\,000}{0.2082 \times 60}} = \sqrt[3]{\frac{160\,000}{12.492}} = 23.4 \text{ mm} \Rightarrow c = 25 \text{ mm}$$

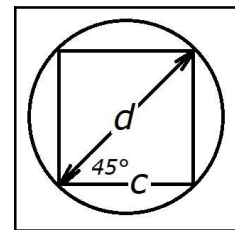


fig 6.15. - Relation côté du carré - diamètre.

Recherche du diamètre admissible de l'arbre

Sachant que la diagonale du carré est le diamètre du cercle circonscrit, nous avons :

$$d = \frac{c}{\cos 45^\circ} = \frac{25}{\cos 45^\circ} = 35.4 \text{ mm} \Rightarrow d = 36 \text{ mm}$$

6.5. Torsion d'un profilé à parois minces

Par définition, une **barre est à parois minces** si son épaisseur e est largement inférieure à ses autres dimensions (de l'ordre de $1/10^{\text{ème}}$).

On distinguera les profilés ouverts (les quatre premiers) et les profilés fermés (sections en caissons) (les trois derniers).

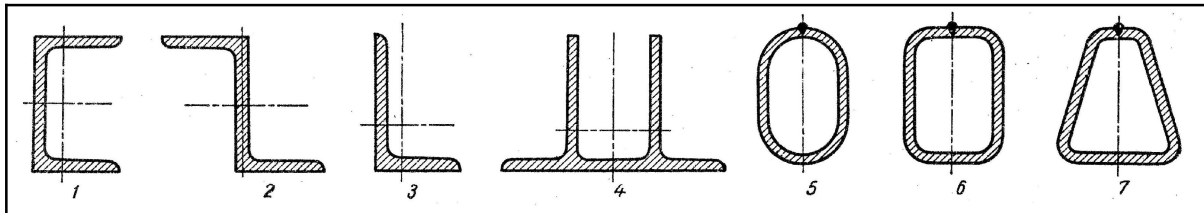


fig 6.16. - Exemples de barres à parois minces.

Nous supposons, comme nous l'avons fait pour les sections non circulaires, que la *torsion est libre*.

6.5.1. Profilés ouverts

Les contraintes sont pratiquement réparties linéairement suivant l'épaisseur du profil.

On peut démontrer que dans le cas de profilés composés (formés d'éléments rectangulaires d'épaisseurs inégales) que les contraintes maximales les plus importantes se développeront au milieu des côtés possédant l'épaisseur la plus grande. Soit :

$$\tau_{\max} = M_t \frac{3 e_{\max}}{k_1 \sum (l_i e_i^3)} \quad (\text{éq. 6.93})$$

| | | | |
|--------------------|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <i>Notations :</i> | M_t | moment de torsion | <i>Nmm</i> |
| | l_i | longueur | <i>mm</i> |
| | e_i | épaisseur correspondante à la longueur l_i | <i>mm</i> |
| | e_{\max} | épaisseur maximum | <i>mm</i> |
| | k_1 | coefficient de forme (pour tenir compte de l'augmentation de la rigidité provoquée par les congés de raccordement) | - |

| | |
|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $k_1 = 1.10 \dots 1.15$ | profilés laminés en : "T", "U" |
| $k_1 = 1.00 \dots 1.15$ | profilés laminés en : "L" |
| $k_1 = 1.30$ | profilés laminés en : "I" et profilés soudés en "I" de grande hauteur |
| $k_1 = 1.20 \dots 1.30$ | profilés laminés en : "H" |
| $k_1 = 1.50$ | profilés soudés |
| $k_1 = 1.00$ | pour les autres profilés laminés. |

De plus, dans la mesure où la section possède un ou plusieurs angle(s) rentrant(s), il y a apparition de concentration de contraintes, et donc la contrainte à l'endroit de ces angles se calcule par :

$$\tau^* = K_t \tau_{\max} \quad (\text{éq. 6.94})$$

| | | | |
|--------------------|---------------|---------------------------------------------|----------|
| <u>Notations</u> : | τ^* | la contrainte au droit de l'angle rentrant. | N/mm^2 |
| | τ_{\max} | la contrainte donnée par (éq. 6.93). | N/mm^2 |
| | K_t | le facteur de concentration de contrainte | - |

Ce facteur K_t est un facteur sans dimension supérieur à 1 et d'autant plus important que le rayon de raccordement r est faible vis-à-vis de l'épaisseur e . K_t pouvant être déterminé par :

$$K_t = 1.74 \sqrt[3]{\frac{e}{r}} \quad (\text{éq. 6.95})$$

Quant à l'angle unitaire de torsion, en rad/mm , il est donné par la formule suivante :

$$\theta = \frac{3 M_t}{k_1 G \sum (l_i e_i^3)} \quad (\text{éq. 6.96})$$

| | | | |
|-------------------|-----|-----------------|----------|
| <u>Notation</u> : | G | module de Young | N/mm^2 |
|-------------------|-----|-----------------|----------|

6.5.2. Profils fermés

Pour les sections fermées à parois minces (voir **fig. 6.17.**), on utilise la *formule de Bredt* ⁽³⁾ afin de calculer l'inertie de torsion libre :

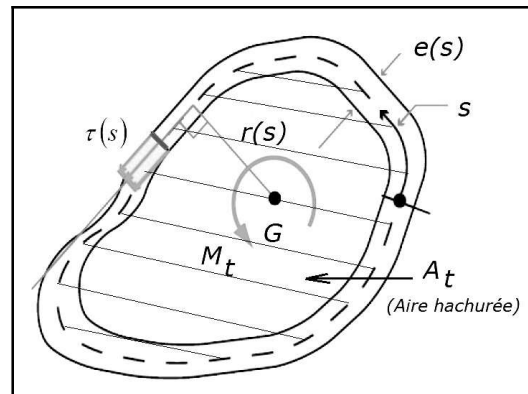


fig 6.17. - Profils fermés minces.

$$I_t = \frac{4 A_t^2}{\oint \frac{ds}{e(s)} \sum \frac{s_i}{e_i}} \quad [mm^4] \quad (\text{éq. 6.97})$$

⁽³⁾ Bredt Rudolf (1842 [Barmen] - 1900 [Wetter]) : ingénieur et industriel allemand.

| | | | |
|--------------------|-------|-------------------------------------------------|--------|
| Notations : | A_i | aire limitée par la ligne moyenne de la section | mm^2 |
| | s_i | longueur de la ligne moyenne i | mm |
| | e_i | épaisseur correspondante | mm |

Quant au module de résistance en torsion libre W_t , il peut se calculer suivant la formule suivante :

$$W_t = 2 A_t e_{\min} \quad (\text{éq. 6.98}) \quad [mm^3]$$

Notation : e_{\min} l'épaisseur minimale du profilé mm

La contrainte de torsion (N/mm^2) ainsi que l'angle unitaire de torsion (rad/mm) se déterminent par les formules classiques (§ 6.4.). Soit :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{M_t}{G I_t}$$

Application 6.6. Quel est le couple que l'on peut appliquer sur un profilé IPN 100 (100 x 50 x 4.5 x 6.8) ainsi que sur un caisson ouvert de 75 mm de côté, d'épaisseur de 3 mm avec une ouverture de 3 mm, en S235, pour que l'angle de torsion unitaire ne dépasse pas 0.25 °/m. On vérifiera alors que la contrainte maximale est inférieure à 100 N/mm². On prendra $G = 80\,000 \text{ N/mm}^2$.

Solution :

a) IPN 100 (profilé ouvert)

Calcul du moment de torsion

$$\theta [rad/mm] = 0.25 [^\circ/m] \frac{\pi}{180} \times 10^{-3} = 0.00436 \cdot 10^{-3}$$

$$\theta = \frac{3 M_t}{k_1 G \sum (l_i e_i^3)} \Rightarrow M_t = \frac{\theta k_1 G \sum (l_i e_i^3)}{3}$$

Calcul de $\sum (l_i e_i^3)$:

$$\sum (l_i e_i^3) = \left(\underbrace{2 \times 50 \times 6.8^3}_{\text{ailes}} + \underbrace{(100 - 2 \times 6.8) \times 4.5^3}_{\text{âme}} \right)$$

$$= 39\,316.4 \text{ mm}^4$$

$$\Rightarrow M_t = \frac{\theta k_1 G \sum (l_i e_i^3)}{3}$$

$$= \frac{0.00436 \cdot 10^{-3} \times 1.15 \times 80\,000 \times 39\,316.4}{3}$$

$$= 5256.9 \text{ Nmm}$$

Vérification de la contrainte maximale

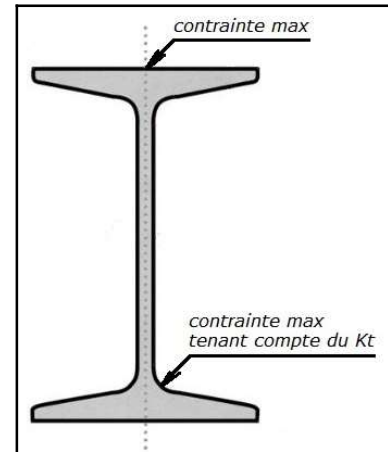


fig 6.18. - Zones de contrainte maximale pour un 'I'.

$$\tau_{\max} = M_t \frac{3 e_{\max}}{k_1 \sum (l_i e_i^3)} = 5256.9 \times \frac{3 \times 6.8}{1.15 \times 39316.4} = 2.37 < 100 \text{ N/mm}^2$$

Vérification de la contrainte au droit des angles rentrant

Calcul de la concentration de contrainte K_t :

Le rayon, pour un IPN 100 vaut 4.5 mm

Concernant l'épaisseur à prendre, mettons-nous du côté de la sécurité et prenons donc l'épaisseur la plus grande soit celle de la semelle égale à 6.8 mm.

$$K_t = 1.74 \sqrt[3]{\frac{e}{r}} = 1.74 \sqrt[3]{\frac{6.8}{4.5}} = 2.0$$

La contrainte à l'angle rentrant vaut dès lors :

$$\tau^* = K_t \tau_{\max} = 2.0 \times 2.37 = 4.74 \text{ N/mm}^2$$

b) Profilé carré

Calcul de $\sum (l_i e_i^3)$ (voir fig. 6.19.) :

$$\sum (l_i e_i^3) = ((75 - 3) * 4 - 3) \times 3^3 = 7695 \text{ mm}^4$$

Remarque :

Les longueurs sont prises à la ligne neutre donc ici "au milieu".

$$M_t = \frac{\theta k_1 G \sum (l_i e_i^3)}{3}$$

$$M_t = \frac{0.00436 \cdot 10^{-3} \times 1.00 \times 80000 \times 7695}{3}$$

$$M_t = 894.7 \text{ Nmm}$$

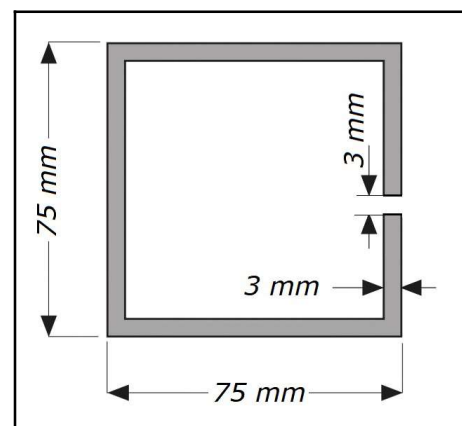


fig 6.19. - Caisson carré avec une ouverture.

Vérification de la contrainte maximale

$$\tau_{\max} = M_t \frac{3 e_{\max}}{k_1 \sum (l_i e_i^3)} = 894.7 \times \frac{3 \times 3}{1.00 \times 7695} = 1.05 < 100 \text{ N/mm}^2$$

Remarque générale

On peut remarquer que c'est la condition sur la déformé qui est largement prépondérante !

Application 6.7. Ci-dessous une coupe d'une des poutres d'un pont roulant, bi-poutre, de 12 tonnes et d'une portée de 13.8 m. En tenant compte de la charge, des divers poids morts, ainsi que de la charge dynamique, on peut estimer la charge sur un galet comme étant égal à 40.25 kN ($P_v = 80.5 \text{ kN}$). La charge dynamique horizontale peut être estimée à $P_h = 0.1 P_v$. Quant au poids de la passerelle F , il est égal à 4.8 kN. Calculer la contrainte et la déformation maximum, en torsion, de cette poutre en caisson.

Solution :

Calcul de l'aire limitée par la ligne moyenne de la section

$$A_t = \left(230 + 2 \times \frac{6}{2} \right) \left(700 + 2 \times \frac{12}{2} \right) = 168032 \text{ mm}^2$$

Calcul de $\sum \frac{s_i}{e_i}$:

$$\begin{aligned} \sum \frac{s_i}{e_i} &= 2 \times \frac{\left(230 + 2 \times \frac{6}{2}\right)}{12} \\ &\quad + 2 \times \frac{\left(700 + 2 \times \frac{12}{2}\right)}{6} \\ &= 276.7 \end{aligned}$$

Calcul du moment d'inertie de torsion libre

$$\begin{aligned} I_t &= \frac{4 A_t^2}{\sum \frac{s_i}{e_i}} \\ &= \frac{4 \times 168032^2}{276.7} \\ &= 408164120 \text{ mm}^4 \\ &= 40816.4 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

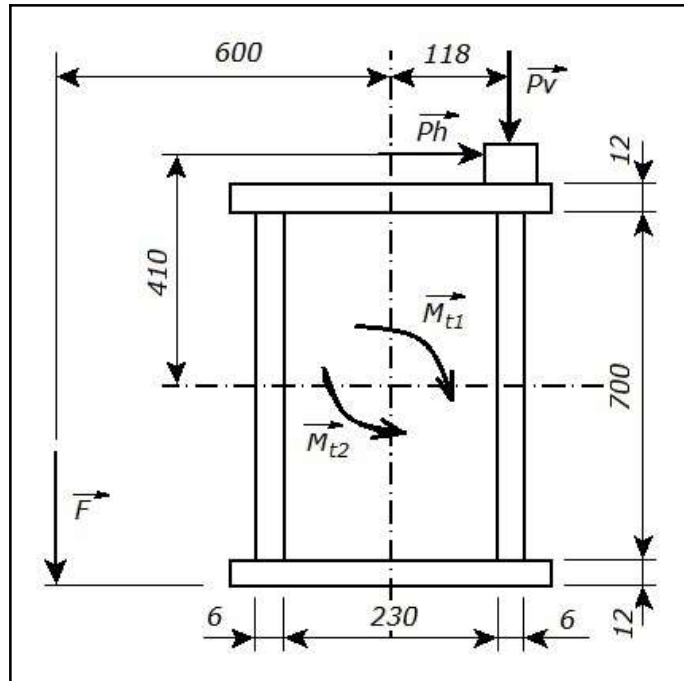


fig 6.20. - Application 6.7.

Calcul du module de torsion libre

$$W_t = 2 A_t e_{min} = 2 \times 168032 \times 6 = 2016384 \text{ mm}^3 = 2016 \text{ cm}^3$$

Recherche du moment de torsion maximum

Moment de torsion dû à la pression des galets

$$\begin{aligned} M_{t1} &= P_v \times 118 + P_h \times 410 = 80500 \times 125 + 0.1 \times 80500 \times 410 \\ &= 12863900 \text{ Nmm} \end{aligned}$$

Moment de torsion dû au poids de la passerelle

$$M_{t2} = F \times 600 = 4800 \times 600 = 2880000 \text{ Nmm}$$

Moment de torsion résultant

cas 1 Pleine charge et sans passerelle :

$$M_{t_{tot}} = M_{t1} = 12863900 \text{ Nmm}$$

cas 2 Pleine charge et avec passerelle :

$$M_{t_{tot}} = M_{t1} - M_{t2} = 12863900 - 2880000 = 9983900 \text{ Nmm}$$

cas 3 Sans charge, chariot à une extrémité et avec passerelle :

$$M_{t_{tot}} = M_{t2} = 2880000 \text{ Nmm}$$

D'où : $M_{t_{max}} = M_{t1} = 12863900 \text{ Nmm}$

Contrainte maximale de torsion

$$\tau_{max} = \frac{M_{t_{max}}}{W_t} = \frac{12863900}{2016384} = 6.38 \text{ N/mm}^2$$

Angle maximum de torsion

$$\varphi = \frac{M_{t \max}}{G I_t} l = \frac{180}{\pi} \times \frac{(12\,863\,900/2)}{80\,000 \times 408\,164\,120} \times \frac{13\,800}{2} = 0.0779^\circ$$

Remarques :

- 1) Le moment de torsion est repris par les 2 extrémités. Pour le calcul de l'angle de torsion il faut donc prendre la moitié du moment de torsion maximum.
- 2) Dans le même état d'esprit, la longueur est donc la moitié de la portée.

6.6. Choix de la forme de la section droite

Afin de dimensionner économiquement la barre, la condition de résistance :

$$\frac{M_t}{W_t} \quad \text{ou} \quad \frac{M_t}{W_t} = \tau_{\max} \leq \tau_{adm} \quad (\text{éq. 6.126})$$

doit non seulement être vérifiée, mais il faut veiller à réduire au minimum le poids de la barre.

Soit, par définition, le rapport sans dimension w_t :

$$w_t = \frac{W_t}{\sqrt{A^3}} \quad \text{ou} \quad \frac{W_p}{\sqrt{A^3}} \quad (\text{éq. 6.127})$$

Notation : A la surface de la section pleine m^2

Ce rapport est défini pour comparer différentes sections droites. Il doit être aussi grand que possible (voir **Tableau 6.2**). Il en ressort que les profilés ouverts résistent très mal à la torsion, que les profilés fermés sont meilleurs que les profilés ouverts de même forme, et que **la forme la plus intéressante est celle des sections annulaires**.

★ **Tableau de comparaison résistance / poids de différentes sections** (*Annexe 1 : Tableau 6.2. - Comparaison résistance / poids de différentes sections.*)

Il est donc souvent préférable, du point de vue de la résistance des matériaux, pour les “gros arbres” de transmissions de prendre un arbre creux plutôt qu’un arbre plein.

Sans entrer dans le détail de la démonstration, on peut montrer que le gain de poids de l’arbre creux par rapport à un arbre plein, (**pour une même contrainte nominale**), suit la loi suivante :

$$k_{g\tau} = 1 - \sqrt[3]{\frac{1 - k_d^2}{1 + k_d^2}} \quad (\text{éq. 6.128})$$

De même on peut montrer que le gain de poids de l’arbre creux par rapport à un arbre plein, (**pour une même déformation**), suit la loi suivante :

$$k_{g\theta} = 1 - \sqrt{\frac{1 - k_d^2}{1 + k_d^2}} \quad (\text{éq. 6.129})$$

| | | |
|--------------------|---------------|----------------------------------------------------------|
| <u>Notations</u> : | $k_{g\tau}$ | coefficient de gain de poids (pour une même contrainte) |
| | $k_{g\theta}$ | coefficient de gain de poids (pour une même déformation) |
| | k_d | rapport (diamètre intérieur sur diamètre extérieur) |

Tout ceci peut être résumé dans le tableau ci-après :

★ **Tableau des gains de poids** (*Annexe 1 : Tableau 6.3. - Gain de poids pour une même contrainte $k_{g\tau}$ ou une même déformation $k_{g\theta}$ (arbre creux par rapport à l'arbre plein).*)

Notons qu'à partir de : $k_d = 0.8$, le gain de poids est de 40 % à même contrainte et de 50 % à même angle de déformation. En avant-projet, on peut se permettre de prendre : $k_d = 0.8$.

Remarque importante :

Nous avons toujours intérêt à avoir $k_d \leq 0.9$ afin d'éviter tout risque de flambement de torsion. En effet si la paroi est trop mince, l'arbre (tube) périra par flambement et non par dépassement de la limite de rupture (exemple de la boîte de Coca).

Application 6.8. Soit un arbre d'hélice de bateau de 15 m de longueur. La puissance à transmettre est de 4.5 MW à 350 tr/min. La contrainte admissible de l'acier en torsion est de 80 N/mm².

- Déterminer le diamètre de l'arbre, à la contrainte, ainsi que l'angle de torsion correspondant ($G = 80\,000 \text{ N/mm}^2$).
- Ensuite remplacer cet arbre par un arbre de transmission creux pour obtenir le même angle de torsion que précédemment et ce pour un gain de poids de 50 %.

Solution :

Recherche du moment de torsion

$$M_t = \frac{30}{\pi} \frac{P}{n} = \frac{30}{\pi} \times \frac{4.5 \cdot 10^6}{350} = 1.23 \cdot 10^5 \text{ Nm}$$

Recherche du diamètre

Formule pour les arbres pleins à la contrainte :

$$d \geq 1.72 \sqrt[3]{\frac{M_t}{\tau_{adm}}} = 1.72 \sqrt[3]{\frac{1.23 \cdot 10^8}{80}} \approx 200 \text{ mm}$$

Recherche de la déformation angulaire de cet arbre

$$\theta_{\max} = 10.2 \frac{M_t}{d^4 G} = 10.2 \frac{1.23 \cdot 10^8}{200^4 \times 80\,000} = 0.00001 \text{ rad/mm}$$

Pour rappel :

$$\theta^{[\circ]} = \theta^{[rad]} \frac{180}{\pi} = 0.00001 \times \frac{180}{\pi} = 5.7 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ/\text{mm} = 0.57 \text{ }^\circ/\text{m}$$

Recherche du diamètre intérieur pour un gain de poids de 50 %

Dans le tableau résumé, on remarque que pour un gain de poids de $k_{g\theta} = 50\%$, il faut : $k_d = 0.8$.

$$d \geq 1.79 \sqrt[4]{\frac{M_t}{(1 - k_d^4) G \theta_{adm}}} = 1.79 \sqrt[4]{\frac{1.23 \cdot 10^8}{(1 - 0.8^4) \times 80\,000 \times 0.00001}}$$

$$= 227 \text{ mm} \Rightarrow d = 230 \text{ mm}$$

$$d_i = k_d d = 0.8 \times 230 = 184 \text{ mm} \Rightarrow d_i = 180 \text{ mm}$$

Remarque :

Avec les diamètres de 230 mm extérieur et 180 mm intérieur, nous avons un gain de 51 %.

Application 6.9. Un arbre creux de diamètre extérieur de 50 mm et de diamètre intérieur de 40 mm, a une longueur de 1.50 m.

- Calculer le module de torsion de la section droite.
- Sachant que la contrainte tangentielle est de 30 N/mm², calculer le couple moteur transmis par cet arbre.
- Déduire du résultat précédent la puissance transmise sachant que la vitesse de rotation est de 1200 tr/min.
- De quel angle tournent les sections extrêmes, l'une par rapport à l'autre ? (Prendre $G = 80\,000 \text{ N/mm}^2$).

Solution :

a) *Module de torsion*

$$I_0 = \frac{\pi (d^4 - d_i^4)}{32} = \frac{\pi (50^4 - 40^4)}{32} = 362\,265 \text{ mm}^4$$

b) *Couple ou Moment de torsion*

$$M_t = 0.2 d^3 (1 - k_d^4) \tau_{adm}$$

$$= 0.2 \times 50^3 \times \left(1 - \left(\frac{40}{50}\right)^4\right) \times 30 = 442\,800 \text{ Nmm} \approx 443 \text{ Nm}$$

c) *Puissance transmise*

$$P = M_t \omega = M_t \frac{\pi n}{30} = 443 \times \frac{\pi \times 1200}{30} = 55\,669 \approx 55.7 \text{ kW}$$

d) *Angle de torsion*

$$\theta = 10.2 \frac{M_t}{d^4 (1 - k_d^4) G}$$

$$= 10.2 \times \frac{442\,800}{50^4 \times \left(1 - \left(\frac{40}{50}\right)^4\right) \times 80\,000} = 0.0000153 \text{ rad/mm}$$

$$\theta_{adm} [^\circ/m] = \theta_{adm} [\text{rad/mm}] \frac{180}{\pi} \times 1000 = 0.0000153 \times \frac{180}{\pi} \times 1000 = 0.877 \text{ }^\circ/m$$

Déviations sur la longueur de l'arbre :

$$\theta_{Tot} = 0.877 \times 1.5 = 1.31 \approx 1.3 \text{ }^\circ$$

Application 6.10. Un arbre creux de diamètre extérieur de 120 mm et de diamètre intérieur de 100 mm, a une longueur de 3 m. Il tourne à la vitesse de 180 tr/min. Un système de mesure stroboscopique indique un angle de torsion de 3° entre les deux extrémités de l'arbre. Déterminer la puissance transmise et la contrainte de torsion maximale, prendre $G = 77 \text{ GPa}$.

Solution :

a) *Angle relatif de torsion*

$$\theta_{adm} [\text{°}/\text{m}] = \frac{\theta_{adm} [\text{°}]}{l} \frac{\pi}{180} = \frac{3}{3} \times \frac{\pi}{180} = 0.0175 \text{ rad}/\text{m}$$

b) *Couple ou moment de torsion*

$$\begin{aligned} M_t &= 0.1 d^4 (1 - k_d^4) G \theta \\ &= 0.1 \times 120^4 \times \left(1 - \left(\frac{100}{120}\right)^4\right) \times 77\,000 \times 0.0175 \times 10^{-3} \\ &= 1.447 \times 10^7 \text{ Nmm} = 1.447 \times 10^4 \text{ Nm} \end{aligned}$$

c) *Puissance transmise*

$$P = M_t \omega = M_t \frac{\pi n}{30} = 1.447 \times 10^4 \times \frac{\pi \times 180}{30} = 273\,000 \text{ W}$$

d) *Contrainte maximale*

$$\tau_{\max} = 5.1 \frac{M_t}{d^3 (1 - k_d^4)} = \frac{1.447 \times 10^7}{120^3 \times \left(1 - \left(\frac{100}{120}\right)^4\right)} = 82.5 \text{ N}/\text{mm}^2$$

Application 6.11. Estimer la contrainte maximale et l'angle total de torsion de l'ensemble des tubes d'un forage pétrolier, lorsque la profondeur atteinte par le trépan est de 2000 m et que le couple de torsion correspondant est de 40 kNm. Le train de tubes vissés les uns aux autres est assimilable à un tube unique de diamètre extérieur 115 mm et de diamètre intérieur de 92 mm.

Solution :

a) *Contrainte maximale*

$$\tau_{\max} = 5.1 \frac{M_t}{d^3 (1 - k_d^4)} = \frac{40\,000 \times 10^3}{115^3 \times \left(1 - \left(\frac{92}{115}\right)^4\right)} = 226.7 \text{ N}/\text{mm}^2$$

b) *Angle de torsion*

$$\varphi = 10.2 \frac{M_t l}{d^4 (1 - k_d^4) G} = 10.2 \times \frac{40\,000 \times 10^3 \times 2\,000\,000}{115^4 \times \left(1 - \left(\frac{92}{115}\right)^4\right) \times 80\,000} = 98.64 \text{ rad}$$

Soit l'équivalent de 15.7 tours !

6.7. Applications

6.7.1. Torsion d'un arbre muni d'une rainure de clavette

Déterminons le diamètre d d'un arbre de transmission pourvu d'une clavette longitudinale.

Nous partirons de l'équation fondamentale de la torsion pour déterminer le diamètre d de l'arbre.

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \leq \tau_{adm}$$

Il s'agit, maintenant de déterminer le module de résistance en torsion libre W_t . Nous pourrions prendre W_t de la formule **éq. 6.83.** correspondant à un disque muni d'une rainure de clavette, mais nous remarquons que nous avons trois inconnues : le diamètre d , la largeur a de la rainure de clavette ainsi que sa profondeur t .

En fait, les dimensions des clavettes longitudinales (donc les rainures) sont normalisées en fonction du diamètre de l'arbre [voir **Annexe 1 : Tableau 5.1. - Dimensions des clavettes normalisées**]. Et lors d'un *pré-dimensionnement* on peut admettre que la largeur de la rainure a est, environ, le quart du diamètre d , c'est-à-dire : $a/t \approx 0.25$. De plus, la profondeur de la rainure est, environ, la moitié de la largeur, c'est-à-dire $a/2 \approx t$.

De plus, nous pouvons, dès à présent tenir compte de l'effet d'entaille (concentration de contrainte), et nous supposons que la section utile soumise à torsion est une ellipse (voir figure ci-contre). Le module de résistance en torsion libre d'une ellipse est donné par la formule **éq. 6.79.**, soit :

$$W_{t(ellipse)} = \frac{\pi d d_p^2}{16} \quad (\text{éq. 6.156})$$

Notations :

| | | |
|-------|-----------------------------------------------------------------|------|
| d | le grand axe de l'ellipse (c'est-à-dire le diamètre le l'arbre) | mm |
| d_p | le petit axe de l'ellipse | mm |

et, dans notre cas :

$$d_p = d - 2t \approx d - a \approx d - 0.25d = 0.75d$$

d'où :

$$W_{t(ellipse)} = \frac{\pi \times 0.75^2}{16} \times d^3$$

et :

$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi \times 0.75^2} \frac{M_t}{d^3} \leq \tau_{adm}$$

et donc :

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \times 0.75^2} \frac{M_t}{\tau_{adm}}} \approx 2.08 \sqrt[3]{\frac{M_t}{\tau_{adm}}} \quad (\text{éq. 6.160})$$

Dès lors, connaissant le diamètre d de l'arbre de transmission on recherchera les dimensions exactes de la rainure de clavette (largeur a et profondeur t) pour vérifier, à l'aide cette fois-ci du module de résistance correspondant à un disque doté d'une rainure de clavette, si on ne dépasse pas la valeur de la contrainte de torsion admissible.

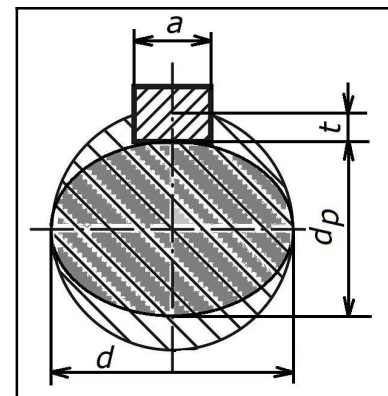


fig 6.21. - Section utile.

Application 6.12. Un moteur électrique d'une puissance de 10 kW tourne à la vitesse de 750 tr/min . Son arbre est en acier XC 32 de limite élastique égale à 320 N/mm^2 . Déterminer son diamètre si on prend un coefficient de sécurité égal à 2.3 et sachant que celui-ci est muni d'une rainure de clavette.

Solution :

Recherche de la contrainte admissible

$$\tau_{adm} = 0.58 \frac{R_e}{S} = 0.58 \times \frac{320}{2.3} = 80 \text{ N/mm}^2$$

Recherche du moment de torsion

$$M_t = \frac{30}{\pi} \frac{P}{n} = \frac{30}{\pi} \times \frac{10000}{750} = 127.3 \text{ Nm} = 127.3 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$$

Recherche du diamètre

$$d \geq 2.08 \sqrt[3]{\frac{M_t}{\tau_{adm}}} = 2.08 \sqrt[3]{\frac{127.3 \cdot 10^3}{80}} = 24.3 \Rightarrow d = 25 \text{ mm}$$

Dimension de la rainure de clavette normalisée :

$$a = 8 \text{ mm} \quad \text{et} \quad t = 4 \text{ mm}$$

Vérification :

Recherche du module de résistance

$$\begin{aligned} W_t &= \frac{\pi d^3}{16} - \frac{a t (d - t)^2}{2 d} \\ &= \frac{\pi \times 25^3}{16} - \frac{8 \times 4 \times (25 - 4)^2}{2 \times 25} = 2786 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Recherche de la contrainte maximale réelle

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{127.3 \cdot 10^3}{2786} = 45.7 \leq 80 \text{ N/mm}^2 \quad \text{OK}$$

La différence est relativement grande pour tenir compte des concentrations de contrainte.

6.8. Résumé : calcul des arbres

Dans le tableau ci-dessous, nous avons mis un résumé des différentes formules quant au calcul des arbres à la torsion, mais aussi en flexion-torsion. Ces dernières formules ont été développées au *Chapitre 9 Sollicitations composées*.

| Calcul des arbres | | |
|-----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| | Contraintes | Déformations |
| Arbres pleins en torsion | $d \geq 1.72 \sqrt[3]{\frac{M_t}{\tau_{adm}}}$ <p>(<i>éq. 6.38.</i>)</p> | $d \geq 1.79 \sqrt[4]{\frac{M_t}{G \theta_{adm}}}$ <p>(<i>éq. 6.50.</i>)</p> |
| Arbres creux en torsion | $d \geq 1.72 \sqrt[3]{\frac{M_t}{(1 - k_d^4) \tau_{adm}}}$ <p>(<i>éq. 6.34.</i>)</p> | $d \geq 1.79 \sqrt[4]{\frac{M_t}{(1 - k_d^4) G \theta_{adm}}}$ <p>(<i>éq. 6.46.</i>)</p> |
| Arbre plein + rainure de clavette en torsion | $d \geq 2.08 \sqrt[3]{\frac{M_t}{\tau_{adm}}}$ <p>(<i>éq. 6.160.</i>)</p> | |
| Arbre plein en torsion + flexion | $d \geq 2.17 \sqrt[3]{\frac{M_r}{\sigma_{adm}}}$ <p>avec</p> $M_r = \sqrt{M_f^2 + 0.75 M_t^2}$ | |
| Arbre creux en torsion + flexion | $d \geq 2.17 \sqrt[3]{\frac{M_r}{(1 - k_d^4) \sigma_{adm}}}$ | |

Tableau 6.4. - Formules pour la détermination des diamètres des arbres pleins et creux.