

<u>Problèmes sur le chapitre 6</u> .....	- ex6.1 -
Exercices concernant principalement la “ <i>théorie générale</i> ” .....	- ex6.1 -
Exercices concernant les “ <i>sections non circulaires</i> ” .....	- ex6.5 -
Exercices de “ <i>synthèses</i> ” .....	- ex6.6 -

## Problèmes sur le chapitre 6

### Exercices concernant principalement la “théorie générale”

**60.01.** Déterminer le diamètre  $d$  de l'arbre d'une machine de  $149.2 \text{ kW}$  tournant à la vitesse de  $120 \text{ t/min}$ . On suppose que la contrainte d'utilisation en torsion  $\tau_{adm} = 20 \text{ N/mm}^2$ .

Réponse :  $d = 144.6 \text{ mm}$

**60.02.** Un arbre de diamètre  $d = 90 \text{ cm}$  tourne à la vitesse de  $45 \text{ t/min}$ . Déterminer la puissance transmise sachant que la contrainte tangentielle maximum est de  $30 \text{ N/mm}^2$ .

Réponse :  $P = 20.2 \text{ MW}$

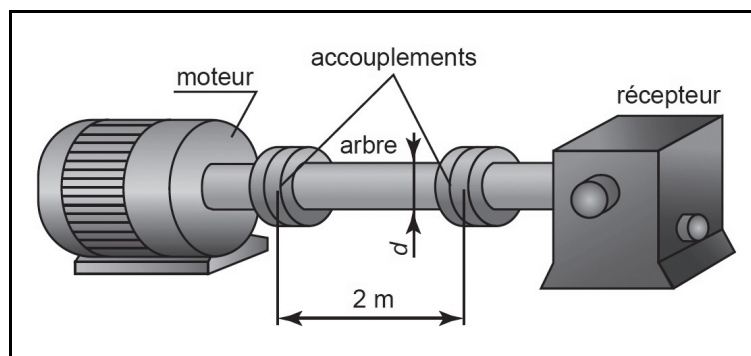
**60.03.** Un essai de torsion est effectué sur des échantillons d'os de fémur. Les échantillons (ou éprouvettes) testés ont un diamètre de  $1.9 \text{ mm}$ . Les essais fournissent un couple de torsion moyen de rupture de  $10 \text{ Ncm}$ . Déterminer la contrainte tangentielle à la rupture de l'os.

Réponse :  $\tau_{os} = 74.3 \text{ N/mm}^2$

**60.04.** Une barre en fer rond de  $2 \text{ m}$  de longueur reçoit un effort de  $5000 \text{ N}$  à l'extrémité d'un levier de  $1200 \text{ mm}$ . Quel diamètre faut-il lui donner, si on accepte une contrainte de  $50 \text{ N/mm}^2$  ? Quel est l'angle de torsion correspondant ?

Réponses :  $d = 85 \text{ mm}$ ;  $\varphi = 1.66^\circ$

**60.05.** Un arbre plein, de diamètre  $d$  inconnu et de  $2 \text{ m}$  de longueur, relie un moteur à un récepteur par l'intermédiaire de deux accouplements. La figure ci-dessous représente ce système. La puissance transmise est de  $20 \text{ kW}$  à  $1500 \text{ tr/min}$ . On impose un angle de torsion de  $0.2^\circ$  entre les deux extrémités de l'arbre et le module de glissement  $G = 80 \text{ kN/mm}^2$ .



Réponse :  $d \geq 55.2 \text{ mm}$

**60.06.** Un arbre cylindrique creux, en acier, de diamètre extérieur  $d = 25 \text{ cm}$  et intérieur  $d_i = 15 \text{ cm}$ , tourne à  $1000 \text{ t/min}$ . Quelle est la puissance développée, en watts, sachant que :  $\tau_{adm} = 60 \text{ N/mm}^2$ .

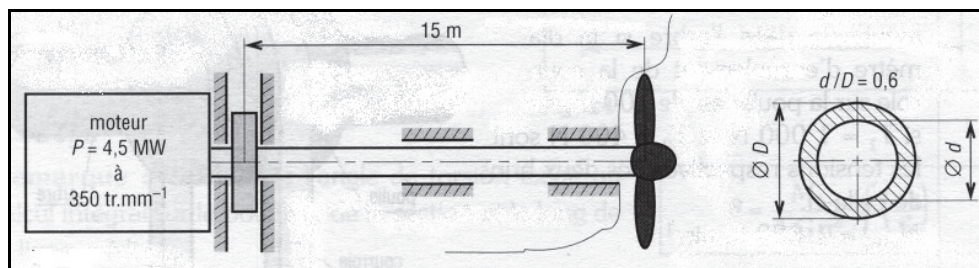
Réponse :  $P = 16.78 \text{ MW}$

**60.07.** Pour l'extraction du pétrole, on utilise des tubes de forage en 42CrMo4 de diamètre extérieur de 100 mm et de diamètre intérieur de 70 mm. Les tubes sont montés en série sur une hauteur de 800 m. La contrainte admissible de cisaillement en torsion est de 250 N/mm<sup>2</sup>. Déterminer le couple de torsion admissible pour chaque tube. Calculer l'angle de torsion entre les deux extrémités de l'ensemble si celles-ci sont distantes de 800 m. On se placera dans le cas du couple maximum.

Réponses :  $C_{\max} = 37.3 \text{ kNm}$  ;  $\varphi = 2870^\circ$  ( $\approx 8 \text{ tours}!$ )

**60.08.** Soit un arbre d'hélice de bateau de 15 m de long. L'arbre est creux, le rapport entre le diamètre intérieur et le diamètre extérieur est égal à 0.6. L'arbre transmet une puissance de 4.5 MW à la vitesse de 350 tr/min. La contrainte admissible de torsion de l'acier est de 80 N/mm<sup>2</sup>.

- Déterminer les diamètres intérieur et extérieur de cet arbre.
- Calculer l'angle de torsion à pleine puissance entre les deux extrémités distantes de 15 m. Prendre  $G = 80\,000 \text{ N/mm}^2$ .



Réponses : a)  $d = 208 \text{ mm}$  ;  $d_i = 124 \text{ mm}$  b)  $\varphi = 8.25^\circ$

**60.09.** Le moment de torsion maximum transmis par un arbre est de 500 Nm pour un taux de travail de 20 N/mm<sup>2</sup>. Calculer successivement :

- le diamètre de l'arbre plein;
- les diamètres de l'arbre creux ayant une même résistance mais dont le poids serait réduit de moitié.

Réponses : a)  $d = 50 \text{ mm}$  b)  $d = 61 \text{ mm}$  et  $d_i = 49 \text{ mm}$

**60.10.** Soit une éprouvette cylindrique en cuivre de 25 mm de diamètre soumise à un couple de 210 Nm lors d'un essai de torsion. L'angle de torsion mesuré est de 4.9° pour une longueur de 1 m.

- Calculer le module d'élasticité transversal  $G$  du cuivre testé.
- On suppose que l'éprouvette mesure 1.8 m. Déterminer l'angle de torsion qui serait engendré par un couple qui produirait une contrainte de cisaillement de 14 daN/mm<sup>2</sup>.

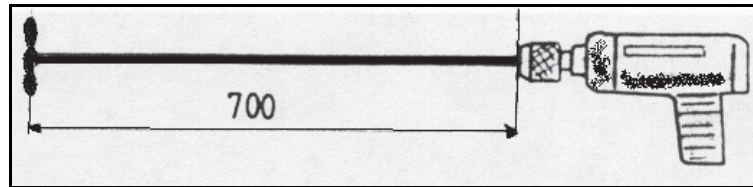
Réponses : a)  $G = 64\,030 \text{ N/mm}^2$  b)  $\varphi = 18^\circ$

**60.11.** Calculer l'épaisseur qu'il faudrait donner à un arbre tubulaire en acier dont le diamètre extérieur  $d = 80 \text{ mm}$ . La puissance à transmettre  $P = 30 \text{ kW}$  à 300 t/min. La contrainte admissible sera prise égale à 35 N/mm<sup>2</sup>. Dans ces conditions, quel serait l'angle relatif de torsion (en %/m) ?

Réponses :  $d_i = 73.9 \text{ mm}$  ( $k_d > 0.9!!!$ )  $\Rightarrow k_d = 0.9 \Rightarrow d_i = 72 \text{ mm}$   
 $\theta = 0.498^\circ/\text{m}$

**60.12.** Une tige d'agitateur pour peinture est montée en bout de mandrin sur une perceuse de bricolage. La longueur de la tige est de  $700 \text{ mm}$ . La puissance transmise est de  $500 \text{ watts}$  à  $1500 \text{ tr/min}$ . La contrainte de cisaillement admissible du matériau de la tige est de  $5 \text{ daN/mm}^2$

- Déterminer le diamètre minimal de la tige.
- Calculer l'angle de torsion entre les deux extrémités de la tige ( $G = 80\,000 \text{ N/mm}^2$ ).
- Calculer le diamètre de la tige dans le cas où l'angle unitaire de torsion ne doit pas dépasser la valeur de  $0.1$  degré par mètre.



Réponses : a)  $d = 6.9 \text{ mm}$  b)  $\varphi = 7.17^\circ$  c)  $d = 21.9 \text{ mm}$

**60.13.** Lors d'un essai de torsion, on considère une éprouvette cylindrique en alliage de cuivre de diamètre  $d = 25 \text{ mm}$  et de longueur  $l = 1 \text{ m}$ , soumise à un couple de  $210 \text{ Nm}$ . L'angle de torsion mesuré est  $\varphi = 4.9^\circ$ . On demande de :

- calculer le module d'élasticité transversal  $G$  de l'alliage testé;
- déterminer l'angle de torsion d'un même arbre (même matériau et même diamètre) de longueur  $l = 1.8 \text{ m}$ , si elle supporte une contrainte de cisaillement maximale  $\tau_{\text{max}} = 140 \text{ N/mm}^2$ .

Réponses : a)  $G = 64\,030 \text{ N/mm}^2$  b)  $\varphi = 0.315 \text{ rad}$

**60.14.** On considère un arbre dont la forme est cylindrique entre les sections A et B. Un calcul préliminaire a permis de déterminer le moment de torsion entre les sections A et B, à savoir :  $M_t = 50 \text{ Nm}$ . Cet arbre est en acier pour lequel  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$  et  $\tau_e = 180 \text{ MPa}$ . On adopte un coefficient de sécurité de 3. Si de plus, on s'impose une valeur limite pour l'angle unitaire de torsion  $\theta_{\text{adm}} = 0.25^\circ/\text{m}$ . On demande de déterminer le diamètre de cet arbre dans les deux cas.

Réponses :  $d_\tau = 16.2 \text{ mm}$   $d_\theta = 34.8 \text{ mm}$

**60.15.** L'axe transmettant le mouvement d'un régulateur à l'appareil de régulation d'une turbine a une longueur  $l$  égale à  $6 \text{ m}$  et doit effectuer un mouvement angulaire de  $60^\circ$  en transmettant un couple de torsion de  $1500 \text{ Nm}$ . La rotation relative des sections initiale et finale ne peut dépasser  $1\%$  de  $60^\circ$ , afin que l'appareil de régulation fonctionne normalement. Quel doivent être :

- le diamètre de l'axe plein, sachant que  $G = 80\,000 \text{ N/mm}^2$  ;
- le diamètre extérieur de l'arbre creux équivalent de  $8 \text{ mm}$  d'épaisseur;
- les contraintes maximales dans les deux cas.

Réponses : a)  $d = 102.3 \text{ mm}$  b)  $d = 126 \text{ mm}$  c)  $\tau_{\text{max}} = 6.9 \text{ N/mm}^2$  et  $9 \text{ N/mm}^2$

**60.16.** On considère un arbre de forme cylindrique. Son diamètre est  $d = 30 \text{ mm}$  entre les sections A et B. Un calcul préliminaire a permis de déterminer le moment de torsion entre ces sections, à savoir :  $M_t = 50 \text{ Nm}$ . Cet arbre est en acier pour lequel  $G = 80\,000 \text{ MPa}$ .

- Calculer l'angle unitaire de torsion en  $^\circ/\text{m}$ .

- b) Calculer la contrainte tangentielle maximale.
- c) Pour alléger l'arbre, on remplace cet arbre plein par un arbre creux de diamètre intérieur  $d_i = 30 \text{ mm}$  et de diamètre extérieur  $d$ . En conservant la même contrainte tangentielle, calculer la nouvelle valeur du diamètre extérieur  $d$ .
- d) Calculer le gain de masse qu'apporte cette modification.
- e) Calculer l'angle unitaire de torsion de l'arbre creux en  $^\circ/m$ .

Réponses :      a)  $\theta = 0.45 \text{ }^\circ/m$               b)  $\tau_{\max} = 9.43 \text{ N/mm}^2$               c)  $d = 36.6 \text{ mm}$   
                             d) 42 %                                      e)  $\theta = 0.37 \text{ }^\circ/m$

**60.17.** Soit deux arbres, en acier, de transmission de même longueur transmettant la même puissance  $P = 2\,094 \text{ kW}$  à la même vitesse de rotation  $n = 2\,000 \text{ tr/min}$ . Le premier est plein, diamètre extérieur  $d$ , le second est creux, diamètre extérieur  $d_e$  et diamètre intérieur  $d_i$ ,  $d_e/d_i = 0.85$ . La contrainte de torsion admissible est la même pour les deux arbres, soit  $150 \text{ N/mm}^2$ .

- a) Calculer le couple de torsion maximum transmissible par les deux arbres.
- b) Déterminer le rapport de poids des deux arbres.
- c) On impose un angle de torsion maximum de  $0.25 \text{ }^\circ/m$  pour les deux arbres. Déterminer le rapport des poids dans ce cas.

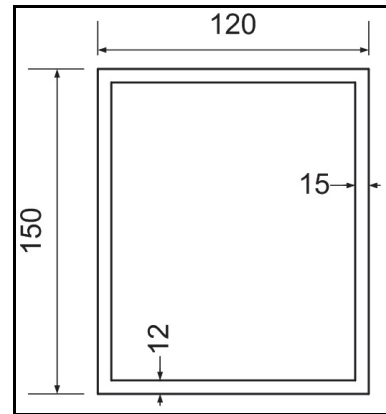
Prendre  $G = 80\,000 \text{ MPa}$ .

Réponses :      a)              b)              c)

**Exercices concernant les “sections non circulaires”**

**64.01.** Estimer le moment de torsion que peut transmettre la section en caisson représentée (dimensions en millimètres), si la contrainte admissible est de  $\tau_{adm} = 80 \text{ N/mm}^2$ . Quelle est la valeur correspondante de la déformation angulaire  $\theta$  pour  $G = 80 \text{ kN/mm}^2$  ?

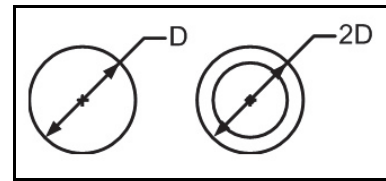
Réponses :       $M_t = 28 \text{ kNm}$   
                          $\theta = 15 \cdot 10^{-3} \text{ rad/m} = 0.871^\circ/\text{m}$



## Exercices de “synthèses”

**6S.01.** Deux arbres de transmission de même longueur (2 m) transmettent la même puissance de 100 CV à la même vitesse de 1500 tr/min. Le premier est plein, le second est creux,  $\tau_{adm}$  des deux arbres : 200 N/mm<sup>2</sup>.

(  $G = 79\,000 \text{ N/mm}^2$  et  $\rho = 7.8 \text{ kg/dm}^3$  )



- Calculez, sans tenir compte de la déformation, le diamètre intérieur de l'arbre creux, sachant que le diamètre extérieur est égal à  $2d$ . Comparez les poids des deux arbres.
- Calculez ces arbres en tenant compte d'une déformation de  $1/4 \text{ ‰}$ . Comparez les poids des deux arbres.

Réponses :

Arbre plein :

$$d = 23 \text{ mm} \quad m = 6.48 \text{ kg}$$

Arbre creux :  $d = 46 \text{ mm} \quad d_i = 44.5 \text{ mm} \quad m = 1.66 \text{ kg}$

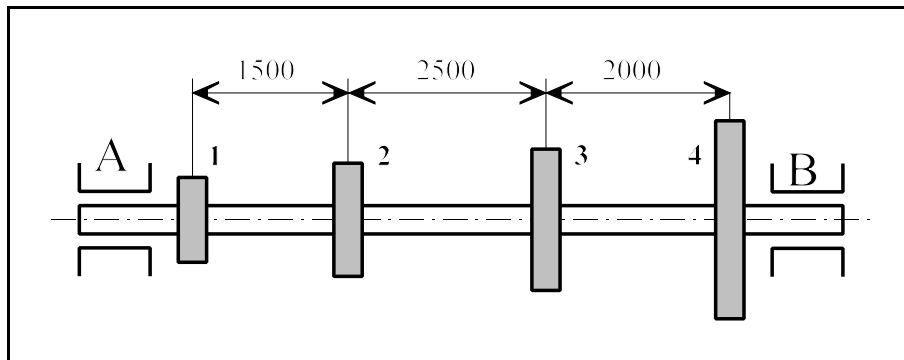
(Risque de flambement possible ( $k_d > 0.9!$ ))

Arbre plein :  $d = 31 \text{ mm} \quad m = 11.8 \text{ kg}$

Arbre creux :  $d = 62 \text{ mm} \quad d_i = 61 \text{ mm} \quad m = 1.51 \text{ kg}$

**6S.02.** Soit un arbre de transmission creux (diamètre extérieur : 100 mm, diamètre intérieur : 60 mm) avec quatre roues dentées 1, 2, 3 et 4. Les roues 1 et 3 sont motrices avec  $M_1 = 17 \text{ kNm}$  et  $M_3 = 32 \text{ kNm}$ . Les roues 2 et 4 sont réceptrices avec  $M_4 = 10 \text{ kNm}$ .

- Déterminer le couple récepteur  $M_2$  sur la roue 2 assurant l'équilibre de l'arbre.
  - Calculer la contrainte de torsion maximum sur l'arbre. Indiquer le tronçon le plus chargé.
  - Déterminer l'angle de torsion total entre les deux extrémités A et B.
- Prendre  $G = 80\,000 \text{ N/mm}^2$ .

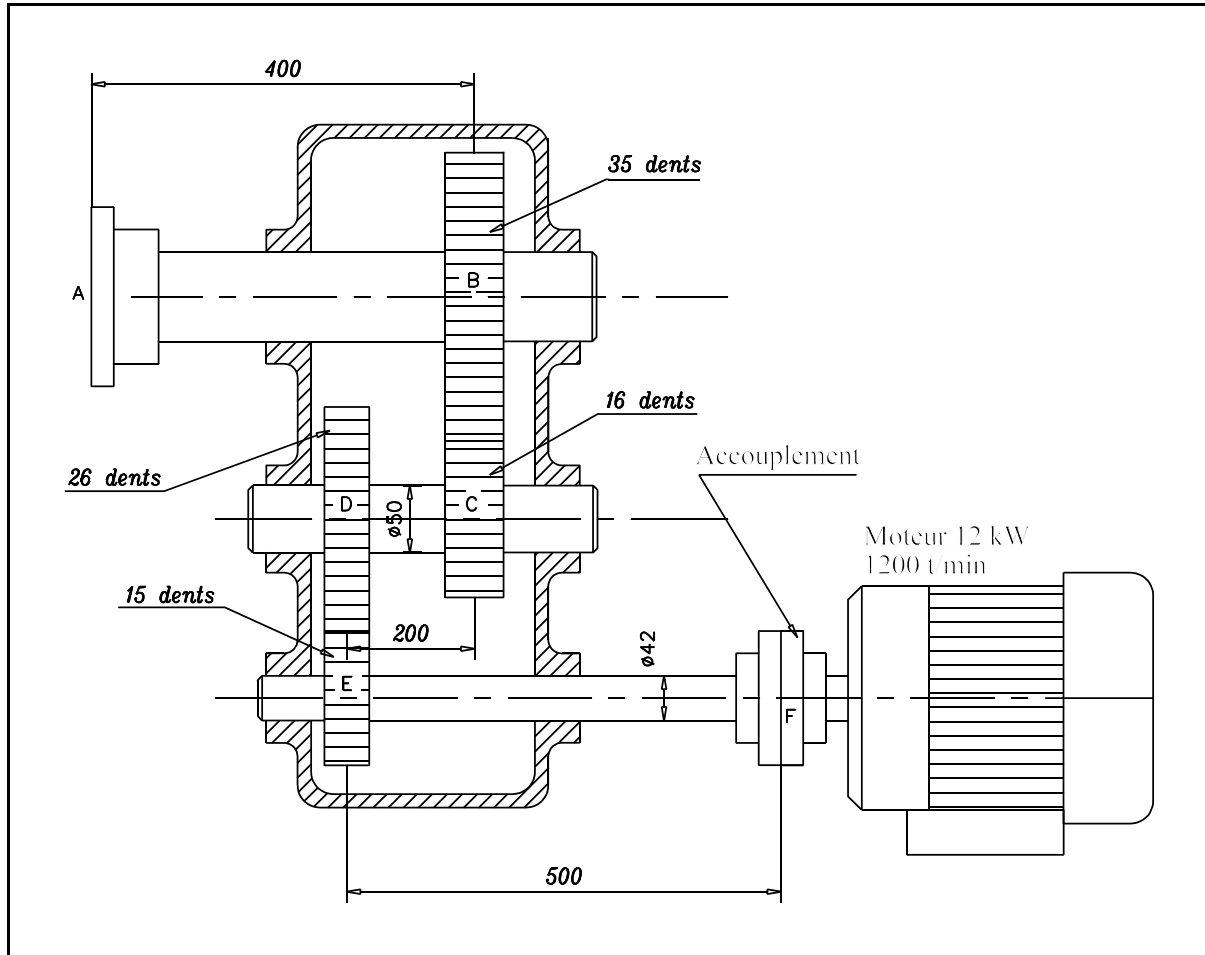


Réponses :

a)  $M_2 = -39 \text{ kNm} \quad \text{b) } \tau_{2-3} = 129 \text{ N/mm}^2$

c)  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 = -0.0139 \text{ rad} = -0.79^\circ$

**6S.03.** Un moteur électrique de 12 kW transmet sa puissance à un réducteur de vitesse schématisé ci-dessus. Déterminer le diamètre de l'arbre supérieur sachant que la déformation angulaire relative totale en charge des trois arbres ne peut dépasser  $0.25 \text{ }^\circ/m$ , en ne tenant pas compte du jeu d'engrènement des dentures. Les arbres sont supposés ne travailler qu'en torsion et ne comporter aucun changement de section. La tension au cisaillement maximale admissible est de  $100 \text{ N/mm}^2$ .



Réponse :  $d_3 = 54.45 \text{ mm} \Rightarrow 55 \text{ mm}$

**6S.04.** Un professeur qui dirigeait le travail d'élaboration d'un projet, après avoir examiné le travail d'un étudiant, fit remarquer que l'arbre du moteur était trop long et n'allait pas avoir une rigidité suffisante. "C'est facile à corriger sans modifier la structure", lui répondit l'étudiant. "Il suffira de prendre un matériau d'une meilleure qualité : je ferai un arbre en acier allié." L'étudiant avait-il raison ? Expliquez.

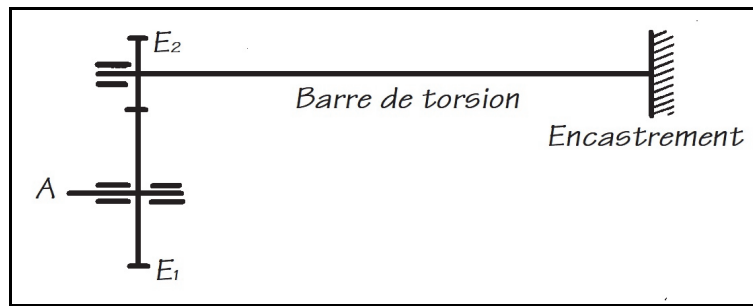
Réponse : Non, le prof a toujours raison...

**6S.05.** On exerce suivant l'axe de l'arbre A un moment égal à  $250 \text{ Nm}$ . On agit ainsi sur une barre en acier de diamètre  $16 \text{ mm}$ , de longueur  $500 \text{ mm}$ , par l'intermédiaire des engrenages  $E_1$  et  $E_2$ , dont les dentures de module 5 comprennent respectivement 34 et 14 dents.

- Calculer la contrainte maximale de torsion dans la barre.
- Quelle est la valeur de l'angle de rotation de  $E_2$ .
- Donner une valeur approximative de la limite élastique de l'acier qui convient à cette construction. La barre ne présente aucun accident de forme, mais le moment en A est appliqué



de façon périodique (répétée).

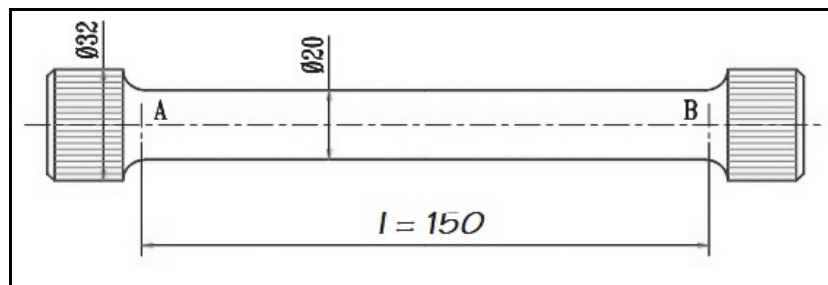


Réponses : a)  $\tau = 128 \text{ N/mm}^2$  b)  $\varphi = 5.625^\circ$  c)  $R_e \approx 500 \text{ N/mm}^2$

**6S.06.** La figure ci-dessous représente une barre de torsion de suspension de véhicule. Cette barre est en acier spécial ( $G = 80\,000 \text{ N/mm}^2$ ).

On adopte un coefficient de sécurité de 2. La variation de section en A et B provoque une concentration de contrainte. ( $K_t = 2$ ).

- Déterminer le moment de torsion maximal que peut supporter la barre pour vérifier la condition de résistance ( $\tau_{adm} = 500 \text{ MPa}$ ).
- Déterminer le moment de torsion maximal que peut supporter la barre pour vérifier la condition de déformation (rigidité) ( $\varphi_{AB} \leq 4^\circ$ ).



Réponses : a)  $M_t = 392\,699 \text{ Nmm}$  b)  $M_t = 584\,865 \text{ Nmm}$

**6S.07.** *Arbre de transmission Mercedes CLK 55 AMG.*

Données :

Puissance max. : 367 CV à 5740 tr/min.

Couple max. : 520 Nm à 4000 tr/min.

Arbre de transmission en acier avec  $R_e = 800 \text{ MPa}$  (prendre  $S = 2$ ), longueur 1.5 m

Rapports de boîte de vitesses :

1<sup>ère</sup> 3.59    2<sup>ème</sup> 2.19    3<sup>ème</sup> 1.41    4<sup>ème</sup> 1    5<sup>ème</sup> 0.89

Rapport de pont AR : 3.06

Questions :

- Calculez le diamètre minimum  $d$  de cet arbre à la contrainte admissible
- Calculez son angle total de déformation.
- Si l'angle unitaire de torsion  $\theta$  est limité à  $0.25 \text{ }^\circ/\text{m}$ , quel est le nouveau diamètre  $d'$  de l'arbre ?
- Quelle est la contrainte maximum dans ce nouvel arbre et quel est son poids ?
- Calculez les diamètre extérieur  $d''$  et intérieur  $d_i$  d'un arbre tubulaire avec  $d''/d_i = 1.2$  avec  $\theta = 0.25 \text{ }^\circ/\text{m}$  ; quel est son poids ? Quelle est la contrainte maximale dans cet arbre ?

- Réponses :
- a)  $d = 31 \text{ mm}$    b)  $\varphi = 20.8^\circ$    c)  $d' = 85 \text{ mm}$
  - d)  $\tau_{\max} = 15.6 \text{ MPa}$  ;  $poids = 651 \text{ N}$
  - e)  $d'' = 100 \text{ mm}$  ;  $d_i = 85 \text{ mm}$  ;  $poids = 280 \text{ N}$  ;  $\tau_{\max} = 20 \text{ MPa}$