

CHAPITRE 7. FLEXION	- 7.1 -
7.1. Définitions et exemples	- 7.1 -
7.1.1. Flexion pure	- 7.1 -
7.1.2. Glissement et cisaillement dans les pièces fléchies	- 7.1 -
7.1.3. Flexion simple	- 7.3 -
7.2. Diagrammes des moments fléchissants et des efforts tranchants	- 7.4 -
7.2.1. Conventions de signes	- 7.4 -
7.2.2. Signification physique du moment de flexion	- 7.4 -
7.2.3. Diagrammes des moments fléchissants et des efforts tranchants	- 7.5 -
7.2.4. Résumé des relations entre le M_f , le V et le type de charge	- 7.6 -
A) Relations entre le moment fléchissant et l'effort tranchant	- 7.6 -
B) Relations entre le type de charges et l'allure des diagrammes des moments fléchissants et des efforts tranchants	- 7.6 -
C) Relation entre le moment fléchissant et la déformée d'une poutre	- 7.7 -
D) Relation entre le type de charge et la position du moment fléchissant maximum d'une poutre	- 7.7 -
E) Trucs et astuces	- 7.8 -
7.2.5. Marche à suivre pour tracer les diagrammes des V et M_f	- 7.8 -
7.2.6. Exemples	- 7.9 -
A) Poutre sur deux appuis : charge ponctuelle	- 7.9 -
B) Poutre sur deux appuis soumise à une charge uniformément répartie sur la partie droite	- 7.10 -
C) Poutre soumise à une charge ponctuelle et répartie	- 7.12 -
7.3. Distribution des contraintes normales dans une section droite	- 7.14 -
7.3.1. Généralités	- 7.14 -
7.3.2. Relation fondamentale	- 7.15 -
7.3.3. Axe fort, axe faible d'une section	- 7.16 -
7.4. Contraintes tangentielles	- 7.17 -
7.4.1. Glissement longitudinal	- 7.17 -
7.4.2. Glissement transversal	- 7.22 -
7.5. Choix de la forme de la section droite	- 7.23 -
7.5.1. En flexion	- 7.23 -
A) Cas des matériaux ductiles	- 7.23 -
B) Cas des matériaux fragiles	- 7.23 -
7.5.2. En cisaillement	- 7.24 -
7.5.3. Section(s) dangereuse(s) d'une poutre	- 7.24 -
7.6. Contraintes admissibles	- 7.25 -
7.6.1. En flexion	- 7.25 -
7.6.2. En cisaillement	- 7.25 -
7.7. Déformation de flexion des poutres isostatiques	- 7.29 -
7.7.1. Origine de la déformation - Equation de l'élastique	- 7.29 -
7.7.2. Calcul de la flèche en un point : "Méthode différentielle"	- 7.29 -
7.7.3. Calcul de la flèche en un point : "Méthode des aires"	- 7.33 -
A) Théorie	- 7.33 -
B) Exemples	- 7.34 -
C) Récapitulatif - Résumé	- 7.37 -
7.7.4. Flèche admissible	- 7.37 -
7.8. Applications	- 7.40 -
7.8.1. Calcul d'une poutre en flexion suivant l'EUROCODE	- 7.40 -
A) Principe de vérification	- 7.40 -
B) Vérifications aux ELU	- 7.40 -
C) Vérifications aux ELS	- 7.42 -

7.8.2. Calcul de poutres de plancher.....	- 7.44 -
7.8.3. Calcul (simplifié) d'une dent de roue dentée (engrenage cylindrique).....	- 7.48 -
7.8.4. Charges roulantes	- 7.52 -
A) Charge roulante unique.....	- 7.52 -
7.9. Démonstrations	- 7.54 -
7.9.1. Démonstration de la formule de Navier pour la flexion	- 7.54 -
7.9.2. Principe de réciprocité des contraintes tangentielles.....	- 7.55 -

CHAPITRE 7. FLEXION

7.1. Définitions et exemples

7.1.1. Flexion pure

La **flexion pure** est un état de charge tel que, dans toute section droite d'une pièce, il n'existe qu'un **moment fléchissant** M_f . Ce moment fléchissant doit être constant.

La figure ci-contre donne un exemple d'une barre soumise à flexion pure. Les deux couples C agissent dans un plan de symétrie longitudinal de la poutre : dès lors, en effectuant une coupure suivant une section droite quelconque, on constate que tous les efforts internes y sont nuls sauf le moment fléchissant autour de l'axe Oz (perpendiculaire au plan dans lequel se trouve la poutre) qui est constant et égal à C .

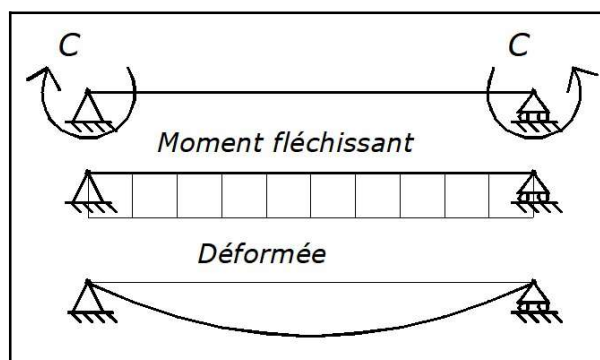


fig. 7.1. - Flexion pure.

Par des considérations de symétrie, on peut montrer que toute section droite de la barre le reste après déformation.

Le moment fléchissant étant, par définition, constant, la barre se déformera partout de façon identique. Elle adoptera donc une courbure constante en prenant la forme d'un arc de cercle.

7.1.2. Glissement et cisaillement dans les pièces fléchies

La rupture par glissement et cisaillement se produit dans un corps quand, par suite des charges qui agissent sur lui, une partie de ce corps glisse par rapport à l'autre partie, les efforts intérieurs que la matière subit ayant dépassé la résistance à la rupture.

Ce genre d'effort intérieur se produit également dans les pièces fléchies.

Deux exemples simples permettent de s'en rendre compte.

Supposons qu'une poutre soit formée d'une série de blochets B juxtaposés et serrés l'un contre l'autre par un étai, comme le montre la première figure ci-dessous.

Plaçons cette poutre sur deux appuis C et D et chargeons-là d'une série de forces F .

La poutre étant ainsi sectionnée suivant les sections S, il est évident que les blochets B vont glisser les uns par rapport aux autres et, par exemple, vont se présenter à un moment donné dans les positions données par la seconde figure ci-dessous.

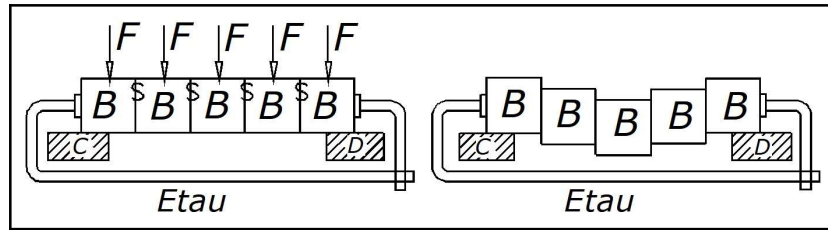


fig. 7.2. - Glissement transversal.

Ces déplacements par glissement étaient à prévoir puisque la matière manque de continuité suivant les plans S. Dans ces plans la résistance de la matière est nulle, seul le serrage des blochets par frottement les uns contre les autres s'opposent à leur déplacement par glissement.

Dans la mesure du possible les poutres fléchies sont d'une seule pièce, cependant elles présentent la même tendance au **glissement transversal** et si la résistance de la matière est insuffisante, les mêmes déplacements verticaux auront tendance à se produire également.

Dans la grande majorité des cas ces **efforts tranchants** sont négligeables par rapport aux autres efforts sollicitant la poutre, il faudra cependant en tenir compte au moment de la conception des poutres soumises à flexion (raidisseurs aux appuis).

Supposons en second lieu que la poutre fléchie soit constituée d'une série de planches empilées et posées sur les appuis C et D. Une charge F fait fléchir l'ensemble.

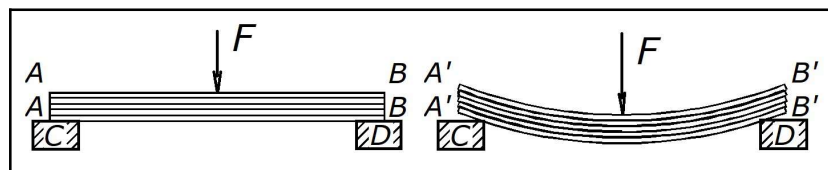


fig. 7.3. - Glissement longitudinal.

L'expérience très simple à réaliser, montre que chacune des planches fléchit et s'incurve pour son propre compte, ce qui les oblige à glisser les unes par rapport aux autres dans le sens longitudinal.

Les extrémités des planches qui, avant l'application de la charge F , se trouvaient en coïncidence dans un même plan AA et BB, ne le sont plus après déformation.

La seule résistance opposée à ce **glissement longitudinal** provient du frottement des planches les unes sur les autres. En réalité, on ne tient compte de ce glissement que dans les calculs des soudures ou des rivets des poutres composées.

7.1.3. Flexion simple

Il apparaît donc dans les sections transversales d'une barre, *en même temps que les moments de flexion, des efforts tranchants*, d'où :

La **flexion simple** est un état de charge tel que dans toute section droite d'une pièce il n'existe qu'un **moment fléchissant M_f** et un **effort tranchant V** associé.

La flexion simple entraîne sur toute la section perpendiculaire à la fibre moyenne de la pièce des contraintes normales et tangentielles. Ces dernières provoquent un gauchissement des sections droites.

Toutefois, la déformation du plan des sections transversales n'influe pas d'une façon notable sur la grandeur des contraintes normales.

L'erreur que l'on commet en ne tenant pas compte de cette déformation dans le calcul des contraintes normales est faible (voir nulle si l'effort tranchant est constant).

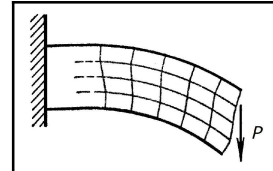


fig. 7.4. - Gauchissement.

Une **barre** travaillant principalement à la **flexion** est appelée **poutre**.

Un exemple concret de poutre isostatique soumise à flexion simple est donné à la figure ci-dessous. Les charges sont toujours appliquées dans un plan longitudinal de symétrie. En effectuant une coupure au droit de la charge P , on constate que comme efforts internes, il existe un moment fléchissant M_f et un effort tranchant V .

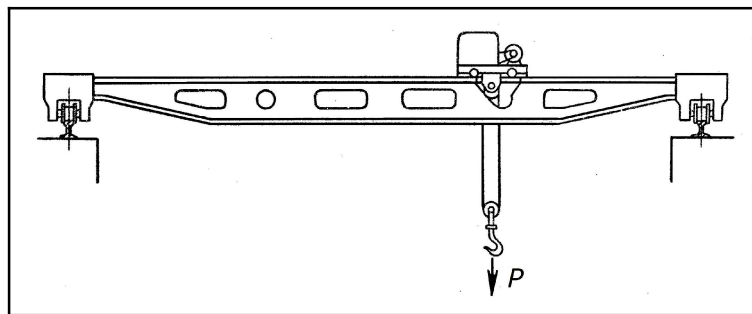


fig. 7.5. - Poutre de pont roulant : flexion simple.

7.2. Diagrammes des moments fléchissants et des efforts tranchants

7.2.1. Conventions de signes

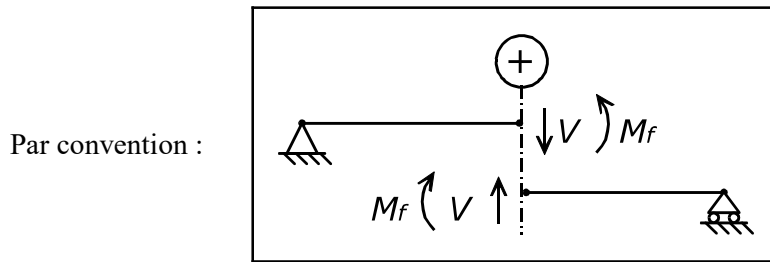


fig. 7.6. - Flexion simple : convention de signes.

Le moment fléchissant est positif :	<i>s'il tend à mettre en traction les fibres inférieures longitudinales de la poutre.</i>
L' effort tranchant associé est positif :	<i>s'il tend à faire tourner le petit élément dans le sens horlogique.</i>
La charge $p_{(x)}$ est positive :	<i>si elle agit vers le bas.</i>

Pour retrouver facilement le <i>signe des moments fléchissants M_f</i> , on peut se servir de la <u>règle</u> suivante :		
Si une <i>force F</i> ou <i>p</i> agit vers le bas ,	le M_f correspondant est :	(-)
Si une <i>force F</i> ou <i>p</i> agit vers le haut ,	le M_f correspondant est :	(+)
Pour le <i>signe des efforts tranchants V</i> :		
Si une <i>force F</i> ou <i>p</i> agit vers le bas ,	le V correspondant est :	(-)
Si une <i>force F</i> ou <i>p</i> agit vers le haut ,	le V correspondant est :	(+)
<u>Remarque</u> :		
Ne fonctionne que si on établit le diagramme des efforts tranchants <i>de la gauche vers la droite</i> .		

7.2.2. Signification physique du moment de flexion

Le moment de flexion M_f qui agit sur une section droite de la poutre est en réalité le moment d'un couple de forces agissant sur cette section. Le plan de ce couple est aussi celui des forces sollicitant la poutre. C'est le plan de flexion.

L'effet de M_f , supposé > 0 sur la figure ci-contre, est celui qui serait produit par un couple de forces f_1 et f_2 (avec $f_1 = f_2$), dont f_1 "pousserait" sur la moitié supérieure de la section ss et f_2 "tirerait" sur la moitié inférieure. Une des conséquences en est une sorte de rotation apparente d'un angle ω de la section, mouvement qui est suggéré par le sens de la flèche. Les fibres longitudinales de la poutre, devant rester perpendiculaires à ss , suivent le mouvement en s'arquant dans le sens positif convenu.

La compréhension de ce phénomène physique est capitale pour la suite de l'étude de la flexion.

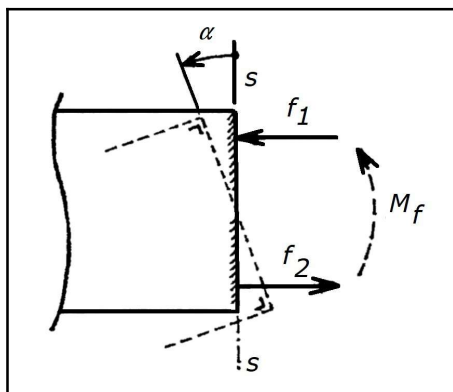


fig. 7.7. - Signification du moment fléchissant.

7.2.3. Diagrammes des moments fléchissants et des efforts tranchants

Ces diagrammes joueront un rôle très important dans la recherche des sections les plus sollicitées ainsi que dans la détermination des flèches. Ils remplissent donc une fonction primordiale dans le dimensionnement des poutres.

Pour construire les diagrammes des moments fléchissants et des efforts tranchants, on effectue un certain nombre de coupures (entre les charges extérieures, entre une charge et une extrémité non appuyée, dans les zones où agissent les charges réparties).

Pour *chaque coupure* on détermine l'expression de M_f et de V **en équilibrant le tronçon compris entre une extrémité de la poutre et la coupure**. Les diagrammes sont tracés à partir des équations obtenues pour M_f et V . La convention de signe adoptée pour le dessin des diagrammes est celle explicitée ci-dessus. Ce choix implique que le diagramme des moments soit orienté du côté de la fibre tendue.

Effort tranchant dans une section :

Somme des **forces** (réactions comprises) situées à droite (ou à gauche) de la section considérée.

Moment fléchissant dans une section :

Somme des **moments**, de toutes les forces (réactions comprises) situées à droite (ou à gauche) de la section considérée.

On peut aussi montrer que les efforts tranchants sont la dérivée de l'expression des moments fléchissants. Autrement dit :

$$V = \frac{dM_f}{dx} \quad \text{ou} \quad M_f = \int V dx$$

Ce qui a pour conséquence que le moment fléchissant maximum $M_{f_{\max}}$ se situe à l'endroit où l'effort tranchant est nul ($V = 0$). Ce qui est une propriété très intéressante comme on le verra un peu plus loin.

7.2.4. Résumé des relations entre le M_f , le V et le type de charge

A) Relations entre le moment fléchissant et l'effort tranchant

- ▶ Le moment fléchissant M_f est extrémum (minimum ou maximum) là où l'effort tranchant V s'annule.
- ▶ Le moment fléchissant M_f croît dans une zone où l'effort tranchant V est positif.
- ▶ Le moment fléchissant M_f décroît dans une zone où l'effort tranchant V est négatif.
- ▶ A chaque *ressaut* du diagramme des efforts tranchants correspond un *point d'inflexion* (cassure) dans le diagramme des moments fléchissants.
- ▶ Le moment fléchissant est nul ($M_f = 0$) au droit des *appuis d'extrémités* et aux *extrémités libres* d'une poutre. Le moment fléchissant n'est jamais nul à un encastrement.
- ▶ Le moment fléchissant en un point P d'une poutre est égal à la *surface du diagramme des efforts tranchants* d'une extrémité de cette poutre à ce point P.

B) Relations entre le type de charges et l'allure des diagrammes des moments fléchissants et des efforts tranchants

- ▶ Sur une zone de poutre *sans charge* (**fig. 7.8. (a)**) :

V	: constant	ou	V	: nul (= 0)
M_f	: évolue linéairement		M_f	: constant
- ▶ Sur une zone de poutre soumise à une *charge uniformément répartie constante* (**fig. 7.8. (b)**) :

V	: évolue linéairement
M_f	: évolue paraboliquement
- ▶ Au droit d'une *force concentrée* (action ou réaction) (**fig. 7.8. (c)**) :

V	: subit un ressaut ou une chute
M_f	: montre un point d'inflexion (cassure)

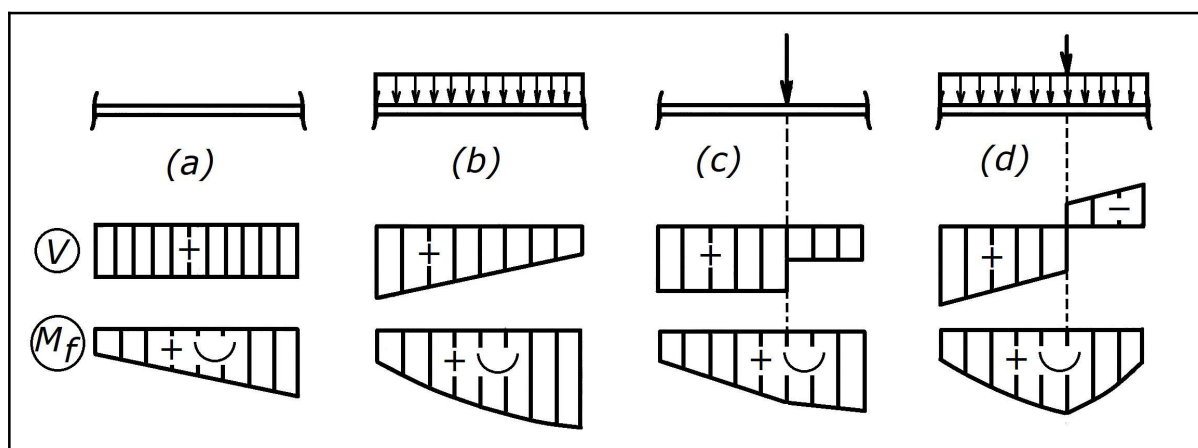


fig. 7.8. - Relations entre le type de charges et l'allure des diagrammes des moments fléchissants et des efforts tranchants.

C) Relation entre le moment fléchissant et la déformée d'une poutre

Les conventions dans le signe des moments fléchissants que nous avons adopté est tel que le diagramme des moments fléchissants est positionné du côté de la fibre tendue (en traction). En résumé :

- ▶ Si le diagramme des moments fléchissants est *positif*, la déformée présente une *concavité vers le haut*.
- ▶ Si le diagramme des moments fléchissants est *négatif*, la déformée présente une *concavité vers le bas*.
- ▶ Dans la section où le moment fléchissant est nul ($M_f = 0$), il y a changement de sens de courbure de la déformée; celle-ci présente en cette section un *point d'inflexion*.

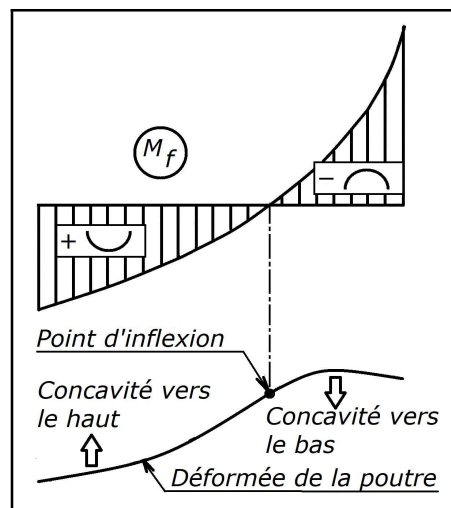


fig. 7.9. - Relation entre le moment fléchissant et la déformée d'une poutre.

D) Relation entre le type de charge et la position du moment fléchissant maximum d'une poutre

Pour trouver la position du moment fléchissant maximum voir (A 1)).

- ▶ Charge(s) ponctuelle(s) *uniquement* : Au droit d'une des charges ponctuelles.
- ▶ Charge répartie : Position : $d = R_A/q$

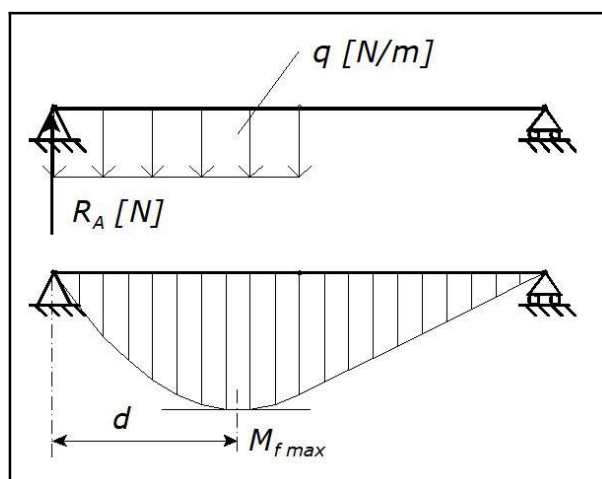


fig. 7.10. - Position du M_{fmax} pour une charge répartie.

Remarque importante :

Ne fonctionne que si la charge répartie est telle qu'elle agit de manière continue entre l'appui et l'endroit du moment fléchissant maximum et sans charge ponctuelle en superposition.

E) Trucs et astuces

- ▶ Dans le cas d'un dimensionnement de poutre à la contrainte, il s'agira de déterminer d'abord le diagramme des efforts tranchants. Le moment fléchissant maximum se situe à l'endroit où l'effort tranchant s'annule. Le calcul s'effectuera pour cette position uniquement.
- ▶ En remplaçant une charge répartie par la même charge localisée en son centre de gravité, on obtient, au diagramme des moments fléchissants M_f , les tangentes à la parabole, aux extrémités de la zone de répartition. Il suffit, pour obtenir le diagramme exact des M_f de tracer la parabole à partir de ces 2 tangentes.

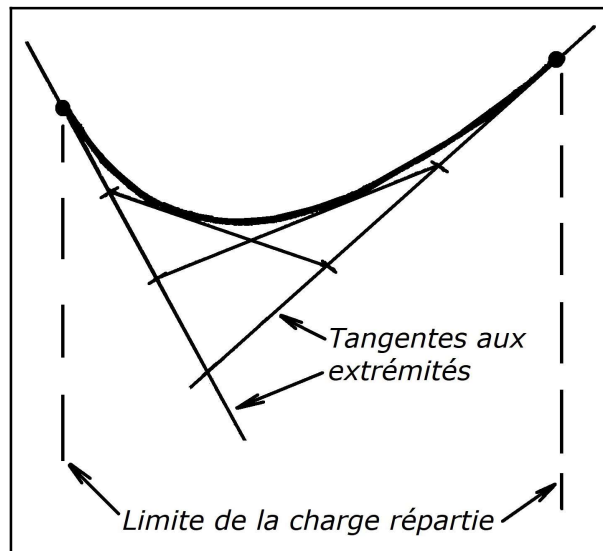


fig. 7.11. - "Parabolisation" du diagramme des moments fléchissants lors d'une charge répartie.

7.2.5. Marche à suivre pour tracer les diagrammes des V et M_f

A partir des constatations précédentes, nous allons établir la marche à suivre pour tracer les diagrammes des V et des M_f relatifs aux poutres constituant des systèmes isostatiques. Il faut :

- 1) Calculer les réactions d'appuis.
- 2) Tracer le diagramme des efforts tranchants V .
- 3) Calculer les valeurs de V aux sections où un changement d'intensité des charges ou des réactions externes se produit.
- 4) Localiser les endroits où $V = 0$ (ces points sont importants, puisque c'est là que les moments fléchissants M_f atteint une valeur maximale ou minimale).
- 5) Tracer le diagramme des moments fléchissants M_f .
- 6) Calculer les valeurs des moments fléchissants M_f aux points où $V = 0$.

Les exemples suivants illustrent cette marche à suivre.

7.2.6. Exemples

A) Poutre sur deux appuis : charge ponctuelle

1) Recherche des réactions d'appuis.

$$\begin{aligned} \sum (\vec{f}_i) = \vec{0} & : R_A - Q + R_B = 0 \\ \sum (\vec{M}_B) = \vec{0} & : -R_A l + Q l_b = 0 \Rightarrow R_A = \frac{Q l_b}{l} \\ \Rightarrow R_B = \frac{Q l_a}{l} \end{aligned}$$

2) Recherche des efforts tranchants. (On coupe en un point et on équilibre de gauche à droite)

$$\begin{aligned} \text{Entre A et C} & : V_{A \rightarrow C} = R_A = \frac{Q l_b}{l} \\ \text{Entre C et B} & : V_{C \rightarrow B} = R_A - Q = -\frac{Q l_a}{l} \end{aligned}$$

3) Recherche des moments fléchissants. (On coupe en un point et on équilibre de gauche à droite)

$$\begin{aligned} \text{Coupure en A} & : M_{fA} = 0 \\ \text{Entre A et C} & : M_{fA \rightarrow C} = R_A x \quad (x \text{ est la distance à partir du point A}) \\ \text{Coupure en C} & : x = l_a \Rightarrow M_{fC} = +R_A l_a = \frac{Q l_a l_b}{l} = M_{f \max} \\ \text{Entre C et B} & : M_{fC \rightarrow B} = R_A x - Q(x - l_a) \\ \text{Coupure en B} & : x = l \Rightarrow M_{fB} = +R_A l - Q l_b = 0 \end{aligned}$$

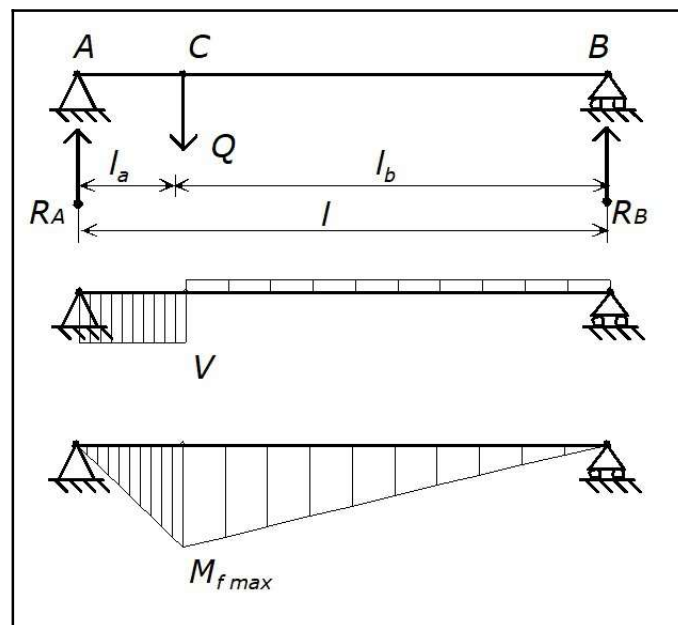


fig. 7.12. - Poutre sur 2 appuis avec charge ponctuelle.

Recherche du *moment fléchissant maximum* au moyen du diagramme des efforts tranchants. Il suffit de se souvenir que : “Le moment fléchissant maximum se situe à l’endroit où l’effort tranchant s’annule”.

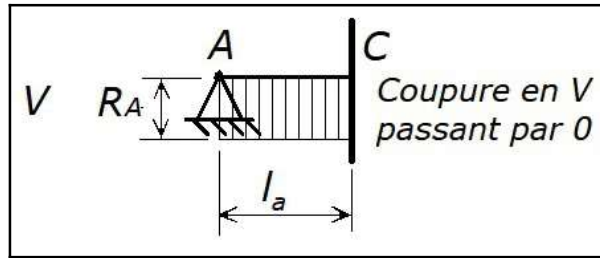


fig. 7.13. - Recherche du moment maximum au moyen de la surface du diagramme des efforts tranchants.

Et que : “Le moment fléchissant en un point P d’une poutre est égal à la surface du diagramme des efforts tranchants d’une extrémité de cette poutre à ce point P.”

Dans notre cas, nous avons directement :

$$M_{f \max} = A_{diag V} = R_A \times l_a = \left(\frac{Q l_b}{l} \right) l_a$$

$$\Rightarrow M_{f \max} = Q \frac{l_a l_b}{l}$$

B) Poutre sur deux appuis soumise à une charge uniformément répartie sur la partie droite

Remarque importante :

Lorsqu’il existe une **charge répartie**, on la remplace par une **charge ponctuelle** au centre de gravité de la charge répartie.

1) Recherche des réactions d’appuis.

On pose : $F = q l_p$ $\left[N = \frac{N}{m} \right]$

$$\sum (\vec{f}_i) = \vec{0} \quad : \quad R_A - F + R_B = 0$$

$$\sum (\vec{M}_B) = \vec{0} \quad : \quad -R_A l + F l_b = 0 \Rightarrow R_A = \frac{F l_b}{l} = \frac{(q l_p) l_b}{l}$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{F l_a}{l} = \frac{(q l_p) l_a}{l}$$

2) Recherche des efforts tranchants. (On coupe en un point et on équilibre de gauche à droite)

Entre A et C : $V_{A \rightarrow C} = R_A = \frac{F l_b}{l}$

Entre C et B : $V_{C \rightarrow B} = R_A - q(x - (l - l_p))$ (x est la distance à partir du point A)

3) Recherche des moments fléchissants. (On coupe en un point et on équilibre de gauche à droite)

Coupure en A : $M_{f A} = 0$

Entre A et C : $M_{f A \rightarrow C} = R_A x$

Coupure en C : $x = l - l_p \Rightarrow M_{f C} = + R_A (l - l_p) = \frac{F l_b}{l} (l - l_p)$

$$\begin{aligned} \text{Entre C et B} \quad : \quad & \begin{cases} M_{f_{C \rightarrow B}} = R_A x - (x - l_C) q \frac{x - l_C}{2} \\ \quad \quad \quad \quad \quad = R_A x - (x - l_C)^2 \frac{q}{2} \end{cases} \\ \text{Coupure en B} \quad : \quad & M_{f_B} = + R_A l - F l_b = 0 \end{aligned}$$

Pour la recherche du moment fléchissant maximum, il faut connaître la distance d (position où $V = 0$). Soit avec la relation des triangles semblables :

$$\frac{l_p}{R_A + R_B} = \frac{d}{R_A} \Rightarrow d = l_p \frac{R_A}{R_A + R_B} = l_p \frac{l_b}{l_a + l_b}$$

Et on remplace x par d dans l'expression du moment fléchissant entre C et B.

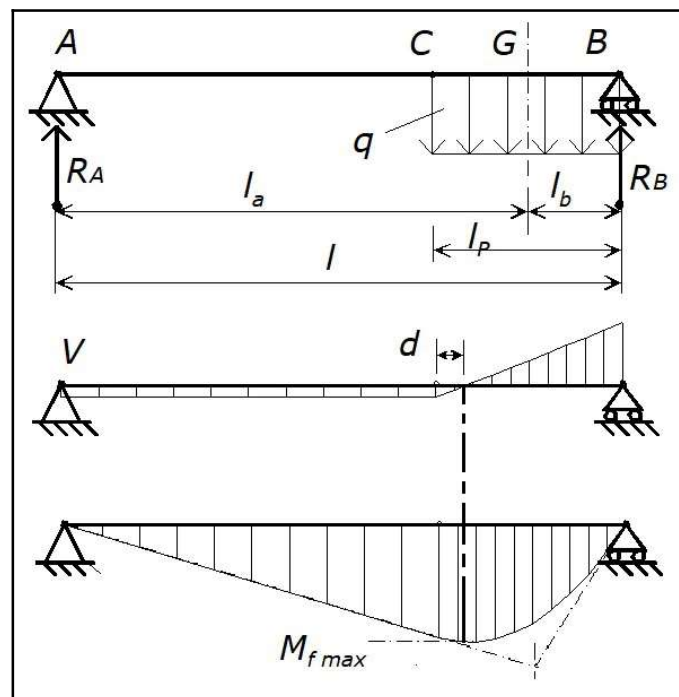


fig. 7.14. - Poutre sur 2 appuis avec charge répartie partielle.

Recherche du moment fléchissant maximum au moyen du diagramme des efforts tranchants :

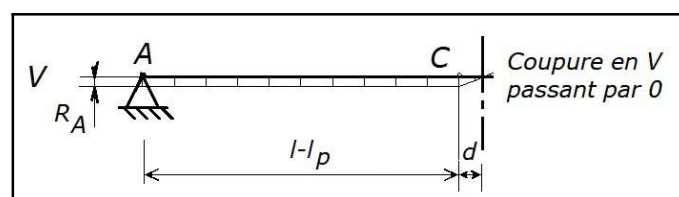


fig. 7.15. - Recherche du moment maximum au moyen de la surface du diagramme des efforts tranchants.

Nous avons donc ici :

$$M_{f \max} = A_{diag} V = R_A (l - l_p) + \frac{R_A d}{2} = \left(\frac{q l_p l_b}{l} \right) (l - l_p) + \left(\frac{q l_p l_b}{l} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{l_p l_b}{l_a + l_b} \right)$$

$$\Rightarrow M_{f \max} = q l_p \left(l_b - \frac{l_p}{l} + \frac{l_p l_b}{2l(l_a + l_b)} \right)$$

C) Poutre soumise à une charge ponctuelle et répartie

Remarque importante :

Si dans la zone où agit une **charge répartie** existe en outre des **forces ponctuelles** (actives ou réactives), il faut diviser la zone de charge répartie en tronçons limités par les lignes d'actions des charges ponctuelles.

1) Recherche des réactions d'appuis.

On pose : $F = q l$

$$\sum (\vec{f}_i) = \vec{0} \quad : \quad R_A - F - Q + R_B = 0$$

$$\sum (\vec{M}_B) = \vec{0} \quad : \quad + R_A l - F \frac{l}{2} - Q l_b = 0 \Rightarrow R_A = \frac{F}{2} + Q \frac{l_b}{l}$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{F}{2} + Q \frac{l_a}{l}$$

2) Recherche des efforts tranchants. (*On coupe en un point et on équilibre de gauche à droite*)

Entre A et C : $V_{A \rightarrow C} = R_A - q x$ (x est la distance à partir du point A)

Entre C et B : $V_{C \rightarrow B} = R_A - Q - q x$

3) Recherche des moments fléchissants. (*On coupe en un point et on équilibre de gauche à droite*)

Coupe en A : $M_{f A} = 0$

Entre A et C : $M_{f A \rightarrow C} = R_A x - (q x) \frac{x}{2} = R_A x - \frac{q x^2}{2}$

Coupe en C : $x = l_a \Rightarrow M_{f C} = R_A l_a - \frac{q l_a^2}{2} = M_{f \max}$

Entre C et B : $M_{f C \rightarrow B} = R_A x - (q x) \frac{x}{2} - Q(x - (l - l_a))$

Coupe en B : $x = l \Rightarrow M_{f B} = R_A l - (q l) \frac{l}{2} - Q l_b = 0$

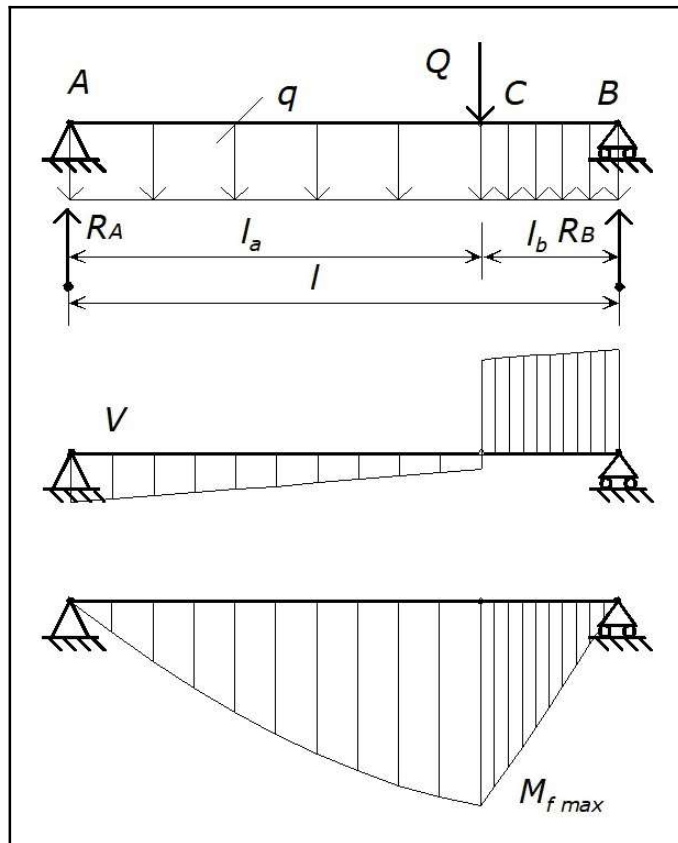


fig. 7.16. - Poutre sur 2 appuis avec charges ponctuelles et répartie.

Recherche du *moment fléchissant maximum* au moyen du diagramme des efforts tranchants :

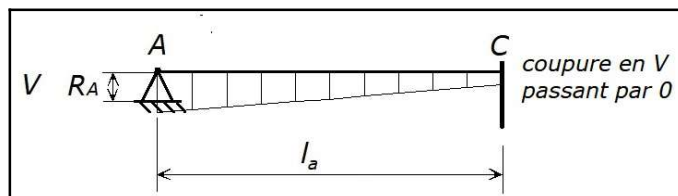


fig. 7.17. - Recherche du moment maximum au moyen de la surface du diagramme des efforts tranchants.

Nous avons donc ici :

$$M_{f \max} = A_{\text{diag } V} = \frac{R_A + (R_A - q l_a) l_a}{2}$$

$$\Rightarrow M_{f \max} = \frac{2 R_A l_a q l_a^2}{2} \quad \text{avec} \quad R_A = q l + Q \frac{l_b}{l}$$

7.3. Distribution des contraintes normales dans une section droite

7.3.1. Généralités

Si on considère une poutre sur appuis simples, possédant un plan de symétrie longitudinal, dans lequel s'exerce des charges verticales quelconques, celle-ci va se déformer comme indiqué à la figure ci-dessous.

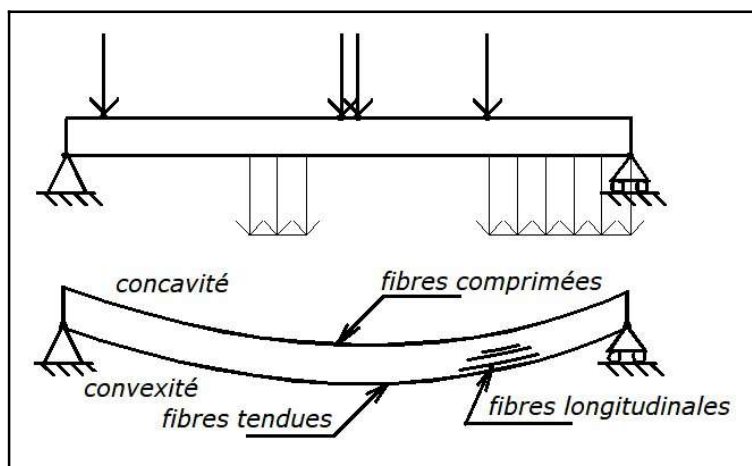


fig. 7.18. - Déformation de flexion.

Vu la courbure de la barre, les **fibres longitudinales inférieures** vont *s'allonger* et les **fibres longitudinales supérieures** se raccourcir. Dès lors on peut montrer, par la loi de Hooke (*contrainte proportionnelle au déplacement*), que lors de la flexion d'une poutre, les contraintes dans une section transversale varie selon une loi linéaire (figure ci-contre). Ce sont donc bien des **contraintes normales** (c'est-à-dire perpendiculaires à la section).

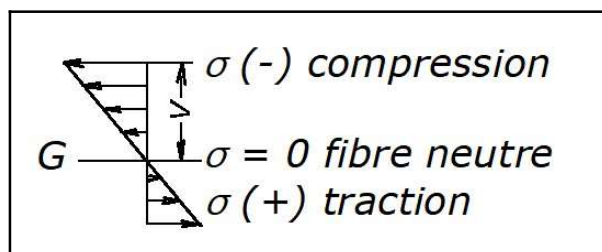


fig. 7.19. - Répartition des contraintes due à la flexion - Fibre neutre.

Si les fibres inférieures s'allongent et les fibres supérieures se raccourcissent, il doit donc logiquement exister des fibres qui vont conserver leur longueur. D'où la définition :

Définition :

Le lieu géométrique des points d'une section vérifiant la condition $\sigma = 0$ est appelé : **ligne (ou fibre) neutre** de la section.

Et dans le cas de la flexion pure et de la flexion simple, on peut montrer, par ailleurs, que **la fibre neutre** se confond **toujours** avec **le centre de gravité de la section** (sauf dans le cas particulier des pièces à fortes courbures).

7.3.2. Relation fondamentale

Explicitons maintenant le lien existant entre la contrainte σ et le moment fléchissant M_f dans une section droite. L. Navier ⁽¹⁾ à démontrer que toute fibre longitudinale située à une distance y de l'axe neutre est le siège d'une contrainte donnée par la formule suivante :

$$\sigma = \frac{M_f}{I/y} = \frac{M_f y}{I} \quad (\text{éq. 7.53.}) \quad [N/mm^2]$$

<u>Notations</u> :	M_f	moment fléchissant	Nmm
	I	moment d'inertie de la section	mm^4
	y	distance à partir de la fibre neutre	mm

On remarque que les contraintes maximales en flexion apparaissent aux points les plus éloignés de la fibre neutre et donc :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{f \max}}{I/v} = \frac{M_{f \max}}{W_x} \quad (\text{éq. 7.54.}) \quad [N/mm^2]$$

<u>Notations</u> :	v	la distance entre la fibre neutre et le point, de la section, le plus éloigné	mm
		$v = y_{\max}$	
	I/v	module de résistance à la flexion , aussi noté W_x	mm^3

Remarque :

La formule de la contrainte maximum en flexion est à rapprocher de celle de la contrainte tangentielle maximum en torsion.

Ces contraintes maxima sont de signes opposés : l'une est une contrainte de traction, l'autre une contrainte de compression. Et si le profil est symétrique (par rapport à l'axe neutre), on obtient :

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} \quad \text{ou} \quad \sigma_{\max} = |\sigma_{\min}|$$

Remarques :

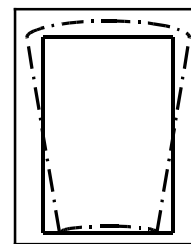
1) La flexion simple entraîne sur toute section perpendiculaire à la fibre moyenne de la pièce des contraintes normales et tangentielles. Ces dernières provoquent un gauchissement des sections droites (voir § 7.1.3.).

Toutefois, la déformation du plan des sections transversales n'influe pas d'une façon notable sur la grandeur des contraintes normales.

L'erreur que l'on commet en ne tenant pas compte de cette déformation dans le calcul des contraintes normales est faible (voire nulle si l'effort tranchant est constant).

⁽¹⁾ Claude Louis Marie Henri Navier (1785 [Dijon] - 1836 [Paris]) : ingénieur français des Ponts et Chaussées.

- 2) Sous l'action des contraintes de traction s'exerçant dans la partie inférieure de la barre, un rétrécissement latéral de la section droite, dû au coefficient de Poisson, se produit. Pour la raison contraire, la partie supérieure de la barre est soumise à un gonflement latéral. En pratique, on ne tiendra pas compte de cette modification de la forme des sections transversales de la barre.



*fig. 7.20. -
Déformation d'une
section sous
l'action d'un
moment
fléchissant.*

7.3.3. Axe fort, axe faible d'une section

On sait qu'une section droite d'une poutre possède deux axes perpendiculaires se coupant en G : l'axe y par rapport auquel on détermine un moment d'inertie I_y de la section, et l'axe z par rapport auquel on détermine un I_z (Ces notations d'axe y et z sont celles normalisées suivant l'EUROCODE).

On appelle "axe fort" l'axe par rapport auquel le moment d'inertie I est le plus grand, l'autre étant qualifié de "faible". Pour les profilés I et U normalisés, tels que ceux repris dans les catalogues, l'axe y est évidemment l'axe fort et l'on en tirera les meilleures performances au point de vue flexion (contraintes σ et flèche f faibles) en plaçant l'axe y perpendiculaire au plan des forces, c'est-à-dire horizontalement dans le cas de poutres.

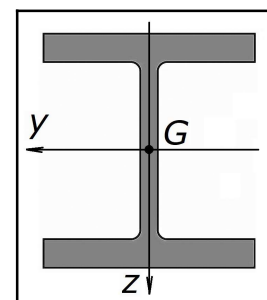


fig. 7.21. -

Le module de flexion I/v et le rayon de giration $i_g = \sqrt{I/A}$, dépendant directement du moment d'inertie I , présentent la même différenciation. Ainsi par exemple dans la série des IPE, $(I/v)_y$ est 5 à 10 fois plus grand que $(I/v)_z$, ce rapport étant de 3 à 5 pour les rayon de giration i_g . En revanche, dans la série des HEB, ces rapports sont moins élevés.

De ces dernières constatations, on peut tirer les conclusions suivantes :

- ▶ il se confirme que les profilés IPE sont conçus davantage pour reprendre la flexion simple, et que les profilés HE le sont pour reprendre la compression (avec ou sans flambement) et la flexion composée;
- ▶ dans le cas de la compression avec flambement, et quel que soit le type de profilé, le plan préférentiel de flambement, qui constituera le plan de flexion et de déformation, sera celui dans lequel la flexion aura le plus tendance à se déclencher spontanément; ce plan est donc celui qui est perpendiculaire à l'axe faible.

7.4. Contraintes tangentielles

7.4.1. Glissement longitudinal

Le *glissement longitudinal* ou *effort rasant* est l'effort agissant parallèlement à l'axe d'une pièce fléchie et ayant tendance à faire glisser les fibres longitudinales l'une sur l'autre (voir **fig. 7.3.**).

Conséquence, les contraintes tangentielles rasantes effectuent un véritable cisaillement de la matière dans tout plan horizontal d'une poutre fléchie sur lequel elles agissent. En voici quelques illustrations pratiques, avec leurs solutions.

- Pour constituer une poutre composite en bois, il faut solidariser la membrure supérieure et la membrure inférieure à l'âme. Cette solidarisation s'effectue soit par collage. Ce joint de colle va être cisailé et devra donc résister au cisaillement longitudinal, soit prévoir une file de boulons dont le fût des vis va être également cisailé, d'où un calcul de ces boulons en conséquence.

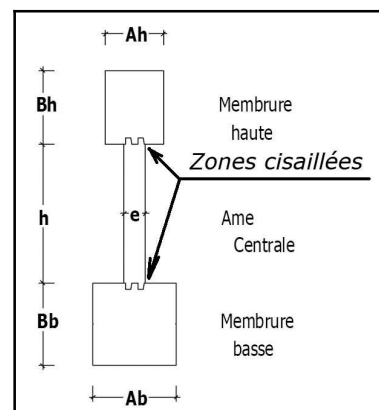


fig. 7.22. - Poutre composée en bois.

- Quand, pour résoudre un problème spécial de flexion, on a besoin d'un profilé qui ne figure pas parmi les profilés normalisés, on en réalise un "sur mesure" en assemblant par soudage des éléments de tôle forte. Ce sont les "profilés reconstitués soudés" ou PRS. Les cordons de soudure longitudinaux sont cisailés et leur profondeur a doit être correctement calculée.

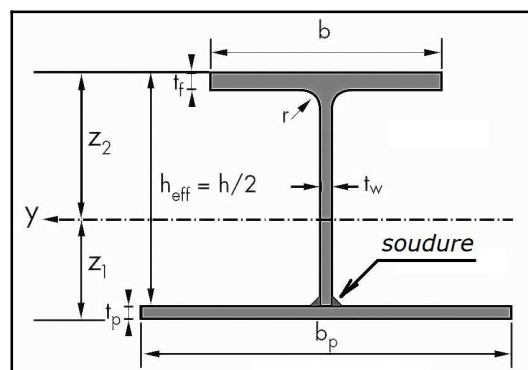


fig. 7.23. - Poutre "PRS" en acier.

- Les poutres mixtes acier-béton, ou les planchers composites, constituent des structures qui sont spécialement calculées de manière à ce que l'acier et le béton travaillent en même temps à la reprise des efforts de flexion; pour qu'il en soit ainsi, la dalle de béton est solidement liaisonnée au profilé d'acier au moyen de goujons connecteurs ou de dispositifs semblables soudés sur la semelle supérieure du profilé. Les fûts de ces goujons sont cisailés et leur densité augmente au fur et à mesure que l'on s'approche des appuis.

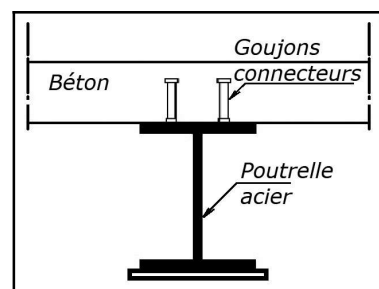


fig. 7.24. - Poutre mixte acier-béton.

Quant au calcul de ces contraintes longitudinales, nous aurons en une section quelconque (Formule de Jouravski ⁽²⁾) :

$$\tau = \frac{S_{fn} V}{I_{fn} e} \quad (\text{éq. 7.62.})$$

<u>Notations</u> :	S_{fn}	moment statique de la surface au-dessus de la fibre envisagé par rapport à la fibre neutre	mm^3
	V	effort tranchant agissant dans la section	N/mm^2
	I_{fn}	moment d'inertie de toute la section envisagée par rapport à la fibre neutre	mm^4
	e	épaisseur de la bande envisagée	mm

En considérant la formule éq. 7.62. on constate que V et I_{fn} sont constant pour une section donnée, τ varie donc avec S_{fn}/e .

On a le maximum de contrainte tangentielle τ pour une tranche à la hauteur y qui rend maximum la valeur de S_{fn}/e .

Si l'épaisseur e est constante sur toute la hauteur de la section, ce rapport est maximum quand S_{fn} est maximum, soit pour $y = 0$, à la fibre neutre. Pour les fibres extérieures, $S_{fn} = 0$, les τ sont nuls.

S_{fn} ne se prend que d'un côté de la fibre neutre. On se rappellera que la somme des moments de toute la surface par rapport à la fibre neutre est en effet égale à zéro.

Application 7.1. Quelle est la valeur de la contrainte maximale au cisaillement longitudinal pour un rectangle ?

Solution :

La contrainte maximale se trouve sur la fibre neutre

Appliquons la formule éq. 7.62. avec :

▶ $S_{fn} = A d_{G-fn} = \left(b \frac{h}{2}\right) \frac{h}{4} = \frac{b h^2}{8}$

▶ $I_{fn} = \frac{b h^3}{12}$

▶ $e = b$

$$\Rightarrow \tau_{\max} = \frac{S_{fn} V}{I_{fn} e} = \frac{\left(b h^2 / 8\right) V}{\left(b h^3 / 12\right) b} = \frac{3}{2} \frac{V}{b h} = k_{\tau} \frac{V}{A_{cis}}$$

Ce qui représente 1.5 fois la contrainte de cisaillement verticale moyenne.

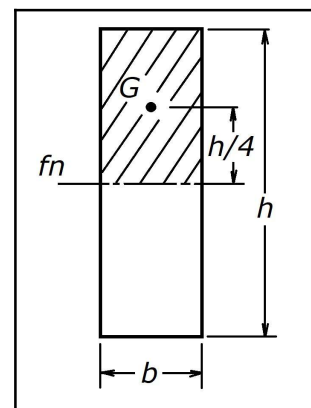


fig. 7.25. - Application 7.1.

⁽²⁾ Dimitri Ivanovitch Jouravski (1821 (1822 dans le calendrier grégorien) [Bely-Kolodes] - 1891 [Saint-Petersbourg]) : physicien et ingénieur russe des chemins de fer.

Application 7.2. Calculer l'espacement d des boulons d'assemblage M24 4.6 qu'il faut pour solidariser la poutre composée ci-contre. L'effort tangentiel maximum à supporter est de 20 kN . La largeur de la poutre est b .

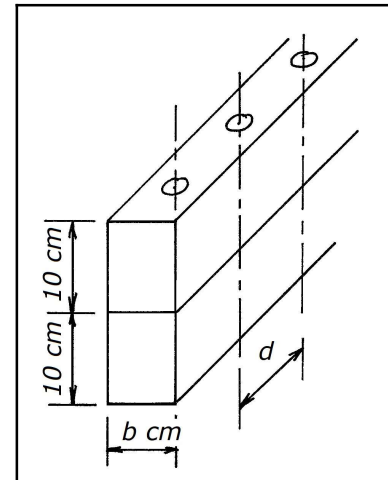


fig. 7.26. - Application 7.2.

Solution :

Calcul de la contrainte tangentielle

La contrainte est maximale au centre de la poutre composée (voir **Application 7.1.**) :

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V}{b h} = \frac{3}{2} \frac{20000}{b \times 200} = \frac{150}{b}$$

Effort sur un boulon

L'effort que doit reprendre un boulon est équivalent à l'effort de cisaillement que devrait reprendre la poutre si elle était d'une pièce. Donc, la surface cisailée de cette poutre "unique", correspondant à un boulon, est équivalente à :

$$A_{cis} = b \times 2 \left(\frac{d}{2} \right) = b d$$

D'où, l'effort que doit reprendre ce boulon :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{V}{A_{cis}} \Rightarrow V = \tau A_{cis} \\ &= \frac{150}{b} \times (b d) = 150 d \end{aligned}$$

Effort maximum que peut reprendre un boulon

Surface cisailée d'un boulon :

$$A_{cis\text{ boulon}} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 24^2}{4} = 452.4\text{ mm}^2$$

Pour rappel, pour un boulon de classe 4.6 :

$$R_m = 4 \times 100 = 400\text{ N/mm}^2$$

$$R_e = 0.6 \times R_m = 240\text{ N/mm}^2$$

Contrainte admissible en cisaillement du boulon :

$$\tau_{adm} = 0.58 \frac{R_e}{S} = 0.58 \times \frac{240}{15} = 92.8\text{ N/mm}^2$$

Effort maximum :

$$V = \tau_{adm} A_{cis} = 92.8 \times 452.4 = 41983\text{ N}$$

Distance d

En égalant les 2 efforts, on trouve la distance d recherchée. Soit :

$$150 d = 41983 \Rightarrow d = \frac{41983}{150} = 280\text{ mm} = 28\text{ cm}$$

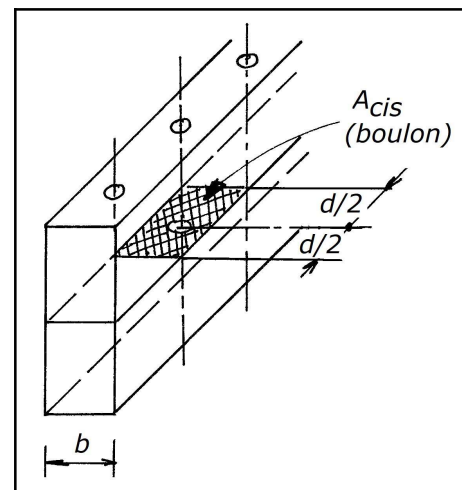


fig. 7.27. - Surface équivalente cisailée.

Application 7.3. Calculer les contraintes tangentielles existantes dans une poutrelle HE 200 B, sachant que dans la section la plus sollicitée, l'effort tangentiel est de 10 kN.

Solution :

Hypothèse

Dans le cas qui nous occupe, nous ne tiendrons pas compte des arrondis. Le "H" sera considéré comme 3 rectangles.

Données du catalogue

$$h = 200 \text{ mm}$$

$$b = 200 \text{ mm}$$

$$t_f = 15 \text{ mm}$$

$$t_w = 9 \text{ mm}$$

$$h_i = 170 \text{ mm}$$

$$b_1 = \frac{b - t_w}{2} = 95.5 \text{ mm}$$

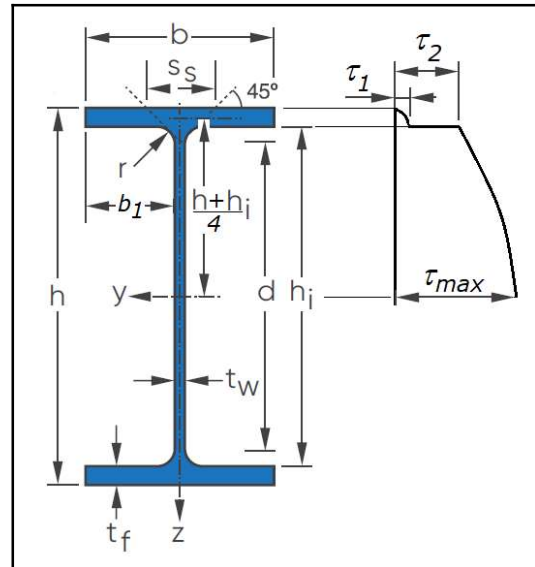


fig. 7.28. - Application 7.3.

Recherche de la contrainte à la jonction semelle-âme (dans la semelle)

Moment d'inertie par rapport à la fibre neutre :

$$I_{fn} = \frac{b h^3}{12} - \frac{2 b_1 h_i^3}{12}$$

Surface de la semelle :

$$A_{semelle} = b t_f$$

Distance entre le centre de gravité de la semelle et la fibre neutre :

$$\delta_1 = \frac{h + h_i}{4}$$

Moment statique de la semelle par rapport à la fibre neutre :

$$S_{fn} = A_{semelle} \delta_1 = (b t_f) \left(\frac{h + h_i}{4} \right)$$

Contrainte tangentielle :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{(b t_f) \left(\frac{h + h_i}{4} \right) V}{\left(\frac{b h^3}{12} - \frac{2 b_1 h_i^3}{12} \right) b} = \frac{3 V t_f (h + h_i)}{(b h^3 - 2 b_1 h_i^3)} \\ &= \frac{3 \times 10000 \times 15 \times (200 + 170)}{(200 \times 200^3 - 2 \times 95.5 \times 170^3)} = 0.25 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Recherche de la contrainte à la jonction semelle-âme (dans l'âme)

Dans les formule précédente, la seule variable qui change est la largeur de la bande envisagée.

Donc :

$$\tau_2 = \frac{b}{t_w} \tau_1 = \frac{200}{9} \times 0.25 = 5.56 \text{ N/mm}^2$$

Recherche de la contrainte maximale (à la fibre neutre)

Moment d'inertie par rapport à la fibre neutre :

$$I_{fn} = \frac{b h^3}{12} - \frac{2 b_1 h_i^3}{12}$$

Moment statique de la semelle par rapport à la fibre neutre :

$$S_{fn} = \left(\frac{b h}{2} \frac{h}{4} \right) - \left(\frac{2 b_1 h}{2} \frac{h_i}{4} \right) = \frac{b h^2}{8} - \frac{b_1 h_i^2}{4}$$

Contrainte tangentielle :

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \frac{\left(\frac{b h^2}{8} - \frac{b_1 h_i^2}{4} \right) V}{\left(\frac{b h^3}{12} - \frac{2 b_1 h_i^3}{12} \right) t_w} = \frac{3V \left(\frac{b h^2}{2} - b_1 h_i^2 \right)}{t_w (b h^3 - 2 b_1 h_i^3)} \\ &= \frac{3 \times 10000 \times \left(\frac{200}{2} \times 200^2 - 95.5 \times 170^2 \right)}{9 \times (200 \times 200^3 - 2 \times 95.5 \times 170^3)} = 6.25 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

7.4.2. Glissement transversal

L'objet de ce paragraphe est de rechercher la distribution des contraintes tangentielles (ou de cisaillement) agissant sur les facettes contenues dans une section droite.

On peut montrer que la *distribution des contraintes tangentielles* est telle que ces contraintes sont *nulles au bord supérieur et inférieur de la section* et *maximales vers le centre* (maximales au centre de gravité pour les sections symétriques (axe de symétrie perpendiculaire à la force)).

La formule permettant d'exprimer les contraintes tangentielles maximales τ_{max} pour les sections transversales de formes quelconques peut être formulée de la manière suivante :

$$\tau_{max} = k_{\tau} \frac{V}{A_{cis}} \quad (\text{éq. 7.95.}) \quad [N/mm^2]$$

<u>Notations</u> :	V	effort tranchant	N
	A_{cis}	surface de la section soumise à l'effort tranchant	mm^2
	k_{τ}	coefficient dépendant de la forme de la section	-

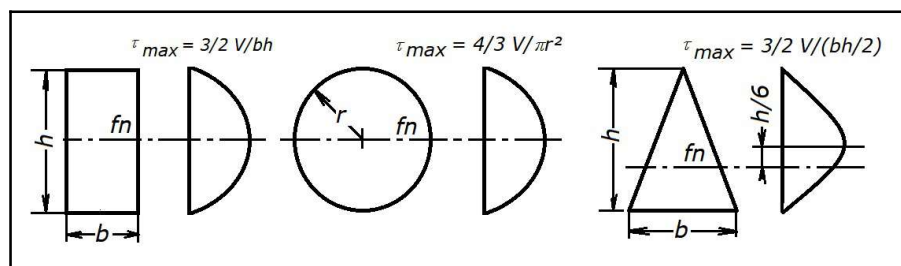


fig. 7.29. - Répartition des contraintes de cisaillement.

★ **Tableau des coefficients donnant la contrainte maximale au cisaillement en annexe** (Annexe 1 : Tableau 7.1. - Coefficient de forme - cisaillement.)

Remarque :

Dans certains cas il est difficile de calculer la contrainte maximale τ_{max} , on a alors recours à la contrainte tangentielle moyenne τ_{moy} . C'est-à-dire que l'on prend $k_{\tau} = 1$ dans la formule précédente. Exemple : dans le cas des **profils en "I", "U", "H" ou "L"**, nous avons :

$$\tau_{moy} = \frac{V}{A_{\hat{a}me}} \quad (\text{éq. 7.97.}) \quad [N/mm^2]$$

<u>Notations</u> :	$A_{\hat{a}me}$	uniquement la section de l'âme que l'on peut assimiler à :	mm^2
		1) pour un profilé normalisé : dans le catalogue : A_{Vz}	
		2) pour les autres : (hauteur du profilé - 2 × épaisseur semelle) × épaisseur de l'âme	

7.5. Choix de la forme de la section droite

7.5.1. En flexion

A) Cas des matériaux ductiles

Puisque les résistances à la traction et à la compression de ce type de matériaux sont du même ordre de grandeur, on a tout intérêt à utiliser des sections symétriques (par rapport à l'axe autour duquel s'effectue la flexion).

Afin de rendre le dimensionnement économique, il faudra, non seulement vérifier la condition de résistance :

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{f \max}|}{I/v} = \frac{|M_{f \max}|}{W_x} \leq \sigma_{adm} \quad (\text{éq. 7.98.})$$

Notation : σ_{\max} contrainte normale maximale. N/mm^2
(Pour un tronçon de pièce de section constante dans la section où le moment fléchissant est le plus important.)

mais aussi à veiller à réduire au minimum le poids de la barre.

Pour satisfaire cette double condition, il faut, à section égale, augmenter au maximum le module de résistance à la flexion. Pour ce faire, il est indispensable de rejeter la matière dans les zones les plus éloignées de l'axe neutre.

Pour comparer différentes sections, on a défini le rapport sans dimensions w_f :

$$w_f = \frac{W_x}{\sqrt{A^3}} \quad (\text{éq. 7.99.})$$

Notations : A surface de la section mm^2
 W_x module de résistance à la flexion mm^3

Ce rapport doit être aussi grand que possible (voir **Chapitre 6 : Torsion - Tableau 6.1.**). Il en ressort que les **profilés en "I" sont particulièrement économiques**, ce qui explique l'usage fréquent de ce type de sections en construction métallique.

B) Cas des matériaux fragiles

Dans ce cas il faut vérifier que la contrainte maximum est inférieure, non seulement à la contrainte admissible de compression du matériau, mais aussi que la contrainte maximum soit inférieure à la contrainte de traction du matériau.

Vu le comportement différent de ces matériaux à la traction et à la compression, la forme de la section droite sera non symétrique si l'on souhaite un dimensionnement économique.

On peut par exemple choisir des profils "I" dissymétriques ou des profils "T". Les dimensions de l'(des) aile(s) seront telles que les distances de la ligne neutre aux fibres supérieures et inférieures de la barre soient dans le même rapport que la contrainte admissible en traction et en compression (prises en valeur absolue) du matériau utilisé.

7.5.2. En cisaillement

En général, dans une section droite les contraintes longitudinales σ sont maximales aux points où les contraintes tangentielles τ sont nulles, inversement σ est maximal aux points pour lesquels τ est nul.

De plus, dans la plupart des cas, on constate que les contraintes tangentielles sont plus faibles que les contraintes normales. Dès lors, les contraintes maximales apparaîtront le plus souvent dans la section droite soumise aux moments fléchissants les plus importants. C'est seulement dans le cas de pièces de faibles longueurs que les contraintes tangentielles seront du même ordre de grandeur (ou supérieures) que les contraintes normales (voir chapitre "Cisaillement").

Classiquement, **le calcul de la résistance d'une pièce soumise à flexion simple** se fera en **considérant séparément** l'action des contraintes normales σ et tangentielles τ .

On vérifiera donc, en plus de la condition donnée par l'équation (éq. 7.98), la condition :

$$\tau_{\max} = k_{\tau} \frac{V}{A_{\text{cis}}} \leq \tau_{\text{adm cis}} \quad (\text{éq. 7.100.})$$

Notation : τ_{\max} contrainte tangentielle maximale. N/mm^2
(Pour un tronçon de pièce de section constante dans la section où l'effort tranchant est le plus important.)

Il faut remarquer que cette méthode ne tient pas compte de l'état réel des contraintes en un point caractérisé par (σ, τ) (voir chapitre "Sollicitations composées").

7.5.3. Section(s) dangereuse(s) d'une poutre

Par définition, et en toute généralité, une section de poutre est dite "dangereuse" lorsque les moments fléchissants et les efforts tranchants qui y agissent ont des valeurs telles que la matière de cette section est plus sollicitée qu'en toute autre section de la même poutre.

Selon cette définition, il est donc certain que sont "dangereuses" les sections qui "souffrent" le plus.

Dans la pratique, c'est le moment fléchissant qui détermine, et de loin, la sollicitation principale de la matière d'une poutre fléchie. D'où la règle générale :

Section dangereuse pour une poutre en acier ou en bois :
celle où agit le moment fléchissant, absolu, maximum.

Sections dangereuses pour une poutre en béton :
celles où agissent le moment fléchissant positif (traction) et négatif (compression) maximum.

7.6. Contraintes admissibles

7.6.1. En flexion

La flexion engendre des contraintes normales de traction et de compression. Dès lors, pour les contraintes admissibles on se reportera au chapitre “Traction - Compression”.

- 1) Dans le cas d'un **matériau ductile**, la contrainte admissible σ_{adm} en flexion est obtenue en tenant compte d'un coefficient de sécurité S par rapport à la limite d'élasticité R_e :

$$\sigma_{adm} = \frac{R_e}{S} \quad (\text{éq. 7.101.})$$

- 2) Si le **matériau** est **fragile**, la contrainte admissible σ_{adm} se déterminera à partir de la résistance à la rupture R_m et non plus à partir de R_e :

$$\sigma_{adm} = \frac{R_m}{S} \quad (\text{éq. 7.102.})$$

7.6.2. En cisaillement

La flexion engendre des contraintes tangentielles (de cisaillement). Dès lors, pour les contraintes admissibles on se reportera au chapitre “Torsion”.

- 1) Dans le cas d'un **matériau ductile**, la contrainte tangentielle admissible en cisaillement τ_{adm} est obtenue en tenant compte d'un coefficient de sécurité S par rapport à la limite d'élasticité en cisaillement τ_e , sachant que :

$$\tau_e = (0.5) \dots 0.577 \dots (0.6) R_e$$

nous prendrons :

$$\tau_{adm} = 0.58 \frac{R_e}{S} \quad (\text{éq. 7.104.})$$

- 2) Si le **matériau** est **fragile**, la contrainte tangentielle admissible τ_{adm} se déterminera à partir de la résistance à la rupture R_m et non plus à partir de τ_e :

$$\tau_{adm} = \frac{R_m}{S} \quad (\text{éq. 7.105.})$$

Remarque :

Dans le cas de poutrelles et de poutres “longues”, les contraintes de cisaillement seront toujours négligeables par rapport aux contraintes de flexion.

Application 7.4. Cas de la poutre encastrée à une extrémité (*Une seule charge à l'extrémité*)
 Rechercher le moment fléchissant maximum afin de dimensionner cette poutrelle IPN, en S235, sachant que : $l = 3 \text{ m}$; $Q = 10 \text{ kN}$; $\sigma_{adm} = 100 \text{ N/mm}^2$.

Solution :

Recherche des réactions d'appuis

L'équilibre suivant la verticale donne :

$$R_A = Q = 10000 \text{ N}$$

Recherche des moments fléchissants

L'équilibre de rotation autour de A donne :

$$M_{fA} = -Ql = -30000 \text{ Nm}$$

$$\Rightarrow |M_{fA}| = 30000 \text{ Nm}$$

Le moment fléchissant maximum se trouve au droit de l'encastrement.

(Voir aussi *Annexe 3* cas j1)

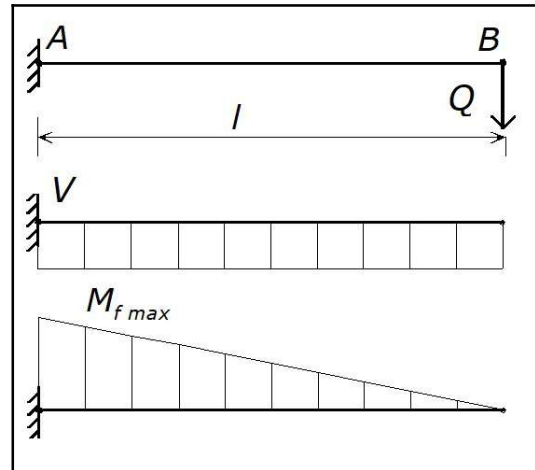


fig. 7.30. - Application 7.4. Solution.

Calcul du module de flexion minimum

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{f \max}|}{I/v} = \frac{|M_{f \max}|}{W_x} \leq \sigma_{adm}$$

$$\Rightarrow W_x \geq \frac{|M_{f \max}|}{\sigma_{adm}}$$

$$W_x \geq \frac{|M_{f \max}|}{\sigma_{adm}} = \frac{30000 \cdot 10^3}{100} = 300000 \text{ mm}^3 = 300 \text{ cm}^3$$

Dans un catalogue de poutrelles nous avons un IPN 240 au minimum ($W_x = 354 \text{ cm}^3$)

Vérification de la contrainte de cisaillement

Dans le catalogue, on trouve pour un IPN 240 :

$$A_{Vz} = 22.33 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$$

$$\tau_{\text{moy}} = \frac{V}{A_{\hat{a}me}} = \frac{10000}{22.33 \cdot 10^3} = 4.5 \text{ N/mm}^2$$

$$\Rightarrow \text{négligeable car } \leq 0.58 \times 100 = 58 \text{ N/mm}^2$$

Application 7.5. Cas de la poutre encastrée à une extrémité (Charge uniformément répartie sur une partie de poutrelle)

Rechercher le moment fléchissant maximum afin de dimensionner cette poutrelle HEB en S235, à âme verticale sachant que :

$l = 3 \text{ m}$ distance du centre de gravité de la charge à l'appui.

$l_p = 1.5 \text{ m}$ longueur de la partie chargée.

$q = 10 \text{ kN/m}$ charge par mètre courant.

$\sigma_{adm} = 100 \text{ N/mm}^2$ contrainte admissible

Solution :

Recherche des réactions d'appuis

L'équilibre suivant la verticale donne :

$$R_A = q l_p = 15000 \text{ N}$$

Recherche des moments fléchissants

Equilibre de rotation autour de A :

$$M_{fA} = -(q l_p) l = -45000 \text{ Nm}$$

$$\Rightarrow |M_{fA}| = 45000 \text{ Nm}$$

Le moment fléchissant maximum se trouve au droit de l'encastrement.

(Voir aussi *Annexe 3 cas i2*)

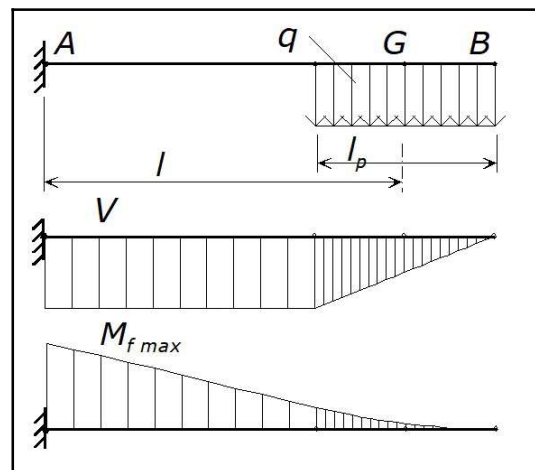


fig. 7.31. - Application 7.5. Solution.

Calcul du module de flexion minimum

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{f \max}|}{I/v} = \frac{|M_{f \max}|}{W_x} \leq \sigma_{adm}$$

$$\Rightarrow W_x \geq \frac{|M_{f \max}|}{\sigma_{adm}}$$

$$W_x \geq \frac{|M_{f \max}|}{\sigma_{adm}} = \frac{45000 \cdot 10^3}{100} = 450000 \text{ mm}^3 = 450 \text{ cm}^3$$

Dans un catalogue de poutrelles nous avons un HEB 200 au minimum ($W_x = 570 \text{ cm}^3$)

Vérification de la contrainte de cisaillement

Dans le catalogue, on trouve pour un HEB 200 :

$$A_{vz} = 24.83 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$$

$$\tau_{\text{moy}} = \frac{V}{A_{\hat{a}me}} = \frac{15000}{24.83 \cdot 10^3} = 6.6 \text{ N/mm}^2$$

$$\Rightarrow \text{négligeable car } \leq 0.58 \times 100 = 58 \text{ N/mm}^2$$

Application 7.6. Un mur de retenue d'un massif de terres est, constitué par des planches de 20 cm de large s'appuyant sur des pieux verticaux distants de 1.2 m. La pression du terrain varie linéairement de 5 kN/m² à 18 kN/m². La hauteur du mur est de 1.5 m. En considérant les planches comme des poutres sur deux appuis de longueur $l = 1.2$ m de portée, calculer l'épaisseur e à donner à ces planches. Quel diamètre d faut-il choisir pour les pieux ? (Contrainte admissible en flexion : 1000 N/cm²).

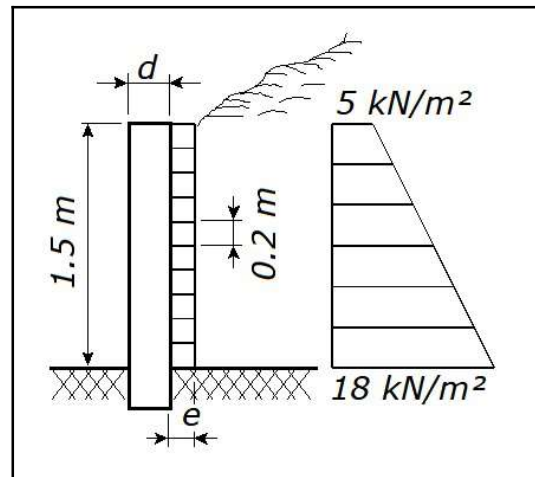


fig. 7.32. - Application 7.6.

Solution :

Commentaires

La planche la plus chargée est celle qui se trouve soumise à la pression maximale des terres, soit celle du bas.

C'est donc une poutre, sur 2 appuis, soumise à une charge répartie.

Hypothèse : la pression de 18 kN/m² s'exerce sur toute la hauteur de 0.2 m de la planche, on se place du côté de la sécurité.

Moment fléchissant maximum

Dans l'Annexe 3 cas a1 on trouve pour une charge répartie sur 2 appuis :

$$M_{f \max} = \frac{q l^2}{8}$$

Comme nous avons une charge surfacique p_s , il faut la transformer en charge linéique q (voir : § 7.8.2.). Soit :

$$p = q \times \text{largeur planche} = 18 \times 0.2 = 3.6 \text{ kN/m}$$

D'où :

$$M_{f \max} = \frac{3.6 \cdot 10^3 \times 1.2^2}{8} = 648 \text{ Nm}$$

Recherche de la contrainte maximale

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{f \max}}{I/v} \leq \sigma_{adm}$$

avec : $I/v = \frac{\text{largeur planche} \times e^2}{6}$

$$\Rightarrow e = \sqrt{\frac{6 M_{f \max}}{\sigma_{adm} \times (\text{largeur planche})}} = \sqrt{\frac{6 \times 648}{10 \cdot 10^6 \times 0.2}} = 44.1 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 44.1 \text{ mm}$$

On prendra donc la largeur normalisée supérieure, soit 63 mm.

Recherche du diamètre des pieux

???A faire

7.7. Déformation de flexion des poutres isostatiques

7.7.1. Origine de la déformation - Equation de l'élastique

Nous avons déjà une image de la poutre déformée; ce n'est pas suffisant et nous proposons de déterminer l'équation de la courbe ou déformée, ou *ligne élastique* de l'axe de la poutre.

Il s'agit là d'un problème important car, le système d'axes Oxy étant défini (voir figure ci-dessous), la connaissance de l'équation $y = f(x)$ de la déformée nous permettra de calculer, pour une valeur quelconque de x , la valeur de la *flèche* y de la poutre.

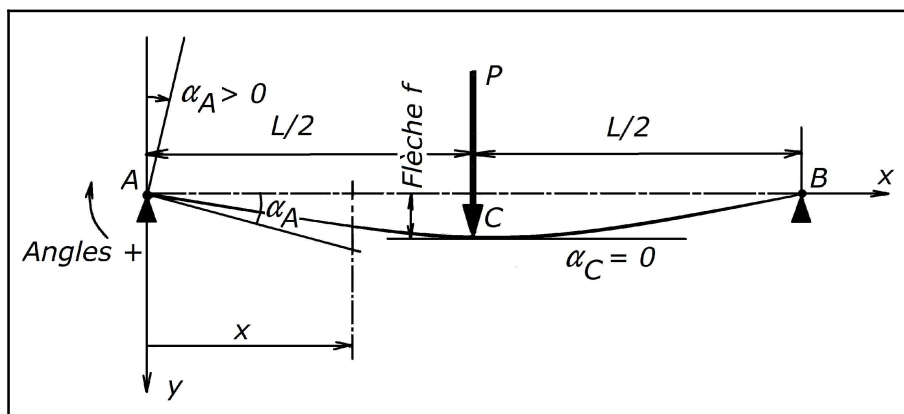


fig. 7.33. - Déformation - Flèche.

Les éléments de réduction M_f et V , via les contraintes σ et τ qu'ils provoquent respectivement, sont évidemment responsables de la déformation d'une poutre fléchie. Dans la majorité des cas cependant, les déformations dues au cisaillement V sont négligeables devant celles dues à la flexion M_f comme on peut le démontrer en théorie, à telle enseigne que les expressions de la déformation ne contiendront plus que le moment de flexion M_f .

7.7.2. Calcul de la flèche en un point : "Méthode différentielle"

On peut montrer en géométrie que la dérivée seconde y'' d'une fonction $y = f(x)$ est approximativement égale à :

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

Avec : $y' = \tan \alpha$ (tangente à la déformée)

Si les déplacements sont petits (dans le cas des rayons de courbure ρ grands), la tangente de l'angle α formé par la tangente à la déformée et l'axe x est très petite. On peut dès lors négliger y'^2 devant 1 et poser :

$$y'' \approx 1/\rho$$

Cette condition est (quasi) toujours satisfaite en résistance des matériaux car les déformations sont faibles (voir 2.2. *Hypothèses générales de la résistance des matériaux*), donc :

L'équation différentielle de la ligne déformée d'une poutre fléchie, s'écrit alors (éq. 7.289) :

$$y'' \approx - \frac{M_f(x)}{E I} \quad (\text{éq. 7.133.})$$

<u>Notations</u> :	$M_f(x)$	moment fléchissant à l'abscisse x	Nmm
	E	module de Young	N/mm^2
	I	moment d'inertie de la section	mm^4
	y''	dérivée seconde du déplacement en y	$1/mm$

Remarque :

On introduit un signe “-” dans l'équation éq. 7.289. afin d'avoir une flèche positive vers le bas.

Par double intégration de l'équation de l'élastique, on obtient la fonction $y(x)$, c'est-à-dire la variation du déplacement vertical y de la poutre en fonction de x .

Alors qu'avant déformation, toutes les sections étaient verticales, après déformation, chaque section a en outre basculé d'un très petit angle α appelé *angle de rotation de la section droite*, variable avec la position x de la section considérée (voir fig. 7.34.). α étant compté positivement dans le sens horlogique, par convention.

La fonction $\alpha(x)$ peut être obtenue par simple intégration de l'équation de l'élastique. En fait, pour être tout-à-fait juste, l'intégration donnera la fonction $\tan(\alpha)(x)$, mais comme en résistance des matériaux, la déformation angulaire est faible, on pourra assimiler cette tangente à l'angle. D'où :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan(\alpha) \approx \alpha$$

Une seconde intégration nous donnera l'équation de l'élastique. Il existe une valeur maximale de $y(x)$, celle-ci est appelée *flèche f* prise par la poutre; c'est bien sûr à elle que l'on s'intéressera surtout.

Après la double intégration de l'équation éq. 7.133. on trouvera une formule du style :

$$y(x) = C \frac{M_f(x) l^2}{E I}$$

<u>Notations</u> :	C	constante	-
	l	longueur de la poutre	mm
	$E I$	module de rigidité à la flexion	Nmm^2

De cette expression générale, on en déduit que la flèche est :

- *proportionnelle au moment fléchissant*, c'est-à-dire à la charge et à la longueur de la poutre;
- fonction de la *longueur* au carré, en fait *au cube* le moment fléchissant est fonction aussi de la longueur l . D'où *l'influence considérable de la portée* sur la valeur de la flèche;
- *inversement proportionnelle au module de rigidité de la poutre*. Pour diminuer la flèche il faut augmenter ce module, augmenter la limite élastique du matériaux (résistance) ne sert à rien.

Enfin, l'équation de l'élastique nous apprend que, dans toute zone longitudinale de la poutre où $M_f = 0$, la ligne déformée est une droite.

Application 7.7. Calculez la flèche maximale d'une poutre sur 2 appuis d'extrémité soumise à une charge uniformément répartie p constante sur toute la longueur l .

Solution :

Recherche du moment fléchissant

Une coupure en x , dans le diagramme des efforts tranchants, nous donne :

$$M_{f_x} = R_A x - (q x) \frac{x}{2}$$

Avec :

$$R_A = \frac{q l}{2}$$

$$\Rightarrow M_{f_x} = \frac{q}{2} (l x - x^2)$$

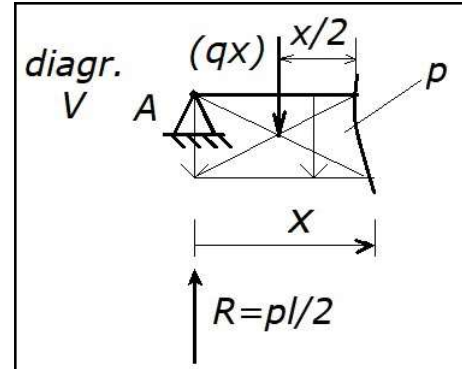


fig. 7.34. - Recherche du moment fléchissant en x .

Equation différentielle de l'élastique

L'équation **éq. 7.133.** devient :

$$y''(x) = -\frac{M_f}{E I} = \frac{q}{2 E I} (x^2 - l x)$$

Première intégration : équation de l'angle α

$$y'(x) = \int \frac{q}{2 E I} (x^2 - l x) dx = \frac{q}{2 E I} \left(\frac{x^3}{3} - l \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

Seconde intégration : équation de la déformée

$$y(x) = \int \left[\frac{q}{2 E I} \left(\frac{x^3}{3} - l \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \right] dx = \frac{q}{2 E I} \left(\frac{x^4}{12} - l \frac{x^3}{6} + C_1 x \right) + C_2 \text{ (éq. 7.143.)}$$

Recherche des constantes d'intégration

Les 2 constantes d'intégration C_1 et C_2 sont déterminées par les conditions aux limites qui imposent un déplacement vertical y nul aux appuis :

- à l'appui de gauche : $x = 0$ et $y = 0$
d'où, en remplaçant dans l'équation **éq. 7.143.** : $C_1 = 0$
- à l'appui de droite : $x = l$ et $y = 0$

d'où, en remplaçant dans l'équation **éq. 7.143.** : $C_2 = -\frac{q l^3}{24 E I}$

Equation de la déformée

L'équation de la déformée peut à présent s'écrire :

$$y(x) = \frac{q}{24 E I} (x^4 - 2 l x^3 + l^3 x)$$

ce qui permet de trouver le déplacement vertical de toutes sections de la poutre, repérée par son abscisse x .

Equation de l'angle de rotation

L'équation de l'angle φ devient :

$$\alpha(x) = y'(x) = \frac{q}{24 E I} (4 x^3 - 6 l x^2 + l^3)$$

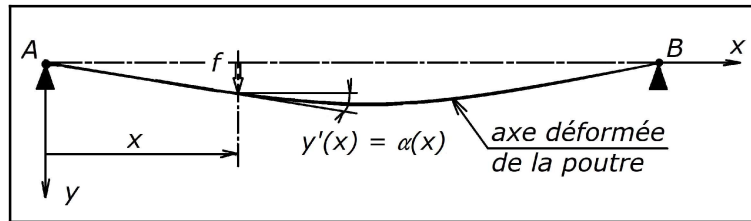


fig. 7.35. - Déformée - Flèche - Angle de déformation.

Flèche

La symétrie (et l'intuition) nous permettent d'affirmer que la flèche (déformation maximale) se produit à mi-portée ($x = l/2$) et vaut :

$$f = y(x)_{\max} = y(x)_{x=l/2} = \frac{q}{24 E I} \left(\frac{l^4}{16} - 2 l \frac{l^3}{8} + l^3 \frac{l}{2} \right)$$

$$\Rightarrow f = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{E I}$$

Remarque

On remarquera que, à l'endroit où se produit la flèche, la section n'a pas tourné ($\alpha = 0$ pour $x = l/2$), ce qui est logique au point de vue géométrique, étant donné la symétrie du système.

En revanche, φ est maximum aux appuis et vaut :

$$\alpha_A = -\alpha_B = \frac{q l^3}{24 E I}$$

7.7.3. Calcul de la flèche en un point : “Méthode des aires”

Une manière relativement simple de trouver la flèche en un point P d’une poutre isostatique soumise à flexion est de partir du diagramme des moments fléchissants.

A) Théorie

A.1) Poutre encastrées

La flèche en un point P est donnée par le moment par rapport à ce point P de la surface du diagramme des moments fléchissants se situant entre l’encastrement et le point P considéré le tout divisé par le module de rigidité à la flexion EI .

En d’autres termes, la flèche au point P s’exprime par la relation suivante :

$$f_P = \frac{1}{EI} \sum A_{M_{fi}} d_{vi} \quad (\text{éq. 7.158.})$$

<u>Notations</u> :	E	module d’élasticité longitudinale	N/mm^2
	I	moment d’inertie de la section	mm^4
	$A_{M_{fi}}$	aire du diagramme des moments fléchissants situés entre l’encastrement et le point P	mm^2
	d_{vi}	distance du centre de gravité de la surface du diagramme des M_f à l’endroit de la recherche de la flèche.	mm

A.2) Poutre sur appuis

La flèche en un point P est donnée par le moment par rapport à ce point P de la surface du diagramme des moments fléchissants se situant entre l’appuis et le point P considéré, augmenter du moment de la réaction R , due au chargement par la moment fléchissant, au point P , le tout divisé par le module de rigidité à la flexion EI .

En d’autres termes :

$$f_P = \frac{1}{EI} \left(R d - \sum A_{M_{fi}} d_{vi} \right) \quad (\text{éq. 7.159.})$$

<u>Notations</u> :	E	module d’élasticité longitudinale	N/mm^2
	I	moment d’inertie de la section	mm^4
	$A_{M_{fi}}$	aire du diagramme des moments fléchissants situés entre l’encastrement et le point P	mm^2
	d_{vi}	distance du centre de gravité de la surface du diagramme des M_f à l’endroit de la recherche de la flèche.	mm
	R	réaction d’appuis due au chargement du moment fléchissant	N
	d	distance entre l’appui et le point P	mm

Dans le cas d'une poutre sur appuis, il faut tenir compte du moment dû à la réaction d'appui, car il existe une déviation angulaire au droit de l'appui qui induit une flèche. Ce n'est pas le cas d'un encastrement où, au droit de celui-ci, la déviation angulaire est nulle.

B) Exemples

B.1.) Poutres encastrées

B.1.1) Charge à l'extrémité (f_{max} à l'extrémité de la poutre)

Appliquons la formule de base :

$$f_B = \frac{1}{EI} \sum A_{Mf_i} d_{v_i} = \frac{1}{EI} A_{Mf} d_v$$

La surface du diagramme des M_f entre A et B est :

$$A_{Mf} = \frac{(Ql)l}{2} = \frac{Ql^2}{2}$$

(M_f est - \Rightarrow prendre +)

La distance du centre de gravité de la surface des M_f à l'extrémité B est :

$$d_v = \frac{2}{3}l$$

La flèche devient :

$$f_B = \frac{1}{EI} \left(\underbrace{\frac{Ql^2}{2}}_A \times \underbrace{\frac{2}{3}l}_{d_v} \right)$$

$$\Rightarrow f_{B \max} = \frac{1}{3} \frac{Ql^3}{EI} \quad (\text{éq. 7.164.})$$

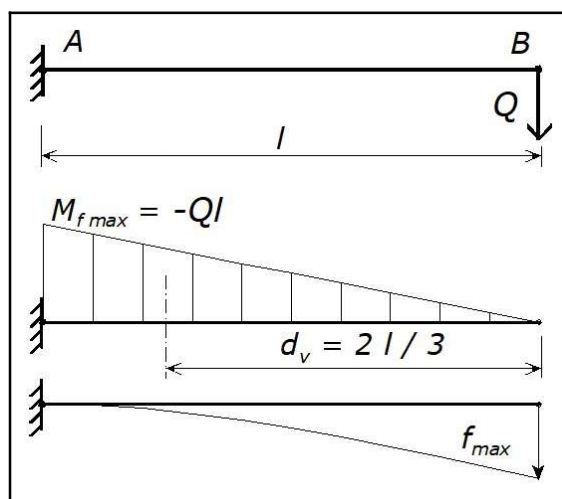


fig. 7.36. - Charge concentrée à l'extrémité d'une poutre encastree.

B.1.2) Charge répartie (f_{max} à l'extrémité de la poutre)

Appliquons la formule de base :

$$f_B = \frac{1}{EI} \sum A_{Mf_i} d_{v_i} = \frac{1}{EI} A_{Mf} d_v$$

Soit p la charge répartie en N/m.

La surface du diagramme des M_f entre A et B est :

$$A_{Mf} = \frac{1}{3} \text{rectangle} = \frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} l = \frac{ql^3}{6}$$

(M_f est - \Rightarrow prendre +)

La distance du centre de gravité de la surface des M_f à l'extrémité B est :

$$d_v = \frac{3}{4}l$$

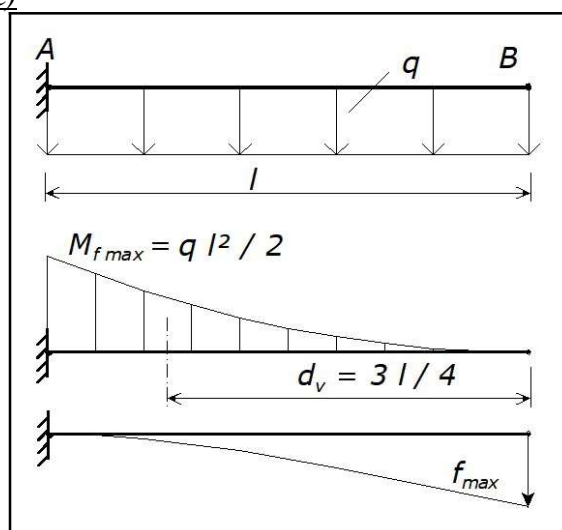


fig. 7.37. - Poutre à encorbellement et charge répartie.

La flèche devient :

$$f_B = \frac{1}{EI} \left(\underbrace{\frac{ql^3}{6}}_A \times \underbrace{\frac{3}{4}l}_{d_v} \right)$$

$$\Rightarrow f_{B \max} = \frac{1}{8} \frac{ql^4}{EI} \quad (\text{éq. 7.169.})$$

B.2) Poutres sur appuis

B.2.1) Charge ponctuelle au milieu de la portée (f_{\max} au centre)

Appliquons la formule de base :

$$f_M = \frac{1}{EI} \sum A_{Mf_i} d_{v_i} = \frac{1}{EI} A_{Mf} d_v$$

La surface du diagramme des M_f entre A et C est :

$$A_{Mf} = \frac{1}{2} \left(\frac{Ql}{4} \frac{l}{2} \right) = \frac{Ql^2}{16}$$

La distance du centre de gravité de la surface des M_f au point C est :

$$d_v = \frac{1}{3} \frac{l}{2} = \frac{l}{6}$$

Recherche de R :

$$R = \left(\frac{Ql}{4} \frac{l}{2} \right) = \frac{Ql^2}{16}$$

La flèche devient :

$$f_M = \frac{1}{EI} \left(\frac{Ql^2}{16} \times \frac{l}{2} - \frac{Ql^2}{16} \times \frac{l}{6} \right)$$

$$\Rightarrow f_{M \max} = \frac{1}{48} \frac{Ql^3}{EI} \quad (\text{éq. 7.175.})$$

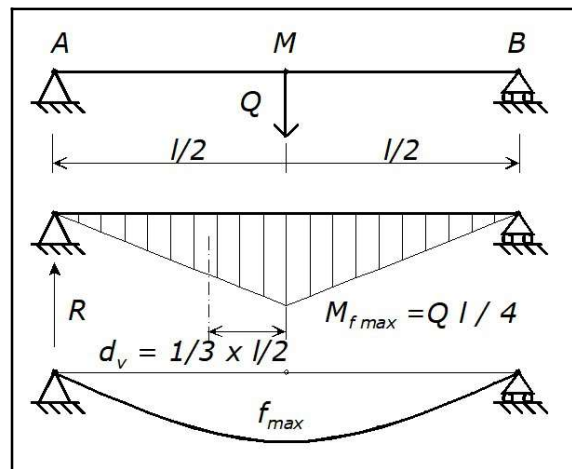


fig. 7.38. - Poutre sur 2 appuis avec charge ponctuelle au centre.

B.2.2) Charge répartie (f_{max} au centre de la poutre)

Appliquons la formule de base :

$$f_M = \frac{1}{EI} \sum A_{Mf_i} d_{vi} = \frac{1}{EI} A_{Mf} d_v$$

La surface du diagramme des M_f entre A et C est :

$$A_{Mf} = \frac{2}{3} \text{rectangle} = \frac{2}{3} \frac{q l^2}{8} \frac{l}{2} = \frac{q l^3}{24}$$

La distance du centre de gravité de la surface des M_f au point C est :

$$d_v = \frac{3}{8} \frac{l}{2} = \frac{3}{16} l$$

Recherche de R :

$$R = \left(\frac{2}{3} \frac{q l^2}{8} \frac{1}{2} \right) = \frac{q l^3}{24}$$

La flèche devient :

$$f_M = \frac{1}{EI} \left(\frac{q l^3}{24} \times \frac{l}{2} - \frac{q l^3}{24} \times \frac{3}{16} l \right)$$

$$\Rightarrow f_{M \max} = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI} \text{ (éq. 7.181.)}$$

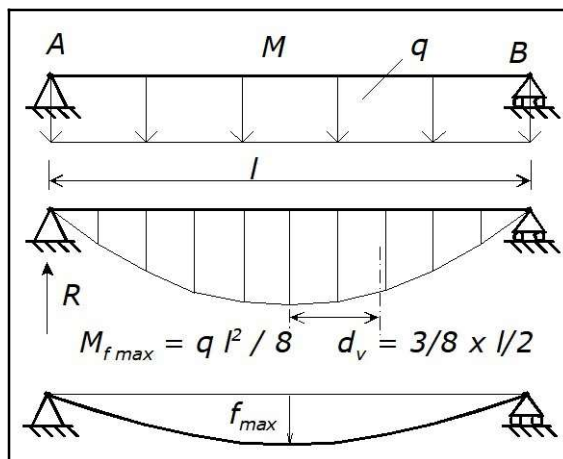
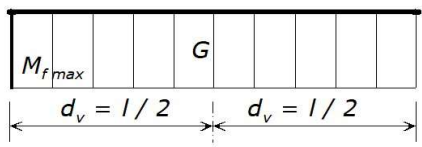
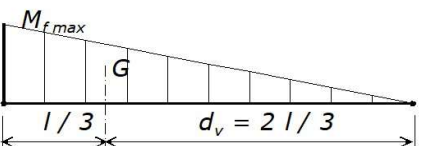
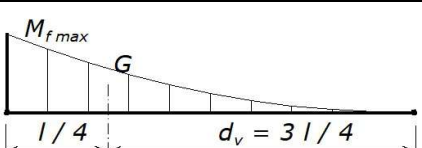
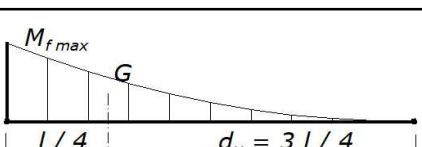


fig. 7.39. - Poutre sur 2 appuis avec charge répartie.

C) Récapitulatif - Résumé

<i>Diagramme des moments fléchissants</i>	<i>Surface A_{Mfi}</i>	<i>Distance d_{vi}</i>
	$M_{f \max} \times l$	$\frac{1}{2} l$
	$\frac{1}{2} (M_{f \max} \times l)$	$\left(\frac{1}{3} \text{ ou } \frac{2}{3}\right) l$
	$\frac{1}{3} (M_{f \max} \times l)$	$\left(\frac{1}{4} \text{ ou } \frac{3}{4}\right) l$
	$\frac{2}{3} (M_{f \max} \times l)$	$\left(\frac{3}{8} \text{ ou } \frac{5}{8}\right) l$

7.7.4. Flèche admissible

Dans le cas de constructions métalliques ou de charpentes (bois ou métal) le calcul à la déformation maximum devient prépondérant par rapport au calcul à la contrainte admissible. C'est pourquoi il convient dans ces cas-là de vérifier que :

$$f_{\max} \leq f_{adm} \quad \text{(éq. 7.190.)}$$

Ci-dessous quelques exemples de flèches admissibles rapportées à la portée l de la poutre (entre appuis).

★ **Tableau des coefficients donnant les flèches admissibles pour différents cas en annexe**
(Annexe 1 : Tableau 7.2. - Valeurs limites recommandées pour les flèches verticales.)

Application 7.8. Une digue en bois (chêne), d'une hauteur $h = 5\text{ m}$, est constituée de poutres verticales \overline{AB} , d'épaisseur $e = 30\text{ cm}$, qui sont simplement appuyées au sommet et au pied comme le montre la figure ci-contre. Déterminer la contrainte maximum de flexion dans ces poutres. Quel sera alors la flèche maximale prise par ces poutres ?

$$(E_{\text{chêne}} = 10000\text{ N/mm}^2)$$

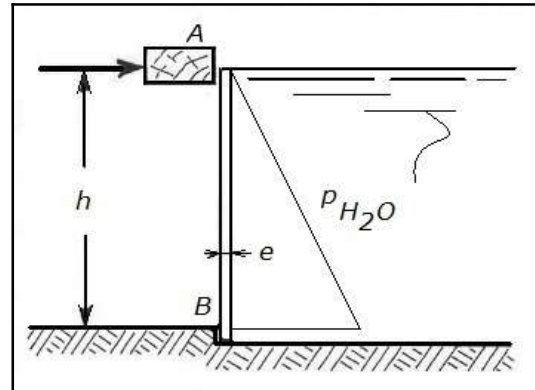


fig. 7.44. - Application 7.8.

Solution :

Type de charge

Comme la pression est fonction de la profondeur, le type de charge, qui s'exerce sur la poutre, est une *charge triangulaire*, avec le maximum en B et nulle en A.

Valeur de la charge répartie maximale (en B) :

$$p = \rho g h = 1000 \times 9.81 \times 5 = 49.05 \cdot 10^3\text{ Pa} = p_s$$

Si l , exprimée en m , est la largeur d'une planche (inconnu), nous avons :

$$q = p_s l = (49.05 \cdot 10^3 \times l)\text{ N/m}$$

Moment fléchissant maximum

Dans l'*Annexe 3* cas **a5** on trouve, pour une charge répartie de manière triangulaire sur 2 appuis, sachant qu'ici la longueur de la planche est h :

$$M_{f\text{ max}} = \frac{q h^2}{9\sqrt{3}} = \frac{(49.05 \cdot 10^3 l) \times 5^2}{9\sqrt{3}} = 7.887 \cdot 10^4 l\text{ Nm}$$

Recherche de la contrainte maximale

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{f\text{ max}}}{I/v}$$

Recherche du module d'inertie

$$I/v = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}^2}{6} = \frac{l \times e^2}{6} = \frac{l \times 0.3^2}{6}\text{ m}^3$$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{(7.887 \cdot 10^3 \times l)}{l \times 0.3^2} \times 6 = 5.26 \cdot 10^6\text{ N/m}^2 = 5.26\text{ N/mm}^2$$

Flèche maximale

Dans l'*Annexe 3* cas **a5**, pour une charge répartie de manière triangulaire sur 2 appuis, :

$$f_{\text{max}} = \frac{q h^4}{153.2 E I}$$

Si nous considérons des poutres en chêne, $E_{\text{chêne}} = 11000\text{ N/mm}^2$ et sachant que :

$$I = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}^3}{12}$$

On obtient :

$$f_{\max} = \frac{49.05 \cdot 10^3 \cdot l \times 5^4}{153.2 \times 11000 \cdot 10^6} \times \frac{12}{(l \times 0.3^3)} = 8.085 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx 8.1 \text{ mm}$$

Cet flèche est-elle admissible (si on prend le cas des poutres en général) ?

$$f_{\text{adm}} = \frac{l}{250} = \frac{5000}{250} = 20 \text{ mm} > 8.1 \text{ mm} \quad \text{OK}$$

Vérification au cisaillement

Dans l'**Annexe 3** cas **a5**, pour une charge répartie de manière triangulaire sur 2 appuis, :

$$V_{B \max} = \frac{q h}{3} = \frac{(49.05 \cdot 10^3 \cdot l) \times 5}{3} = 8.175 \cdot 10^4 \cdot l \text{ N}$$

La section cisailée étant :

$$A_{\text{cis}} = e l = 0.3 \cdot l \text{ m}^2$$

la contrainte de cisaillement maximale devient :

$$\tau_{\max} = \frac{V_{B \max}}{A_{\text{cis}}} = \frac{8.175 \cdot 10^4 \cdot l}{0.3 \cdot l} = 2.725 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \approx 0.27 \text{ N/mm}^2$$

Négligeable.

7.8. Applications

7.8.1. Calcul d'une poutre en flexion suivant l'EUROCODE

{Réf. 13, 14}

A) Principe de vérification

Une poutre horizontale supportant des charges appliquées verticalement travaille à la flexion. La capacité de résistance de la poutre à cette sollicitation dépend :

- ▶ de sa résistance propre, définie par certaines caractéristiques de sa section (I et W) et la portée (l);
- ▶ et d'éléments extérieurs qui sont les conditions de chargement et conditions d'appuis (charges réparties et/ou ponctuelles).

Pour rappel, comme nous l'avons vu précédemment, sous l'action des charges, la poutre fléchit en prenant une flèche f . La partie supérieure de la poutre est comprimée, la partie inférieure tendue. La résistance de la poutre aux efforts de flexion sera d'autant plus grande que la matière constituant cette poutre sera éloignée de l'axe passant par le centre de gravité (un madrier placé sur chant a un comportement à la flexion très supérieur à celui obtenu en le plaçant à plat).

On doit s'assurer que la poutre supportera la charge demandée : c'est la condition de résistance, mise en évidence par la vérification de l'état limite ultime (ELU), c'est-à-dire par rapport à la limite élastique f_y (R_e) ou, pour les matériaux fragiles par rapport à f_u (R_m).

On doit s'assurer également que la poutre ne fléchira pas suffisamment pour apporter des désordres dans la construction : c'est la vérification de l'état limite de service (ELS), c'est-à-dire par rapport à la flèche admissible f_{adm} .

B) Vérifications aux ELU

L'Eurocode 3 introduit une classification (classe 1 à 4) des sections en fonction de la minceur des parois qui les composent. Cette classification permet de savoir, au vu de critères simples, si la section peut être vérifiée par rapport à sa résistance plastique, ou à sa résistance élastique, ou si la minceur de ses parois est telle que le voilement local peut limiter la résistance de la section à une valeur inférieure à la résistance élastique.

Les sections de classe 1 ou 2 sont vérifiées par rapport à leur résistance plastique. Les sections de classe 3 sont vérifiées par rapport à leur résistance élastique. Quant aux sections de classe 4, il est nécessaire de procéder à une vérification spécifique prenant en compte les effets du voilement local (**fig. 7.45.**).

Pour simplifier les calculs mais tout en restant en sécurité, il convient par la suite que les vérifications aux ELU soient faites en considérant seulement le domaine élastique. L'état limite ultime est donc gouverné par l'atteinte de la limite d'élasticité dans la fibre la plus sollicitée, la résistance en flexion de la section s'identifie au moment élastique $M_{el, Rd}$.

Concernant les profils formés à froid (à parois minces) qui sont en grande partie de classe 4, les vérifications seront faites conformément aux spécifications de l'Eurocode 3.

Pour les profilés, leurs différentes classes sont indiquées dans les catalogues (ACELOR notamment).

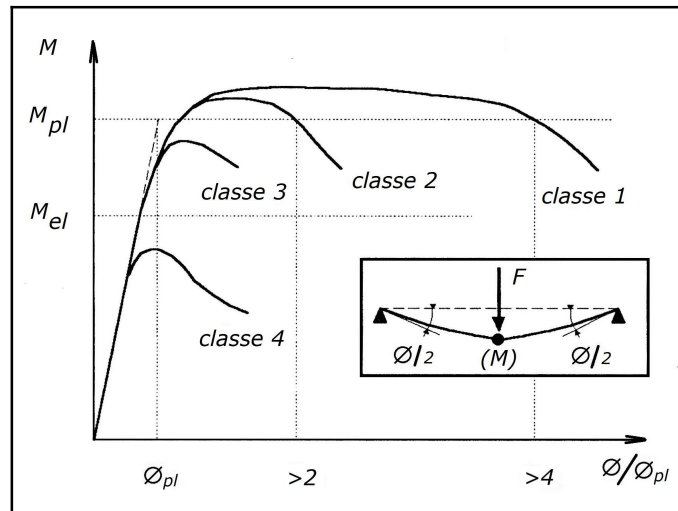


fig. 7.45. - Schéma de comportement d'une section fléchie.

Moment fléchissant

Il convient que la valeur de calcul M_{Ed} du moment fléchissant dans chaque section transversale satisfasse :

$$\frac{M_{Ed}}{M_{c,Rd}} \leq 1 \Rightarrow M_{Ed} \leq M_{c,Rd} \quad (\text{éq. 7.205.})$$

Notation : M_{ed} valeur de calcul du moment fléchissant Nm

Pour les sections de classe 1 ou 2, il convient de prendre :

$$M_{c,Rd} = M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}} \quad (\text{éq. 7.206.})$$

Quant aux sections de classe 3 :

$$M_{c,Rd} = M_{el,Rd} = \frac{W_{el} f_y}{\gamma_{M0}} \quad (\text{éq. 7.207.})$$

Notations :

$M_{c,Rd}$	moment résistant de calcul par rapport à un axe principal de la section	Nmm
$M_{el,Rd}$	moment élastique résistant de calcul par rapport à l'un de ses axes principaux.	Nmm
$M_{pl,Rd}$	moment plastique résistant de calcul par rapport à l'un de ses axes principaux	Nmm
W_{el}	module d'inertie élastique de la section par rapport à l'un de ces axes principaux	mm^3
W_{pl}	module d'inertie plastique de la section par rapport à l'un de ces axes principaux	mm^3
γ_{M0}	coefficient partiel de sécurité	-
	coefficient partiel de sécurité (= 1)	

Cisaillement

En toute rigueur, lorsqu'il existe un effort tranchant, il convient de prendre en compte son incidence sur le moment résistant $M_{el, Rd}$. En fait, les EUROCODE ne tiennent pas compte de l'effet du cisaillement si :

$$V_{Ed} \leq 0.5 \frac{f_y A_v}{\sqrt{3} \gamma_{M0}} \quad (\text{éq. 7.208.})$$

Notations : f_y limite élastique de l'acier utilisé Nmm^2
 A_v section cisailée mm^2 -

C) Vérifications aux ELS

On doit vérifier que :

$$E_d = w_d \leq w_{limite} \quad (\text{éq. 7.209.})$$

E_d est l'effet de calcul des actions :

- ▶ w_d est la flèche verticale de calcul déterminée sur la base d'une des combinaisons définies pour ELS;
- ▶ w_{limite} est la flèche verticale limite recommandée.

Les flèches verticales sont composées de :

- ▶ w_c : contreflèche dans l'élément structural non chargé
- ▶ w_1 : flèche due aux charges permanentes
- ▶ w_3 : flèche due aux charges variables

d'où :

- ▶ w_{tot} : flèche totale : $w_{tot} = w_1 + w_3$
- ▶ w_{max} : flèche totale y compris la contreflèche : $w_{max} = w_{tot} - w_c$

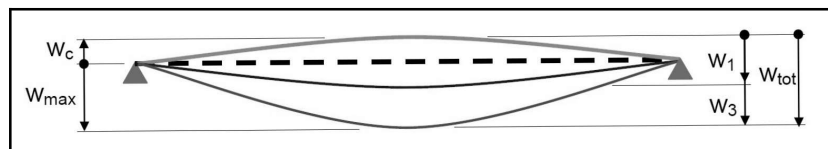


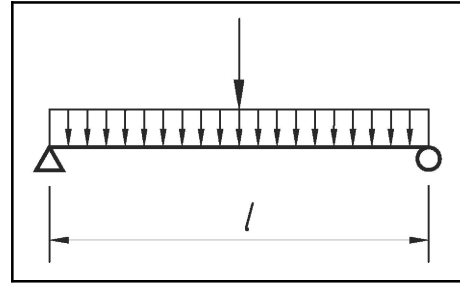
fig. 7.46. - Schéma des flèches verticales.

Pour les états limites de service (ELS) il convient de prendre la valeur 1 pour les coefficients partiels des actions.

Les valeurs limites couramment admises pour les flèches verticales sont données sur les "ELS" en **Annexe 1 Tableau 7.2. - Valeurs limites recommandées pour les flèches verticales.** Il y a deux vérifications à faire : l'une sur w_{max} et l'autre sur w_3 .

Application 7.9. Trouvez la poutrelle IPE (poutrelle de plancher, en S235, sur appuis simple aux extrémités et d'une longueur de 5 m) qui conviendrait dans le cas de chargement suivant :

- ▶ Charge permanente répartie de $g = 2 \text{ kN/m}$ avec une charge ponctuelle, centrée de $G = 4 \text{ kN}$;
- ▶ Charge variable répartie de $q = 3 \text{ kN/m}$ avec une charge ponctuelle centrée de $Q = 5 \text{ kN}$.



Solution :

Recherche des moments fléchissants

Les différentes formules pour les moments fléchissants maxima (au centre) se trouvent dans l'**Annexe 3**, cas **a1** et **d1**. Soit, pour les charges permanentes :

$$M_{G,d} = \frac{g l^2}{8} + \frac{G l}{4} = \frac{2000 \times 5^2}{8} + \frac{4000 \times 5}{4} = 11250 \text{ Nm}$$

Et pour les charges variables :

$$M_{Q,d} = \frac{q l^2}{8} + \frac{Q l}{4} = \frac{3000 \times 5^2}{8} + \frac{5000 \times 5}{4} = 15625 \text{ Nm}$$

Remarque :

Lors d'un calcul élastique, on suppose que la relation entre les actions et les sollicitations est linéaire et que le principe de superposition des efforts est applicable.

Vérification ELU

Le moment fléchissant de calcul devient :

$$M_{Ed} = 1.35 M_{G,d} + 1.5 M_{Q,d} = 1.35 \times 11250 + 1.5 \times 15625 = 38625 \text{ Nm}$$

Une IPE en S235 est de classe 1. D'où, il faut que :

$$W_{pl} \geq \frac{\gamma_{M0} M_{Ed}}{f_y}$$

Avec, dans notre cas :

$$\gamma_{M0} = 1 \quad \text{et} \quad f_y = 235 \text{ N/mm}^2$$

$$\Rightarrow W_{pl} \geq \frac{1 \times 38625 \times 10^3}{235} = 164361.7 \text{ mm}^3 = 164.4 \text{ cm}^3$$

Dans le catalogue de poutrelle, on trouve :

$$\text{IPE 180 avec :} \quad W_{el} = 166.4 \text{ cm}^3 \text{ et } I_y = 1316 \text{ cm}^3$$

Vérification ELS

Les flèches admissibles pour une poutre de plancher sont donnés dans l'**Annexe 1 Tableau 7.2**.

Soit :

$$w_{\max \text{ lim}} = \frac{l}{200} = \frac{5000}{200} = 25 \text{ mm}$$

$$w_{3 \text{ lim}} = \frac{l}{300} = \frac{5000}{300} = 16.7 \text{ mm}$$

Les différentes formules de flèches se trouvent dans l'**Annexe 3**, cas **a1** et **d1**. Soit, avec $g = 2 \text{ N/mm}$ et $q = 3 \text{ N/mm}$:

$$w_1 = \frac{5 g l^4}{384 E I} + \frac{G l^3}{48 E I} = \frac{l^3}{E I} \left(\frac{5 g l}{384} + \frac{G}{48} \right) = \frac{5000^3}{210000 \times 131610^4} \left(\frac{5 \times 2 \times 5000}{384} + \frac{4000}{48} \right)$$

$$= 9.66 \text{ mm}$$

$$w_3 = \frac{5 q l^4}{384 E I} + \frac{Q l^3}{48 E I} = \frac{l^3}{E I} \left(\frac{5 q l}{384} + \frac{Q}{48} \right) = \frac{5000^3}{210000 \times 131610^4} \left(\frac{5 \times 3 \times 5000}{384} + \frac{5000}{48} \right)$$

$$= 13.51 \text{ mm}$$

Vérification :

$$w_{tot} = w_1 + w_3 = 9.66 + 13.51 = 23.17 \leq w_{\max \text{ lim}} = 25 \text{ mm} \quad OK$$

$$w_3 = 13.51 \leq w_{3 \text{ lim}} = 16.7 \text{ mm} \quad OK$$

Conclusion

L'YPE 180 convient.

Remarque :

Si nous avions calculé ce cas de charge à la manière "ancienne", on aurait trouvé une IPE 200.

Cisaillement : vérification

Recherche de l'effort de cisaillement maximum (*Annexe 3*, cas **a1** et **d1**) :

$$V_{Ed} = \frac{(q + g)l}{2} + \frac{(Q + G)}{2} = \frac{(2000 + 5000) \times 5}{2} + \frac{(4000 + 5000)}{2} = 17000 \text{ N}$$

Pour une IPE 180, $A_{vz} = 11.25 \text{ cm}^2$ et donc :

$$17000 \leq 0.5 \frac{f_y A_{vz}}{\sqrt{3} \gamma_{M0}} = 0.5 \times \frac{235 \times 1125}{\sqrt{3} \times 1} = 76318 \text{ N} \quad OK$$

Il ne faut donc pas tenir compte du cisaillement.

Déversement

Il faudrait une vérification au déversement. Voir § 8.10.

7.8.2. Calcul de poutres de plancher

Transformation d'une charge surfacique en une charge linéique

Pour fixer les idées, soit une dalle de plancher supportée par des poutres régulièrement espacées de l'entre-distance e . La charge uniformément répartie par m^2 de plancher vaut $p_s \text{ N/m}^2$. Elle est due par exemple à la foule et l'on suppose que le poids propre de la dalle est inclus dans la charge p_s . Il s'agit d'une charge *surfacique* car exprimée par unité de surface.

On peut aisément démontrer que chaque mètre de poutre, compté dans l'axe de la poutre c'est-à-dire perpendiculairement au plan du dessin, supporte :

$$\boxed{q = p_s e} \quad (\text{éq. 7.232.}) \quad N/m$$

En effet, dans le cas d'un plancher, chaque poutre reprend une partie de la charge surfacique, de part et d'autre de celle-ci, sur une largeur égale à $e/2$.

C'est pourquoi, les différentes poutres centrales reprendront, comme charge uniformément répartie tout au long de la poutre :

$$q = \left(2 \times \frac{e}{2}\right) p_s = p_s e$$

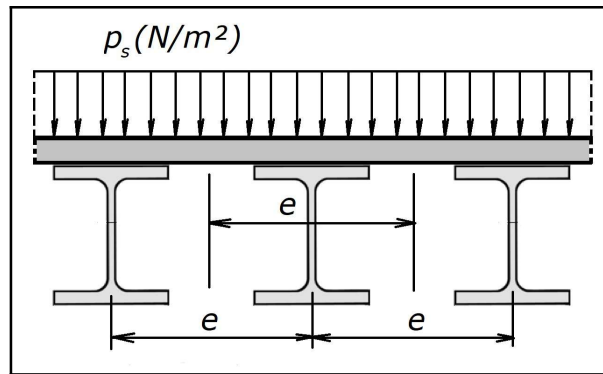


fig. 7.48. - Plancher.

Cette valeur de p représente la valeur recherchée de la charge linéique car exprimée à présent par unité de longueur.

Remarque :

Par contre les poutres le long des murs ne reprennent que la moitié de la charge surfacique, c'est-à-dire : $q = \left(\frac{l}{2}\right) p_{\text{surfacique}}$

C'est donc au moyen de l'équation (éq. 7.98) que nous déterminerons la dimension des gîtes à utiliser sachant que nous considérerons les poutres *comme simplement appuyées et non encastrées*.

Voici les contraintes à la rupture R_m , le module d'élasticité E ainsi que la contrainte à la limite élastique R_e , si celle-ci est connue, pour différentes espèces de bois utilisées en construction.

★ **Tableau donnant quelques caractéristiques mécaniques de différents bois en annexe (Annexe 1 : Tableau 7.3. - Caractéristiques mécaniques générales de différents bois.)**

Dans le cas du bois nous utiliserons, pour déterminer la contrainte admissible de traction et de flexion, la relation donnée pour les matériaux fragiles (le bois n'étant pas isotrope). C'est-à-dire :

$$\sigma_{adm} = \frac{R_m}{S} \quad \text{avec} \quad S = 10 \quad (\text{éq. 7.236.})$$

★ **Tableau des dimensions normalisées des pièces de bois (Annexe 1 : Tableau 7.4. - Dimensions standardisées des pièces de bois.)**

On donne en annexe quelques valeurs de surcharges surfaciques de planchers (en l'absence de toutes normes).

★ **Tableau donnant quelques valeurs de surcharges surfaciques (Annexe 1 : Tableau 7.5. - Surcharges surfaciques des planchers.)**

Application 7.10. Quelle sera la dimension des gîtes (en sapin du nord), composant un plancher, ayant une charge surfacique totale de $p_{\text{surfacique}} = 3000 \text{ N/m}^2$, sachant que la pièce a une dimension de $3 \text{ m} \times 4 \text{ m}$, que la longueur entre appuis est de 4 m et que la distance entre les différentes poutres est de $d = 0.4 \text{ m}$? Les dimensions des gîtes standards sont : 63×150 (7/15), 63×175 (7/18) ou 75×225 (8/23). Vérifiez la flèche maximum du plancher $\left(f_{\text{adm}} = \frac{l}{250}\right)$.

Caractéristiques du sapin : $E_{\text{sapin nord}} = 100000 \text{ N/mm}^2$; $R_{m \text{ sapin}} = 110 \text{ N/mm}^2$.

Solution :

Recherche de la contrainte admissible :

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{R_m}{S} = \frac{110}{10} = 11 \text{ N/mm}^2$$

Charge reprise par les poutres :

$$q = e p_{\text{surfacique}} = 0.4 \times 3000 = 1200 \text{ N/m}$$

Recherche du moment fléchissant maximum

Charge répartie (voir **Annexe 3** cas **a1**) :

$$M_{f \text{ max}} = \frac{q l^2}{8} = \frac{1200 \times 4^2}{8} = 2400 \text{ Nm}$$

Recherche du I/v à avoir

$$\sigma_{\text{adm}} \geq \frac{|M_{f \text{ max}}|}{I/v} \Rightarrow I/v \geq \frac{|M_{f \text{ max}}|}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{2400 \cdot 10^3}{11} = 218182 \text{ mm}^3 \approx 218 \text{ cm}^3$$

Recherche des (I/v) des différentes gîtes

Voir **Annexe 1** pour les sections préférentielles :

$$63 \times 150 \Rightarrow \frac{b h^2}{6} = \frac{6.3 \times 15^2}{6} = 236 \text{ cm}^3 \quad \text{C'est celle - ci qui convient.}$$

$$63 \times 175 \Rightarrow 322 \text{ cm}^3$$

$$75 \times 225 \Rightarrow 633 \text{ cm}^3$$

Vérification de la flèche

Celle-ci est donnée par la formule (voir **Annexe 3** cas **a1**) :

$$f_{\text{max}} = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{E I}$$

dans le cas d'une poutre sur deux appuis avec une charge répartie. Sachant que dans notre cas :

$$I = I/v \times v = 236 \times \frac{15}{2} = 1770 \text{ cm}^4$$

$$f_{\text{max}} = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{E I} = \frac{5}{384} \frac{1.2 \times 4000^4}{10000 \times 1770 \cdot 10^4} = 22.6 \text{ mm}$$

$$f_{\text{max}} = 22.6 \text{ mm} ? \leq f_{\text{adm}} = \frac{l}{250} = \frac{4000}{250} = 16 \text{ mm} \quad \text{KO}$$

Prenons la 7/18 :

$$I = I/v \times v = 322 \times \frac{17.5}{2} = 2818 \text{ cm}^4$$

$$f_{\max} = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{E I} = \frac{5}{384} \frac{1.2 \times 4000^4}{10000 \times 2818 \cdot 10^4} = 14.2 \text{ mm} \quad OK$$

Nous devons donc prendre une 7/18, à cause de la contrainte de la flèche.

7.8.3. Calcul (simplifié) d'une dent de roue dentée (engrenage cylindrique)

{Réf. 7}

Une dent d'engrenage se calcule suivant plusieurs critères :

- 1) A la résistance à la flexion et à la compression
- 2) A la pression spécifique
- 3) A l'échauffement

Pour un calcul simplifié nous ne calculerons la denture qu'à la flexion en considérant la dent comme un solide encastré.

Connaissant la puissance P à transmettre, en W , et la vitesse de rotation n , en *tour/min*, de la roue dentée, nous pouvons en déduire le couple C à transmettre par la roue dentée et donc la force F (en N) s'exerçant sur les dents de l'engrenage.

Rappelons-nous l'équation liant le couple et la vitesse de rotation :

$$C = \frac{30 P}{\pi n} \quad [Nm]$$

Mais pour le calcul des engrenages, nous avons tout intérêt à prendre le couple maximum et non le couple nominal. Dans le cas des roues dentées, il y a deux sortes d'efforts supplémentaires :

- 1) celui provenant de la plus ou moins grande précision de la denture et dont on tient compte en multipliant le couple C par k_p :

$$k_p = 1.05 \dots 1.3$$

- 2) celui provenant de la nature des deux machines reliées par l'engrenage. Ce facteur de choc k_c peut être assez élevé et n'est pas toujours facile à évaluer avec précision (voir chapitre "Torsion")

Dans un calcul d'avant projet on peut se contenter du couple maximum déterminé par :

$$C_{\max} = k_p k_c C \quad (\text{éq. 7.252.})$$

La force sur une dent d'engrenage s'exerce suivant un certain angle (la plupart du temps suivant un angle de 20°) sur le diamètre primitif (d_{prim}). La force engendrant le couple est la projection de cette force sur la perpendiculaire au diamètre primitif : soit F_t .

Dès lors, sachant que :

$$F_t = \frac{C_{\max}}{d_{\text{prim}}/2} \quad \text{nous avons :}$$

$$F_t = \frac{60 P}{\pi d_{\text{prim}} n} \quad (\text{éq. 7.254.}) \quad [N]$$

Remarque :

Si P est en W , d_{prim} doit être en m !

Connaissant maintenant la force F_t s'exerçant sur la dent, il s'agit de déterminer son module m et à partir de là, toutes ses dimensions.

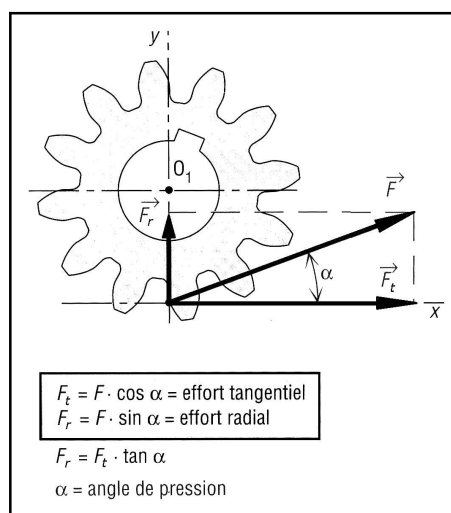


fig. 7.49. - Modèle de calcul simplifié d'une dent d'engrenage.

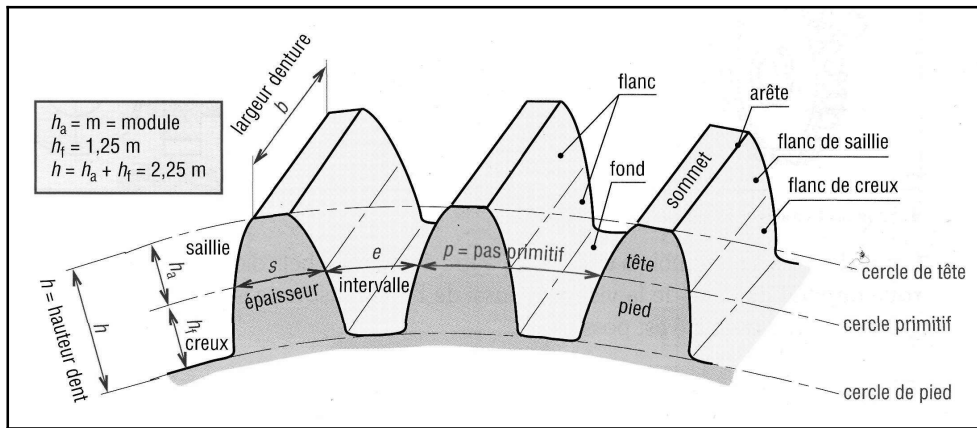


fig. 7.50. - Définition et terminologie d'une roue dentée.

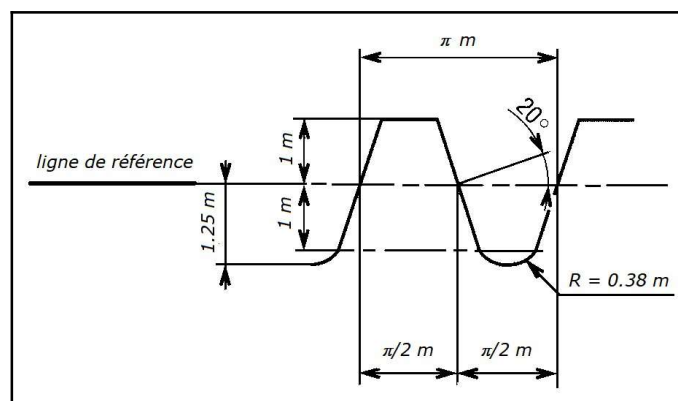


fig. 7.51. - Dimensions normalisées d'une dent d'engrenage.

★ **Tableau des dimensions normalisées d'un engrenage profil métrique ISO (Annexe 1 : Tableau 7.6. - Dimensions standardisées des pièces de bois.)**

★ **Tableau des valeurs normalisées des modules des engrenages (Annexe 1 : Tableau 7.7. - Dimensions standardisées des pièces de bois.)**

Hypothèses de calcul

- [H1] La dent est une poutre encastrée.
- [H2] L'épaisseur au pied e = épaisseur au cercle primitif s .
- [H3] La force F_t est appliquée au sommet de la dent (et non sur le primitif) de manière tangentielle.
- [H4] Une seule dent transmet toute la force F_t .
- [H5] On ne tient pas compte des concentrations de contraintes.

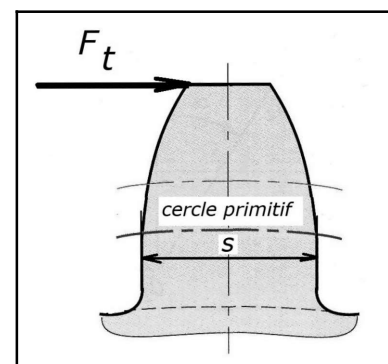


fig. 7.52. - Position de la force tangentielle.

A partir de ces hypothèses, vérifions les contraintes normales σ :

$$\sigma = \frac{|M_{f \max}|}{I/v} = \frac{|M_{f \max}|}{W_x} \leq \sigma_{adm} \quad [N/mm^2]$$

<u>Notations</u> :	m	module		mm
	M_f	moment fléchissant		Nmm
			$M_f = F_t \times \text{hauteur de dent} = F_t (2.25 m)$	
	W_x	module de résistance	$W_x = b e^2 / 6$	mm^3
	b	largeur de dent	$b = K m$ avec $K = 8 \dots 12$	mm
	e	épaisseur de dent	$e = (\pi/2) m$	mm

$$\Rightarrow \sigma = \frac{F_t (2.25 m)}{(K m/6) ((\pi/2) m)^2} = \frac{54}{\pi^2} \frac{F_t}{K m^2} \leq \sigma_{adm} \quad (\text{éq. 7.261.})$$

C'est la formule dite de "Lewis".

et donc :

$$m \geq \sqrt{\frac{54}{\pi^2} \frac{F_t}{K \sigma_{adm}}} \approx 2.34 \sqrt{\frac{F_t}{K \sigma_{adm}}} \quad (\text{éq. 7.262.})$$

Remarque :

Le coefficient K détermine la largeur de la denture. On prend généralement une valeur entre 8 et 12 (en avant projet $K = 10$). Il va de soit que plus la largeur de denture est importante plus il est difficile de faire porter la denture sur toute sa longueur, il est alors nécessaire de rectifier les dentures ce qui fait augmenter le coût de celles-ci.

Dans le cas présent la contrainte admissible σ_{adm} est une contrainte admissible de fatigue. Pour le cas des aciers on peut, pour un calcul simplifié, prendre :

$$\sigma_{adm \text{ fatigue}} = (0.4) \dots 0.5 \dots R_m \quad (\text{éq. 7.53.})$$

Application 7.11. Un pignon, de 120 mm de diamètre primitif, est calé sur un moteur électrique de 20 kW tournant à une vitesse de rotation de 1440 tours par minute. Déterminez le module de cette roue dentée si la contrainte admissible est de 200 N/mm².

Solution :

Recherche de la force tangentielle

$$F_t = \frac{60 P}{\pi d_{prim} n} = \frac{60 \times 20000}{\pi \times 0.120 \times 1440} = 2210 \text{ N}$$

Appréciation des différents coefficients

Coefficient de choc : $k_c = 1.2$ → moteur électrique
 Coefficient de précision : $k_p = 1.15$ → précision moyenne

Calcul de la force tangentielle maximale

$$F_{t \text{ max}} = F_t k_c k_p = 2210 \times 1.2 \times 1.15 = 3050 \text{ N}$$

Calcul du module

Avec un K moyen de 10 :

$$m \geq \sqrt{\frac{54}{\pi^2} \frac{F_t}{K \sigma_{adm}}} = \sqrt{\frac{54}{\pi^2} \frac{3050}{10 \times 200}} = 2.89 \quad \text{soit} \quad 3 \text{ mm}$$

7.8.4. Charges roulantes

A) Charge roulante unique

Soit une charge F pouvant se déplacer sur toute la longueur d'une poutre \overline{AB} reposant sur deux appuis. C'est le cas, par exemple, d'un crochet de palan que l'on peut déplacer.

Considérons, figure ci-dessous, une position quelconque de la charge, le moment fléchissant maximum est toujours donné au point d'application de celle-ci. Autrement dit :

Dans le cas d'une charge roulante, le moment fléchissant maximum en une section quelconque est toujours donné quand la charge est appliquée directement en cette section.

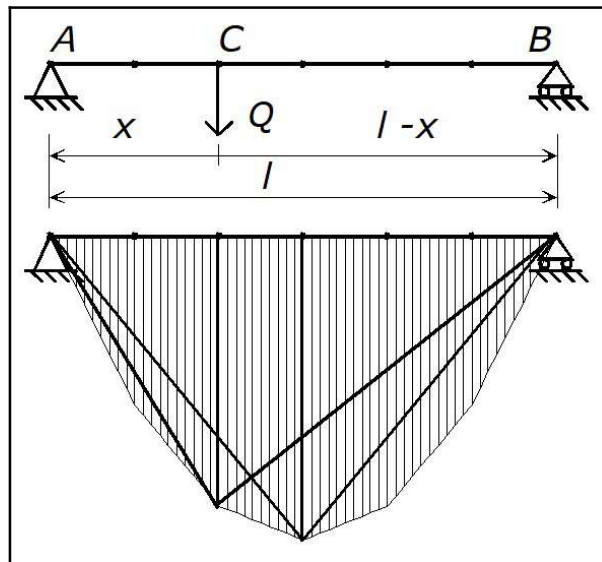


fig. 7.54. - Moment fléchissant dans le cas d'une charge roulante unique.

Le calcul des réactions en A et B conduit aux résultats suivant :

$$R_A = Q \frac{l-x}{l} \quad \text{et} \quad R_B = Q \frac{x}{l} \quad (\text{éq. 7.270.})$$

Notations : x distance mesurée à partir de l'appui A (varie entre 0 et l) mm
 l longueur entre appuis mm

L'équation du moment fléchissant, quant à lui, est égale à :

$$M_f = R_A x = Q \frac{l-x}{l} x = \frac{Q}{l} (lx - x^2) \quad (\text{éq. 7.271.})$$

L'équation du *moment fléchissant*, pour une charge roulante ponctuelle, montre que la courbe des M_f est une parabole à axe vertical (le moment fléchissant varie en fonction de x^2), au lieu d'un

triangle pour une charge ponctuelle fixe, bien que le maximum se situe au milieu de la portée (en $l/2$) et est égal, pour les deux cas de charges, à :

$$M_{f \max} = \frac{Ql}{4} \quad (\text{éq. 7.272.})$$

De plus, contrairement au cas de charge fixe, la réaction aux appuis peut cette fois-ci varier d'un minimum égal à 0 à un maximum égal à F :

$$\begin{aligned} R_A = 0 &\Rightarrow x = l && \text{La charge roulante se trouve en B} \\ R_A = F &\Rightarrow x = 0 && \text{La charge roulante se trouve en A} \end{aligned}$$

Les appuis devront donc être calculer pour le *maximum*.

Concernant le cisaillement maximum, il se trouve aussi aux appuis. En effet :

$$V = \frac{dM_f}{dx} = \frac{d\left(\frac{Q}{l}(lx - x^2)\right)}{dx} = \frac{Q}{l}(l - 2x)$$

$$V_{\max} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow V_{\max} = Q \\ x = l \Rightarrow V_{\max} = -Q \end{cases} \quad (\text{éq. 7.276.})$$

7.9. Démonstrations

7.9.1. Démonstration de la formule de Navier pour la flexion

L'allongement relatif ε d'une fibre se trouvant à une distance y de la fibre neutre peut être établi, pour le cas de *flexion pure* (la déformée dans ce cas est un arc de cercle de rayon de courbure ρ), en analysant la déformation d'une longueur élémentaire dz de la barre :

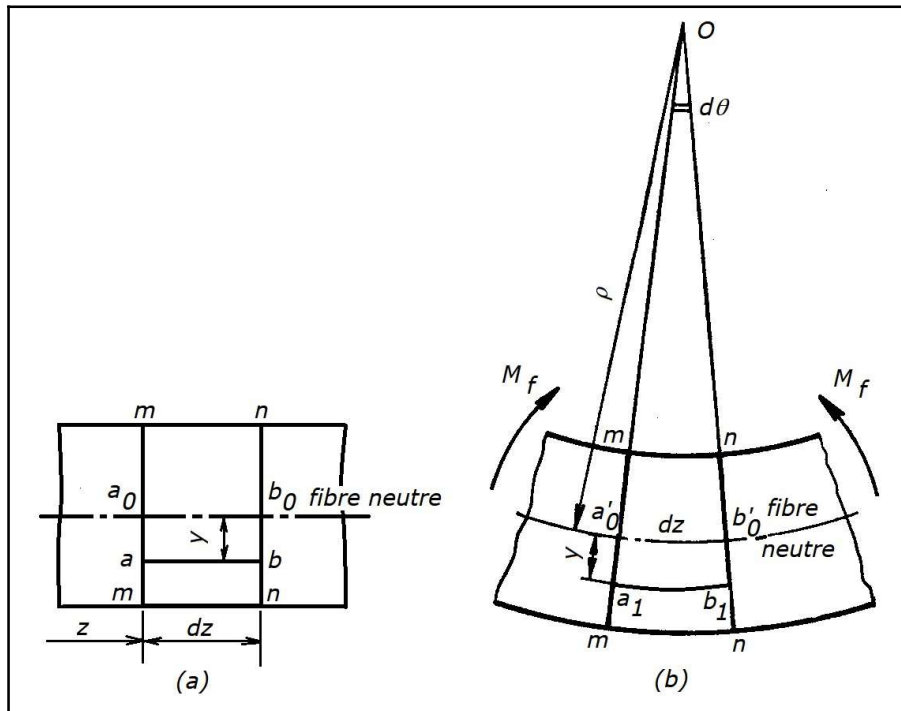


fig. 7.55. - Formule de Navier pour la flexion.
(a) Longueur élémentaire non déformée - (b) Après déformation.

La longueur $\overline{a_1 b_1}$ est donnée par (triangle curviligne $O a'_0 b'_0$) :

$$\overline{a_1 b_1} = (\rho + y) d\theta$$

A la fibre neutre, la longueur $\overline{a_0 b_0}$ reste constant malgré la courbure ($\overline{a'_0 b'_0}$). Cette longueur est donnée par :

$$\overline{a'_0 b'_0} = \rho d\theta$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{(\overline{a_1 b_1} - \overline{a'_0 b'_0})}{\overline{a'_0 b'_0}} = \frac{(\rho + y) d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho} \quad (\text{éq. 7.283.})$$

Si on introduit cette dernière équation dans l'équation physique de la loi de Hooke $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, on

obtient : $\sigma = \frac{E}{\rho} y$ (éq. 7.285.) $\left(\frac{1}{\rho}\right)$ étant la courbure.

Si on se rappelle la définition d'une contrainte en un point :

Sur un petit élément dA (appelé facette) appartenant à la surface de la coupure et entourant le point B , agit une force dF . Par définition, la contrainte s'exerçant sur la

coupure au point B vaut : $\sigma_B = \frac{dF}{dA}$

Si, de plus, on utilise la condition d'équilibre qui lie les contraintes et les efforts internes dans une section transversale d'une poutre qui peut s'écrire sous la forme :

$$\int_A y dF = M_f \Rightarrow \int_A y (\sigma dA) = M_f \quad (\text{éq. 7.288.})$$

et si on introduit dans cette dernière équation l'équation **éq. 7.285.**, on obtient :

$$\int_A y \left(\frac{E}{\rho} y dA \right) = M_f \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M_f}{E \int_A y^2 dA} = \frac{M_f}{E I} \quad (\text{éq. 7.289.})$$

$\int_A y^2 dA$ étant, par définition, le moment d'inertie de la section

et si l'on introduit cette dernière équation dans **éq. 7.285.**, on établit la formule pour le calcul de la contrainte normale dans une couche quelconque de la section de la barre à une distance y de l'axe Ox :

$$\sigma = \frac{M_f}{I/y} \quad (\text{éq. 7.291.})$$

Remarque :

Dans le cas d'une *flexion simple* et même en *flexion composée*, l'expression ci-dessus est approchée, mais suffisamment exacte que pour une utilisation dans la pratique courante.

7.9.2. Principe de réciprocité des contraintes tangentielles

Justifions la non-uniformité des contraintes tangentielles dans une section d'une poutre fléchie.

Si dans une section existe un effort tranchant V , celui-ci induit une contrainte tangentielle τ_y dans la "petite" surface A_y . Cette contrainte se situe "dans" la section et est parallèle à l'axe y . Comme la section est statique, la sommation des forces f_i et la sommation des moments M doit être nulle.

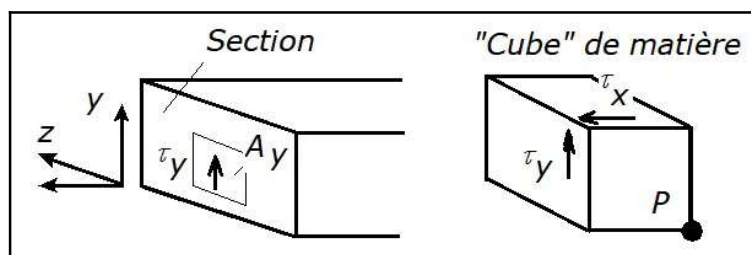


fig. 7.56. - Réciprocité des cisaillements.

Examinons un petit "cube" de matière, de côté l .

Par rapport au point P , il faut que : $\sum M_P = 0$, et donc : $\tau_y \times l = \tau_x \times l$.

Il y aura donc une contrainte réciproque τ_x dans le sens longitudinal qui sera égal, en grandeur, au cisaillement transversal τ_y .

Par contre si nous prenons un “cube” dont une des faces est la surface extérieure de la poutre, il sera impossible d'équilibrer celle-ci, car, longitudinalement il n'y a plus de matière et par conséquent τ_x n'existera pas !

C'est pourquoi, la répartition des contraintes transversales ne sera pas uniforme. Le maximum se situera au niveau de la fibre neutre et les contraintes tangentielles seront nulles aux extrémités (surfaces supérieure et inférieure) de la poutre.

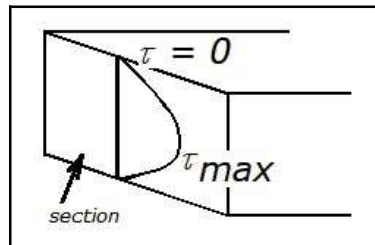


fig. 7.57. - Répartition des contraintes de cisaillement dans une section de poutre.