

CHAPITRE 8. NOTION DE STABILITÉ : FLAMBEMENT	- 8.1 -
8.1. Introduction	- 8.1 -
8.2. Définition	- 8.1 -
8.3. Formule d'Euler	- 8.5 -
8.4. Contraintes critiques	- 8.7 -
8.5. Conditions d'utilisation de la formule d'Euler	- 8.9 -
8.6. Dimensionnement par "Euler - Rankine"	- 8.10 -
8.6.1. Principe	- 8.10 -
8.6.2. Conception	- 8.10 -
A) Euler.	- 8.10 -
B) Rankine	- 8.11 -
8.6.3. Résumé	- 8.11 -
8.7. Choix de la forme de la section	- 8.12 -
8.8. Dimensionnement suivant l' "EUROCODE"	- 8.16 -
8.8.1. Introduction	- 8.16 -
8.8.2. Vérification aux ELU	- 8.16 -
8.8.3. Note concernant les fontes	- 8.29 -
8.9. Flambage - Flexion	- 8.32 -
8.9.1. Théorie - Equation	- 8.32 -
8.9.2. Principe de superposition	- 8.33 -
8.9.3. Noyau central	- 8.38 -
8.10. Déversement	- 8.40 -
8.10.1. Introduction	- 8.40 -

CHAPITRE 8. NOTION DE STABILITÉ : FLAMBEMENT

8.1. Introduction

L'objectif du présent chapitre est de permettre le dimensionnement ou la vérification des dimensions des barres élancées soumises à un effort de compression.

Après avoir précisé la notion de charge critique de flambement, celle-ci sera déterminée à partir de la théorie d'Euler et on en déduira la notion de contrainte critique.

Par référence à la méthode des contraintes admissibles, on pourra déterminer la charge de compression admissible en tenant compte d'un coefficient de réduction. On donnera pour terminer une formule empirique utilisée pour le calcul des pièces moyennement ou faiblement élancées et/ou soumise à fatigue.

8.2. Définition

Pour un corps élastique, tout comme pour un corps rigide, on peut parler de stabilité ou d'instabilité des positions d'équilibre.

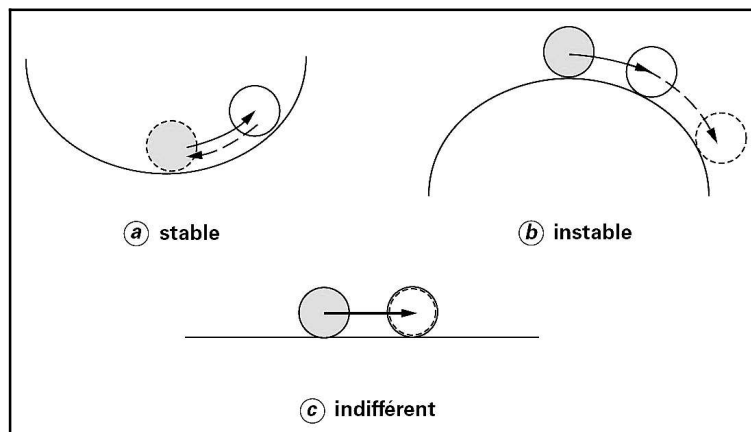


fig. 8.1. - Notion de stabilité.

Supposons que l'on ait un tant soi peu déplacé un certain système élastique à partir de sa position d'équilibre. Si, une fois l'action extérieure disparue, le système retourne à sa position initiale, on dit que cette position est stable; si le système n'y retourne pas, elle est instable.

Le phénomène de perte de stabilité pour les corps élastiques peut-être observé sur toute une série d'exemple. Le cas le plus simple est la perte de stabilité d'une tige comprimée de manière axiale.

Nous connaissons tous les premiers film de Charlie Chaplin dans lesquels on le voyait souvent appuyé sur une canne constituée par une mince tige de bambou : chaque fois que le comédien pèse de tout son poids sur la canne, celle-ci se courbe vers l'extérieur. Tous les éléments de structure *longs et minces* ont un comportement similaire en compression. Lorsque la charge de compression augmente lentement, on atteint une valeur pour laquelle l'élément mince, au lieu de simplement se raccourcir, s'infléchit, et d'ordinaire se rompt. Cette valeur critique est appelée : *charge de flambement*. Elle devient un facteur fondamental de dimensionnement lorsque le matériau possède une résistance à la compression suffisante pour permettre l'emploi d'une faible section, ce qui conduit à utilisé des éléments élancés.



fig. 8.2. - "Charlie Chaplin".

Le phénomène d'instabilité transversale sous un effort de compression porte le nom de **flambement**.

Mise en garde

Monsieur Vierendeel ⁽¹⁾ attire l'attention sur le danger des pièces comprimées dans les constructions métalliques. Il écrit "On peut dire que sur dix écroulements survenus dans les constructions métalliques, il y en a huit dus au flambage."

La particularité éminemment dangereuse des pièces comprimées est qu'elles cèdent brusquement sans que leur faiblesse ne se dévoile à l'oeil par aucun indice, aucun signe avant-coureur évident.

Il faut employer les formules de flambage avec prudence, c'est-à-dire en prenant un coefficient de sécurité très grand. Les pièces soumises au flambage doivent impérativement être droites et ne doivent pas avoir subi des déformations précédemment.

Le danger d'instabilité existe donc dans toute structure comprimée. Nous en avons de 3 sortes : flambement (compression pure)

- déversement (flexion)
- voilement (torsion)

et les phénomènes d'instabilité peuvent être de 2 types, soit :

- locaux (barres de treillis, voilement, ...)
- globaux (flambement d'ensemble, ...)

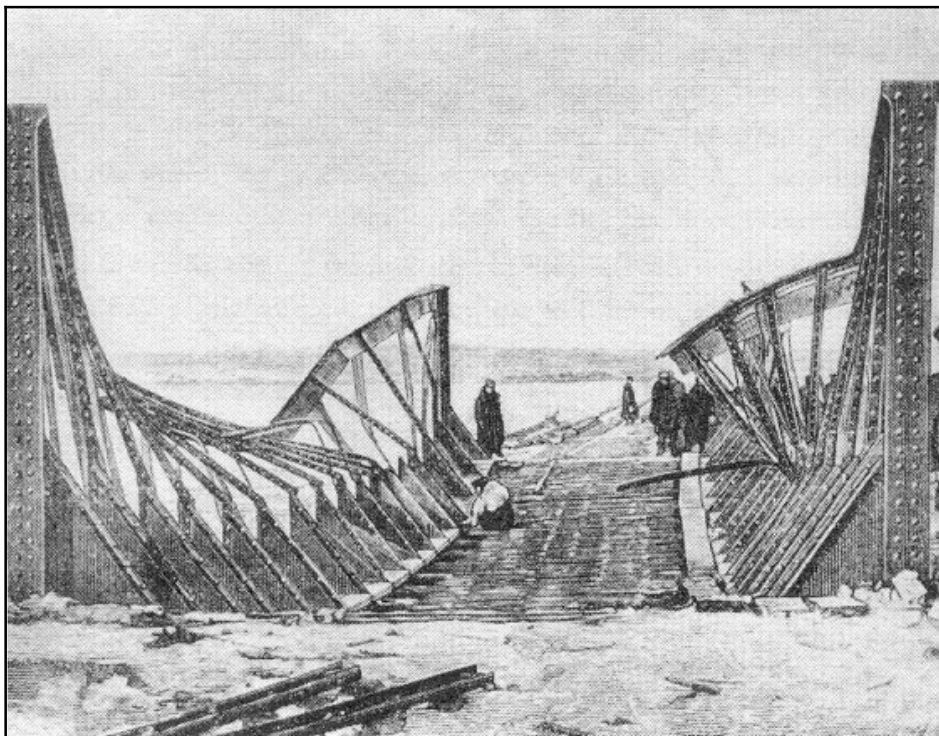


fig. 8.3. - Flambement d'ensemble de la membrure supérieure des poutres en treillis d'un pont de chemin de fer (Russie, vers 1890).

⁽¹⁾ Vierendeel Arthur (1852 [Louvain] - 1940 [Uccle]) : ingénieur belge.

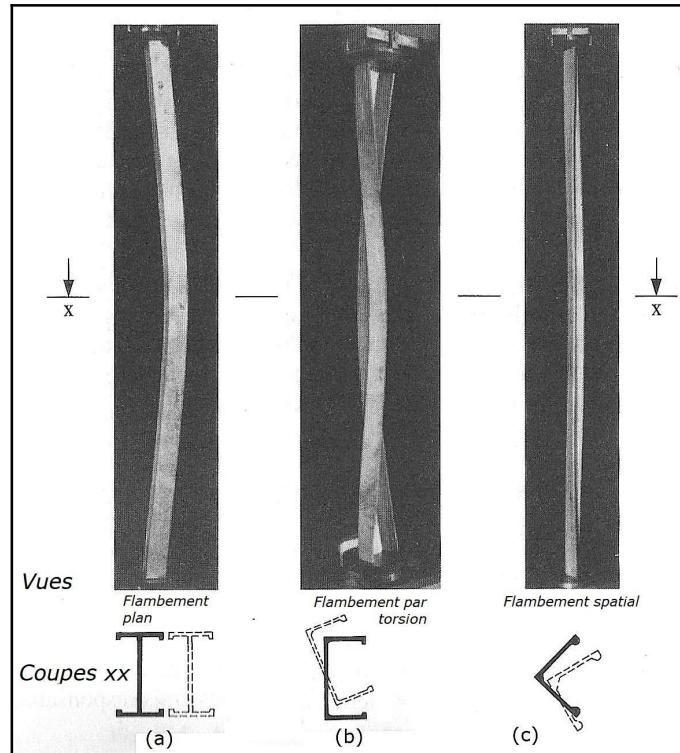


fig. 8.4. - Flambement divers.

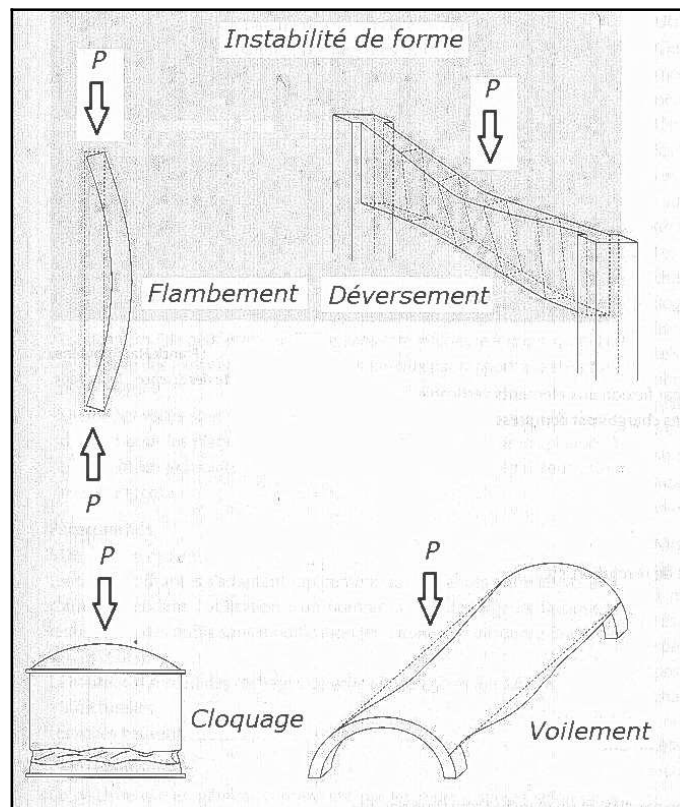


fig. 8.5. - Autres formes d'instabilité.

8.3. Formule d'Euler

Expérimentalement on constate que la forme rectiligne d'équilibre d'une tige comprimée n'est stable que dans le cas où la force de compression est inférieure à une valeur déterminée dite **critique**.

Parallèlement aux études expérimentales, certains auteurs ont essayé de rechercher analytiquement l'expression de la charge critique. Euler ⁽²⁾ est le premier à avoir résolu le problème à la fin du XVIII^e siècle. C'est pourquoi, en parlant de la stabilité d'une tige comprimée, on dit souvent "**Problème d'Euler**".

Considérons une barre verticale de longueur l encastrée à sa base. En supposant :

- [H1] la section constante,
- [H2] le poids propre de la barre négligeable,
- [H3] le matériau homogène,
- [H4] le raccourcissement de la barre négligeable vis-à-vis de la déformation due à la flexion,

Euler en déduit la charge critique N_{crit} :

$$N_{crit} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{4 l^2} \quad (\text{éq. 8.1.})$$

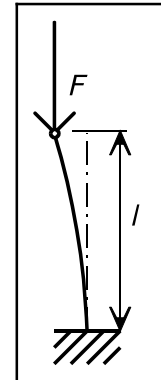


fig. 8.6. - "Euler"

<u>Notations</u> :	E	le module d'élasticité du matériau	N/mm^2
	I_{min}	l'inertie minimum de la barre	mm^4
	l	longueur de la barre	mm
	EI	module de rigidité à la flexion	Nmm^2

On étend assez facilement la solution obtenue à d'autres cas de fixation. Et en généralisant, on peut écrire l'**expression générale de la charge critique (suivant Euler) pour une tige comprimée** sous la forme :

$$N_{crit Euler} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l_f^2} \quad (\text{éq. 8.2.})$$

<u>Notations</u> :	l_f	longueur de flambement donné par :	mm
--------------------	-------	------------------------------------	------

$$l_f = k_f l \quad (\text{éq. 8.3.})$$

	k_f	coefficient de réduction de la longueur (<i>Tableau 8.1.</i>)	-
	l	longueur de la barre	mm

Ce coefficient k_f montre par combien il faut multiplier la longueur d'une tige articulée pour que sa charge critique soit égale à celle de la tige de longueur l dans des conditions de fixations envisagées.

★ **Tableau des différents coefficients de réduction de la longueur** (*Annexe 1 : Tableau 8.1. - Coefficient de réduction.*)

⁽²⁾ Paul Euler Leonhard (1707 [Bâle] - 1783 [Saint-Petersbourg] : mathématicien et physicien suisse.

Nous parlerons plus facilement de “*colonne*” plutôt que de “*tige comprimée*”.

On appelle **colonne** une barre longue et fine. Le terme de **colonne** est fréquemment utilisé pour désigner une membrure verticale, tandis que le terme de **poutrelle** l'est plutôt pour les barres inclinées.

Le problème est de savoir si un appui peut être considéré comme *libre*, comme *articulé* ou comme *encastré*. Les quelques considérations suivantes permettent d'opérer un choix dans des cas pratiques.

- au pied d'une colonne solidement ancrée au massif de fondation au moyen de boulons d'ancrage par l'intermédiaire d'une plaque épaisse soudée, on peut considérer qu'il y a *encastrement*;
- si en tête de cette colonne, il n'y a rien d'autre que la force de compression N , on peut bien évidemment considérer cette tête de colonne comme absolument *libre* au point de vue mode d'appui;
- dans le cas d'une colonne qui soutient, et y est donc fixée, une structure de plancher qu'on pourrait qualifier de “souple”, c'est plus ou moins le cas des planchers métalliques, il est prudent de considérer cette fixation comme une *articulation*;
- si ce même plancher est rigide, épais et monolithique, c'est plus ou moins le cas des planchers pleins en béton armé, la fixation pourrait à la rigueur être considérée comme un *encastrement*, une colonne de façade d'un bâtiment sera considérée comme moins rigidement fixée qu'une colonne intérieure; elle sera donc considérée plutôt comme *bi-articulée* que comme bi-encastrée ou mixte,
- dans le doute, il est toujours plus prudent de considérer la colonne comme bi-articulée, à moins que l'extrémité supérieure soit libre; la colonne ainsi calculée avec un élancement λ plus important offre davantage de sécurité.

8.4. Contraintes critiques

Par définition, la contrainte critique due à la compression dans une barre est donnée par :

$$\boxed{\sigma_{crit} = \frac{N_{crit}}{A}} \quad (\text{éq. 8.4.})$$

Notation : A l'aire de la section droite mm^2

D'où, en remplaçant (éq. 8.2.) dans l'équation ci-dessus nous obtenons :

$$\sigma_{crit Euler} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l_f^2 A} \quad (\text{éq. 8.5.})$$

et si, de plus, nous nous souvenons de la définition du rayon de giration (voir *Chapitre 4.*) :

$$i_{g min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} \quad (\text{éq. 8.6.})$$

$i_{g min}$ étant le **rayon de giration minimum** de la section droite correspondant au plan de flambement, nous obtenons :

$$\sigma_{crit Euler} = \frac{\pi^2 E i_{g min}^2}{l_f^2} \quad (\text{éq. 8.7.})$$

Et si nous **définissons** la notion "**d'élancement**" λ d'une colonne par :

$$\boxed{\lambda_{col} = \frac{l_f}{i_g}} \quad (\text{éq. 8.8.})$$

Remarque :

L'élancement caractérise la *flexibilité* d'une poutre.

et que nous remplaçons dans (éq. 8.7.), nous obtenons une autre manière d'écrire la contrainte critique suivant Euler $\sigma_{crit Euler}$:

$$\boxed{\sigma_{crit Euler} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{col}^2}} \quad (\text{éq. 8.9.})$$

Définissons deux paramètres :

a) Elancement limite d'Euler ($\lambda_{lim Euler}$)

Dans le dimensionnement nous ne pouvons en aucun cas dépasser la limite élastique R_e et de ce fait la plus grande valeur que peut prendre la contrainte critique d'Euler est cette limite élastique. Si nous remplaçons celle ci dans la formule ci-dessus, nous pouvons définir "**l'élancement limite d'Euler**", l'élancement λ devenant $\lambda_{lim Euler}$, soit :

$$\boxed{\lambda_{lim Euler} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_e}}} \quad (\text{éq. 8.10.})$$

Le graphe proposé ci-dessous donne la représentation de $\sigma_{crit Euler}$ en fonction de λ pour un acier usuel ($E = 200\,000\text{ N/mm}^2$ et $R_e = 240\text{ N/mm}^2$) et pour un alliage d'aluminium courant ($E = 70\,000\text{ N/mm}^2$ et $R_e = 180\text{ N/mm}^2$).

L'allure des courbes est hyperbolique et celles-ci ne sont valables que si $\sigma_{crit} < R_e$. En conséquence, pour l'acier indiqué, la formule d'Euler n'est utilisable que lorsque $\lambda > \lambda_{lim Euler} = 91$.

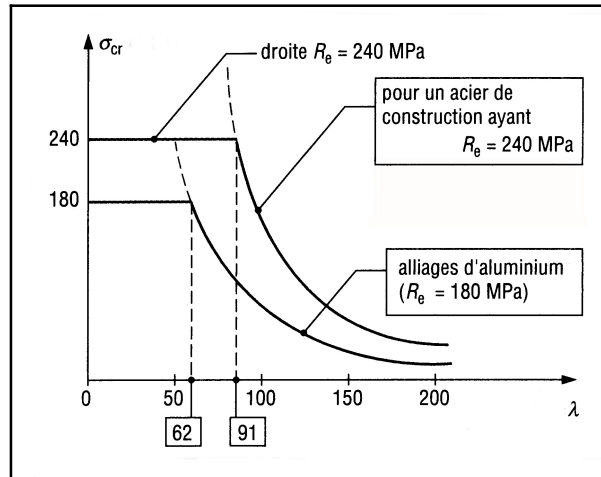


fig. 8.7. - Domaine d'utilisation de la formule d'Euler.

b) Notion d'élancement réduit ($\bar{\lambda}$)

L'élancement réduit $\bar{\lambda}$, nombre pur, à pour expression :

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_{col}}{\lambda_{lim Euler}} \quad (\text{éq. 8.19.})$$

L'utilisation de ce nombre permettra une simplification des calculs ainsi que du formalisme mathématique.

Nous pouvons maintenant exprimer la *contrainte critique* et la *charge critique* d'Euler sous la forme :

Contrainte critique :

$$\sigma_{crit Euler} = \frac{\lambda_{lim Euler}^2}{\lambda_{col}^2} R_e = \frac{R_e}{\bar{\lambda}^2} \quad (\text{éq. 8.20.})$$

Charge critique :

$$N_{crit Euler} = \frac{R_e A}{\bar{\lambda}^2} \quad (\text{éq. 8.21.})$$

8.5. Conditions d'utilisation de la formule d'Euler

Comme la théorie développée ci-dessus suppose le matériau élastique linéaire, on peut montrer que la **formule d'Euler cesse d'être applicable pour des élancements inférieurs à $\lambda_{lim Euler}$** .

★ **Tableau de différentes valeurs de l'élancement limite d'Euler** (*Annexe 1 : Tableau 8.2. - Elancement limite Euler.*)

Le problème de la stabilité d'une barre dont l'élancement est inférieur à l'élancement limite demande une étude particulière.

C'est pourquoi dans le **cas de pièces courtes** ($\lambda_{col} < \lambda_{lim Euler}$), on utilise des **formules empiriques**. En pratique on utilisera la **formule de Rankine** ⁽³⁾. Celle-ci s'énonce de la manière suivante :

Contrainte critique :

$$\sigma_{crit Rankine} = \frac{R_e}{(1 + \bar{\lambda}^2)} \quad (\text{éq. 8.23.})$$

La charge critique suivant Rankine s'écrira, quant à elle :

$$N_{crit Rankine} = \frac{R_e A}{(1 + \bar{\lambda}^2)} \quad (\text{éq. 8.24.})$$

⁽³⁾ Rankine William John Macquorn (1820 - 1872) : ingénieur et physicien écossais.

8.6. Dimensionnement par "Euler - Rankine"

8.6.1. Principe

Pour le calcul de vérification de pièce soumise à flambement, il faudra comparer la contrainte existante dans le matériau (contrainte de compression), avec la contrainte admissible au flambement de ce matériau. Celle-ci étant définie par :

$$\sigma_{adm \text{ flambement}} = \frac{\sigma_{crit \text{ flambement}}}{S} \geq \sigma = \frac{N}{A} \quad (\text{éq. 8.25.})$$

Notation : S coefficient de sécurité -

Si nous remplaçons σ_{crit} les valeurs trouvées précédemment, nous pouvons en déduire les différentes formules de dimensionnement.

Si nous sommes dans les conditions de Rankine, nous trouvons :

$$\sigma_{adm \text{ flambement}} = \frac{\sigma_{crit \text{ Rankine}}}{S} = \left(\frac{R_e}{(1 + \bar{\lambda}^2)} \right) / S \geq \frac{N}{A} \Rightarrow \frac{R_e}{S} = \sigma_{adm \text{ compression}} \geq \frac{N}{A} (1 + \bar{\lambda}^2)$$

Si nous effectuons le même raisonnement avec les formules de Euler, nous trouvons :

$$\sigma_{adm \text{ flambement}} = \frac{\sigma_{crit \text{ Euler}}}{S} = \left(\frac{R_e}{\bar{\lambda}^2} \right) / S \geq \frac{N}{A} \Rightarrow \frac{R_e}{S} = \sigma_{adm \text{ compression}} \geq \frac{N}{A} \bar{\lambda}^2$$

Il reste le problème du coefficient de sécurité. De part les différentes incertitudes qui existent (de formules, de calculs, d'hypothèses et surtout d'inhomogénéité du matériau) nous devrions prendre un coefficient de sécurité supérieur au 1.5 classique que l'on prendrait pour de la compression. Cependant, le fait d'utiliser une majoration fictive de la charge via l'élanement réduit $\bar{\lambda}$ c'est déjà une sécurité. C'est pourquoi, nous pouvons continuer à utiliser le classique 1.5.

Pour la formule de Rankine ainsi que pour la formule d'Euler, nous prendrons :

$$S_{Rankine - Euler} \approx 1.5 \dots 1.7 \quad (\text{Voir Remarque 3}) \quad \S 8.6.3.)$$

8.6.2. Conception

A) Euler

$$N_{adm \text{ Euler}} = \frac{R_e A}{S_{Euler} \bar{\lambda}^2} \quad \text{avec :} \quad \bar{\lambda} = \frac{l_f / i_{g \text{ min}}}{\sqrt{\frac{\pi^2 E}{R_e}}} = \frac{l_f / \sqrt{I_{\text{min}} / A}}{\sqrt{\frac{\pi^2 E}{R_e}}}$$

d'où :

$$N_{adm \text{ Euler}} = \frac{\pi^2 E I_{\text{min}}}{S_{Euler} l_f^2}$$

$$\Rightarrow I_{\text{min}} \geq \frac{N S_{Euler} l_f^2}{\pi^2 E} \quad (\text{éq. 8.33.})$$

B) Rankine

$$N_{adm Rankine} = \frac{R_e A}{S_{Rankine} (1 + \bar{\lambda}^2)} \quad \text{et en remplaçant } \bar{\lambda}^2 \text{ par sa valeur :}$$

$$N_{adm Rankine} = \frac{A \pi^2 E}{S_{Rankine} \left(\frac{\pi^2 E}{R_e} + \frac{A l_f^2}{I_{min}} \right)}$$

Dans ce cas nous avons 2 inconnues : la section A et l'inertie minimale I_{min} . Il faut commencer par la formule d'Euler et, ensuite, vérifier par Rankine.

8.6.3. Résumé

Méthode de Rankine - Euler		
$0 \leq \lambda_{col} < 20$	$20 \leq \lambda_{col} < \lambda_{lim Euler}$	$\lambda_{lim Euler} \leq \lambda_{col} \leq 180 \dots 200$
Compression simple	Rankine	Euler
$\sigma = \frac{N}{A} < \sigma_{adm comp}$	$\sigma = \frac{N}{A} (1 + \bar{\lambda}^2) \leq \sigma_{adm Rankine}$	$\sigma = \frac{N}{A} \bar{\lambda}^2 \leq \sigma_{adm Euler}$
$\sigma_{adm comp} = \frac{R_e}{S_{comp}}$ ($S_{comp} \approx 1.5$)	$\sigma_{adm Rankine} = \frac{R_e}{S_{Rankine}}$ ($S_{Rankine} \approx 1.5 \dots 1.7$)	$\sigma_{adm Euler} = \frac{R_e}{S_{Euler}}$ ($S_{Euler} \approx 1.5 \dots 1.7$)
$N_{adm} = \sigma_{adm comp} A$ $= \frac{R_e A}{S_{comp}}$	$N_{adm} = \frac{\sigma_{adm Rankine} A}{(1 + \bar{\lambda}^2)}$ $= \frac{R_e A}{S_{Rankine} (1 + \bar{\lambda}^2)}$ $= \frac{\pi^2 E A}{S_{Rankine} \left(\lambda_{lim Euler}^2 + \frac{A l_f^2}{I_{min}} \right)}$	$N_{adm} = \frac{\sigma_{adm Euler} A}{\bar{\lambda}^2}$ $= \frac{R_e A}{S_{Euler} \bar{\lambda}^2}$ $= \frac{\pi^2 E I_{min}}{S_{Euler} l_f^2}$
Conception		
$A_{min} \geq \frac{N S_{comp}}{R_e}$ $\geq \frac{N}{\sigma_{adm}}$	Par approximation successive : $i_{g min} \geq \sqrt{\frac{l_f^2}{\left(\lambda_{lim Euler}^2 \left(\frac{\sigma_{adm} A}{N} - 1 \right) \right)}}$	$I_{min} \geq \frac{N S_{Euler} l_f^2}{\pi^2 E}$ $\geq \frac{N l_f^2 R_e}{\pi^2 E \sigma_{adm}}$

Remarques :

- 1) Cette méthode, ainsi que la formule d'Euler n'est pas applicable aux poteaux et butons en béton armé, en raison de la fissuration du béton ce qui a comme conséquence que l'inertie varie sur la longueur.

- 2) Lorsque l'on a le choix entre 2 profilés, car le moment d'inertie convient, il faut toujours prendre celui qui possède le rayon de giration le plus grand. En effet, voir § 4.5. **Rayon de giration**, le rayon de giration étant le rapport entre la rigidité à la flexion et la rigidité à la traction-compression, il vaut mieux, dans le cas du flambement, privilégier la rigidité à la flexion.
Autrement dit, pour le flambement, à même moment d'inertie, le profilé qui aura un rayon de giration supérieur résistera mieux au flambement.
- 3) En mécanique, on prendra un coefficient de sécurité, avec la formule d'Euler, plutôt de $S_{Euler\ mécanique} \approx 2 \dots 5 \dots$
- 4) Il est à remarquer que, suivant la formule d'Euler, la limite élastique de la matière utilisée pour le dimensionnement d'une poutre ou poteau au flambement n'intervient pas ! Seuls E, I_{min} ainsi que le coefficient de sécurité S utilisé interviennent dans le dimensionnement.
En fait, la limite élastique intervient uniquement pour déterminer si l'utilisation de la formule d'Euler est applicable.

8.7. Choix de la forme de la section

Afin de comparer un certain nombre de sections, on a introduit le rapport sans dimension w_{fb} :

$$w_{fb} = \frac{\sqrt{I_{min}}}{A} = \frac{i_{g\ min}}{\sqrt{A}} \quad (\text{éq. 8.56.})$$

<u>Notations</u> :	A	section critique de flambage	mm^2
	$i_{g\ min}$	rayon de giration minimum	mm

Les valeurs de w_{fb} pour différentes formes de sections sont consignées dans l'**Annexe 1 : Tableau 6.2**. Comme on pouvait s'y attendre, on constate que les sections les plus désavantageuses sont les sections rectangulaires, **les plus favorables** étant les **sections circulaires**, les **profils à larges ailes** et tout particulièrement les **sections annulaires**.

- ★ **Tableau des comparaisons résistance / poids de différentes sections soumises au flambement** (*Annexe 1 : Tableau 6.2. - Comparaison résistance / poids de différentes sections.*)

Application 8.1. Quelle sera la charge critique et la charge de sécurité que l'on pourra appliquer sur une colonne en fonte de diamètre 120 mm et de 2 m de longueur ? La résistance pratique est de 60 N/mm² et les extrémités sont articulées. Quel est le coefficient de sécurité appliqué ?

Les caractéristiques de cette fonte (MES 45-7) sont :

$$R_m = 450 \text{ N/mm}^2 ; R_e = 255 \text{ N/mm}^2 ; E = 180\,000 \text{ N/mm}^2 .$$

Solution :

Position du problème

Nous n'avons pas une structure métallique en acier, donc Rankine - Euler. Comme la colonne est cylindrique, tous les axes sont des ACPI et donc il n'y a pas "d'axe faible".

Vérifions si la théorie d'Euler est applicable

Longueur de flambement (extrémités bi-encastrée) (voir **Tab. 8.1.**) :

$$l_f = k_f l = 1 \times 2\,000 = 2\,000 \text{ mm}$$

Elancement de la colonne.

La colonne étant un cylindre les inerties seront égales quel que soit l'axe considéré et le rayon de giration vaudra :

$$i_{g \min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64} / \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{d}{4} = 30 \text{ mm}$$

Elancement de la colonne :

$$\lambda_{col} = \frac{l_f}{i_{g \min}} = \frac{2\,000}{30} = 66.7 < 83.5 \Rightarrow \text{Rankine}$$

Elancement réduit :

$$\lambda_{lim \text{ Euler}} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_e}} = \pi \times \sqrt{\frac{180\,000}{255}} = 83.5$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_{col}}{\lambda_{lim \text{ Euler}}} = \frac{66.7}{83.5} = 0.799$$

Recherche de la charge critique

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 120^2}{4} = 11\,310 \text{ mm}^2$$

$$N_{crit \text{ Rankine}} = \frac{R_e A}{(1 + \bar{\lambda}^2)} = \frac{255 \times 11\,310}{(1 + 0.799^2)} = 1760 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Recherche de la charge admissible

$$N_{adm} = \frac{\sigma_{adm \text{ Rankine}} A}{(1 + \bar{\lambda}^2)} = \frac{60 \times 11\,310}{(1 + 0.799^2)} = 414.2 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Le coefficient de sécurité est :

$$S = \frac{N_{crit \text{ Euler}}}{N_{adm}} = \frac{1761\,000}{414\,000} = 4.25$$

ou :

$$S = \frac{R_e}{\sigma_{adm}} = \frac{255}{60} = 4.25$$

Remarque :

On aurait pu aussi utiliser la formule :

$$N_{adm} = \frac{R_e A}{S_{Rankine} (1 + \bar{\lambda}^2)}$$

$$\Rightarrow S_{Rankine} = \frac{R_e A}{N_{adm} (1 + \bar{\lambda}^2)} = \frac{255 \times 11\,320}{414.2 \cdot 10^3 \times (1 + 0.799^2)} = 4.25$$

Application 8.2. Une vis à billes de diamètre à fond de filet $d = 32 \text{ mm}$ est guidée à une seule extrémité par deux roulement à billes. Elle est soumise de la part de l'écrou à une charge axiale de compression. L'écrou est au maximum à $l = 1000 \text{ mm}$ du palier. L'élanement critique de l'acier XC48 est : $\lambda_{\lim Euler} = 60$, sa résistance admissible de compression vaut $\sigma_{adm comp} = 150 \text{ MPa}$. Calculer la charge admissible sur la vis pour éviter le risque de flambage.

Solution :

Position du problème

Nous n'avons pas une structure métallique en acier, donc Rankine - Euler. Comme la barre est cylindrique, tous les axes sont des ACPI et donc il n'y a pas "d'axes faibles".

Hypothèses :

La vis est encastrée par rapport au bâti côté roulement, libre côté écrou (monté flottant).

Calcul de l'aire de la section droite :

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 32^2}{4} = 804.2 \text{ mm}^2$$

Calcul du moment d'inertie de flexion :

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \times 32^4}{64} = 5.14710^4 \text{ mm}^4$$

Calcul du rayon de giration :

$$i_g = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \frac{d}{4} = 8 \text{ mm}$$

Calcul de l'élanement de la vis

Dans notre cas la barre est simplement encastré (voir **Tab. 8.1.**) :

$$k_f = 2$$

$$\lambda_{col} = \frac{l_f}{i_g} = \frac{k_f l}{i_g} = \frac{2 \times 1000}{8} = 250 > 60 \Rightarrow \text{Euler}$$

Remarque :

Un élanement de plus de 180 ... 200 est critique et donc il faudrait revoir la conception du montage.

Calcul de la charge admissible

On nous donne une contrainte admissible en compression simple. Comme le coefficient de sécurité $S = 1.5$ aussi pour Euler, on peut prendre comme contrainte admissible celle donnée en compression simple, d'où la charge admissible sera :

$$N_{adm} = \frac{\sigma_{adm Euler} A}{\lambda^2} = \frac{150 \times 804.2}{(250/60)^2} = 6948 N \approx 6.9 kN$$

8.8. Dimensionnement suivant l' "EUROCODE"

8.8.1. Introduction

Dans les quelques notes qui suivent, nous nous contenterons de la vérification vis-à-vis du flambement simple (sous compression simple).

Tous les Eurocodes, dont l'Eurocode 3 (uniquement pour les structures en acier), utilisent la notion d'état limite pour caractériser les états au-delà desquels la structure ne satisfait plus aux performances exigées. Il y en a deux catégories :

- ▶ Les états limites ultimes (ELU) correspondant à la sécurité structurale. Ils sont associés à l'effondrement de la structure ou à d'autres formes de ruine structurale qui peuvent mettre en danger la sécurité des personnes;
- ▶ Les états limites de service (ELS) correspondant à l'aptitude de service. Ce sont les états au-delà desquels les critères spécifiés d'exploitation ne sont plus satisfaits :
 - a) déformations ou flèches affectant l'aspect ou l'exploitation efficace de la construction,
 - b) vibrations incommodes pour les occupants, endommageant le bâtiment ou limitant son efficacité fonctionnelle.

8.8.2. Vérification aux ELU

Remarque préliminaire :

Nous utiliserons ici les notations de l'EUROCODE.

<u>Notations :</u>	A	aire de la section transversale de la barre	mm^2
	A_{eff}	aire efficace de la section transversale	mm^2
	f_y	limite élastique de l'acier	$(= R_e \text{ ou } R_{p0,2})$ N/mm^2
	L_{cr}	longueur critique de flambement	$(= l_{fb})$ mm
	$N_{b,Rd}$	effort admissible pondéré dans la barre comprimée au flambement	$(= N_{adm} S)$ N
	N_{ed}	effort axial de calcul	$(= N)$ N
	N_{cr}	charge critique d'Euler	$(= N_{crit Euler})$ N
	$\chi_y \chi_z$	coefficient de réduction pour la courbe de flambement appropriée	-
	γ_{M1}	coefficient partiel de résistance des barres aux instabilités	$(= S)$ -
	$\lambda_y \lambda_z$	élancement de la barre	$(= \lambda_{col})$ -
	λ_1	élancement limite d'Euler	$(= \lambda_{lim Euler})$ -
	$i_y i_z$	rayons de giration selon les axes y et z	$(= i_{gy} \text{ ou } i_{gz})$ mm

Remarque supplémentaire :

La démarche de calcul ci-après est définie pour les sections de classe 1, 2 et 3. Pour les sections de classe 4, il faut remplacer dans les calculs ci-dessous A par A_{eff} .

★ **Tableau des rapports largeur/épaisseur maximaux pour les pièces de compression pour définir la classe de résistance.** (*Annexe 1 : Tableau 8.3.* - Rapports largeur/épaisseur maximaux pour les pièces de compression.)

Marche à suivre :

A) Conception : C'est-à-dire, trouver la poutrelle (colonne) adéquate en fonction de la charge.

- 1) Déterminer pour l'élément considéré, l'effort de compression de calcul N_{Ed} à partir de l'analyse globale de la structure.

$$N_{Ed} = 1.35 (\text{Charge permanente}) + 1.5 (\text{Charge mobile ou surcharge})$$

- 2) Déterminer la longueur de flambement L_{cr} de l'élément pour chaque plan $L_{cr,y}$, $L_{cr,z}$.

$$L_{cr} = k_f l$$

- 3) Sélectionner une section (forme, dimensions A , I_y , I_z , i_y , i_z) et une nuance d'acier ($S \dots$, f_y).
Pour une première approximation, démarrons avec la formule d'Euler de la méthode de "Rankine - Euler", soit :

$$I_{\min} \geq \frac{N_{Ed} S_{Euler} L_{cr, \min}^2}{\pi^2 E}$$

On prendra : $S_{Euler} = 1.5$.

- 4) Calculer les élancements de l'élément (même définition que l'éq. 8.8) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_y = \frac{L_{cr,y}}{i_y} \\ \lambda_z = \frac{L_{cr,z}}{i_y} \end{array} \right. \quad (\text{éq. 8.79.})$$

- 5) Déterminer l'élancement d'Euler (même définition que l'éq. 8.10) :

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (\text{éq. 8.80.})$$

- 6) Déterminer les élancements réduits de l'élément pour chaque plan (même définition que l'éq. 8.19) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\lambda}_y = \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \\ \bar{\lambda}_z = \frac{\lambda_z}{\lambda_1} \end{array} \right. \quad (\text{éq. 8.81.})$$

Remarques :

- 1) Si nous trouvons, lors de la première approximation, un élancement réduit inférieur à l'unité, la formule d'Euler n'étant pas valable, démarrons avec la formule de la compression simple, soit, toujours en prenant : $S = 1.5$.

$$A_{\min} = \frac{N_{Ed} S}{f_y}$$

Nouveau choix de profilé et retour au point 4).

- 2) Si $\bar{\lambda} \leq 0.2$ ou $N_{Ed}/N_{cr} \leq 0.04 \Rightarrow \chi = 1$ et donc compression simple.
- 7) Sélectionner la courbe de flambement appropriée (**Tab. 8.4.**) en fonction de la section transversale et la nuance d'acier.

★ **Tableau de la courbe de flambement en fonction des diverses sections des profilés.** (*Annexe 1 : Tableau 8.4. - Courbe de flambement en fonction des diverses sections des profilés.*)

- 8) Déterminer le facteur de réduction χ pour chaque plan de flambement, soit suivant le tableau **Tab. 8.5.**,

★ **Tableau des coefficient de réduction χ .** (*Annexe 1 : Tableau 8.5. - Coefficient de réduction χ*)

soit au moyen de la formule ci-dessous :

$$\chi = \frac{1}{\varphi + \sqrt{\varphi^2 - \bar{\lambda}^2}} \quad (\text{éq. 8.85.})$$

Avec :

$$\varphi = 0.5 \left(1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2 \right) \quad (\text{éq. 8.86.})$$

Où α est un facteur d'imperfection donné dans le tableau suivant :

★ **Tableau des facteurs d'imperfection** (*Annexe 1 : Tableau 8.6. - Facteurs d'imperfection.*)

- 9) Calculer la charge admissible $N_{b,Rd}$ de l'élément pour chaque plan de flambement.

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{by,Rd} = \frac{\chi_y A f_y}{\gamma_{M1}} \\ N_{bz,Rd} = \frac{\chi_z A f_y}{\gamma_{M1}} \end{array} \right. \quad (\text{éq. 8.87.})$$

Avec : $\gamma_{M1} = 1$ pour les bâtiments

- 10) Vérification :

$$N_{Ed} \leq \min(N_{by,Rd}; N_{bz,Rd}) \quad (\text{éq. 8.89.})$$

Si $N_{Ed} > \min(N_{by,Rd}; N_{bz,Rd})$ il faut une autre section, retour au point 3).

Un résumé sous forme d'organigramme ce trouve à la page suivante.

B) Vérification : C'est-à-dire, trouver la charge admissible connaissant la poutrelle (colonne).

La vérification au flambement n'est nécessaire que si :

$$\lambda > 0.2 \quad \text{et} \quad \frac{N_{Ed}}{N_{cr}} > 0.04$$

1) Rechercher les caractéristiques de la poutrelles dans le catalogue.

2) à 9) Même démarche que pour le "A) Conception" point 2) à 9).

10) Valeur de l'effort de compression :

$$N_{Ed} = \min(N_{by,Rd}; N_{bz,Rd}) \quad (\text{éq. 8.93.})$$

11) Valeur de l'effort admissible (permanent et/ou surcharge) :

$$N_{Ed} = 1.35 (\text{Charge permanente}) + 1.5 (\text{Charge mobile ou surcharge})$$

Un résumé sous forme d'organigramme ce trouve ci-dessous.

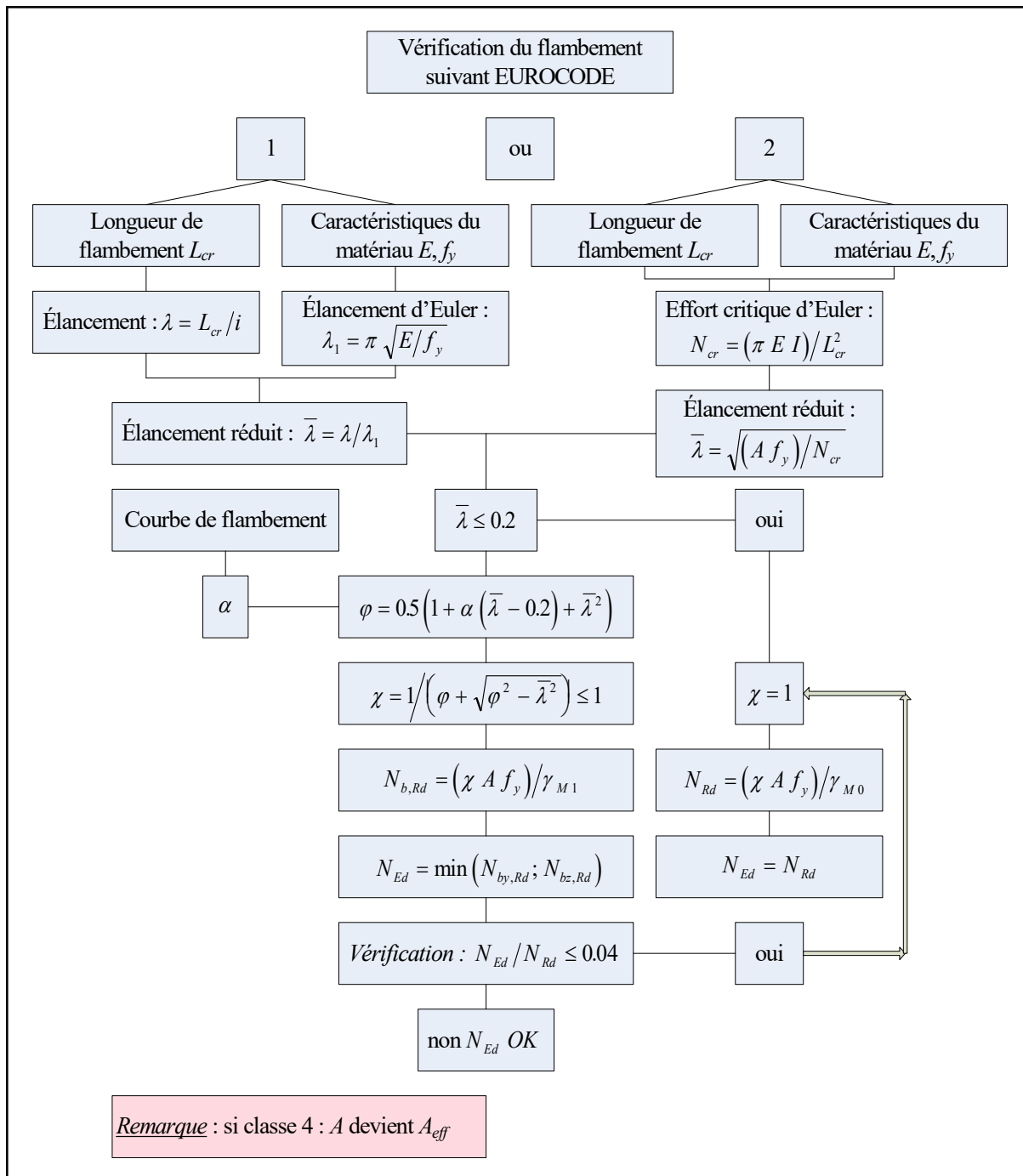


fig. 8.9. - Vérification au flambement d'une colonne suivant l'EUROCODE.

Application 8.3. Quelle section doit-on donner à une cornière “L” à branche égale, en S235, en position verticale, si celle-ci supporte un effort de compression N_{Ed} de 41 kN en bout ? Cette cornière est articulée aux deux extrémités et sa longueur est de 2.25 m. On ne prendra pas un “L” de classe 4.

Solution :

Position du problème

Nous avons une structure métallique en acier, donc EUROCODE. Il s’agit de déterminer la section de la poutrelle (conception = recherche de la poutrelle adéquate).

Comme la colonne est bi-articulée aussi bien suivant l’axe y que z que v ou même que u , nous devons prendre l’axe donnant le moment d’inertie minimum, soit ici l’axe v .

Déterminons un “L” de départ par la formule d’Euler de la méthode de “Rankine - Euler”

Colonne bi-articulée (voir **Tab. 8.1.**) :

$$L_{cr,v} = 1 \times 2250 = 2250 \text{ mm}$$

Prenons un coefficient de sécurité S_{Euler} de 1.5 :

Et, comme première approximation, l’inertie minimale à obtenir sera de :

$$I_v \geq \frac{N_{Ed} S_{Euler} L_{cr,v}^2}{\pi^2 E} = \frac{41000 \times 1.5 \times 2250^2}{\pi^2 \times 210000} = 150217 \text{ mm}^4 \approx 15 \text{ cm}^4$$

Recherche du “L” approprié

$$\Rightarrow \text{“L” de } 75 \times 75 \times 5 \quad \Rightarrow \quad I_v = 15.96 \text{ cm}^4 = 15.96 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\Rightarrow \text{“L” de } 70 \times 70 \times 6 \quad \Rightarrow \quad I_v = 15.16 \text{ cm}^4 = 15.16 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\Rightarrow \text{“L” de } 65 \times 65 \times 8 \quad \Rightarrow \quad I_v = 15.52 \text{ cm}^4 = 15.52 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Pour le calcul au flambement, le choix se portera sur le “L” qui aura le rayon de giration le plus grand, cependant, seule le “L” de 65 x 65 x 8 est de classe 3. En effet (voir **Tab 8.3.**) :

$$\begin{cases} h/t = 65/8 = 8.125 \leq 15 \varepsilon = 15 \times \sqrt{235/f_y} = 15 \quad OK \\ (b+h)/(2t) = 130/16 = 8.125 \leq 11.5 \varepsilon = 11.5 \quad OK \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{“L” de } 65 \times 65 \times 8 \quad \Rightarrow \quad A = 9.85 \text{ cm}^2 = 985 \text{ mm}^2$$

$$i_v = 1.26 \text{ cm} = 12.6 \text{ mm}$$

Recherche de χ

Elancement de la colonne :

$$\lambda_v = \frac{L_{cr,v}}{i_v} = \frac{2250}{12.6} = 178.57$$

Elancement réduit, connaissant l’élancement d’Euler (voir **Tab. 8.2.**) :

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_v}{\lambda_1} = \frac{178.57}{93.91} = 1.902$$

Recherche du coefficient de réduction χ :

Courbe (b) (voir **Tab. 8.4.**), au moyen des formules **éq. 8.85.** et **éq. 8.86.** :

$$\chi = 0.229$$

Recherche de la charge admissible

$$N_{bv,Rd} = \frac{\chi_v A f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0.229 \times 985 \times 235}{1} = 53007 \text{ N} \approx 53 \text{ kN} \geq 41 \text{ kN}$$

Ce résultat est, bien sûr correct. Cependant, il est supérieur de plus de 20 % à la charge à

supporter. On pourrait donc envisager une poutrelle de caractéristiques inférieures. Soit :
65 x 65 x 7.

Re - calcul avec un "L" de 65 x 65 x 7

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{"L"} \text{ de } 65 \times 65 \times 7 &\Rightarrow A = 8.70 \text{ cm}^2 = 8.70 \cdot 10^2 \text{ mm}^2 \\ &i_v = 1.26 \text{ cm} = 12.6 \text{ mm} \\ &I_v = 13.78 \text{ cm}^4 = 13.78 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Recherche de χ

Elancement de la colonne :

$$\lambda_v = \frac{L_{cr,v}}{i_v} = \frac{2250}{12.6} = 178.57$$

Elancement réduit, connaissant l'élancement d'Euler (voir **Tab. 8.2.**) :

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_v}{\lambda_1} = \frac{178.57}{93.91} = 1.902$$

Recherche du coefficient de réduction χ :

Courbe (b) (voir **Tab. 8.4.**), au moyen des formules **éq. 8.85.** et **éq. 8.86.** :

$$\chi = 0.229$$

Recherche de la charge admissible pondérée

$$N_{bv,Rd} = \frac{\chi_v A f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0.229 \times 870 \times 235}{1} = 46819 \text{ N} \approx 46.8 \text{ kN} \geq 41 \text{ kN} \quad \text{OK}$$

Ok : un 65 x 65 x 7.

Application 8.4. Calculer la charge permanente admissible au flambage d'une colonne constitué par une poutrelle IPN 160 en S235 de 4 m de hauteur encastrée aux deux extrémités. Dans ces conditions quelle est la contrainte dans cette colonne ?

Solution :

Position du problème

Nous avons une structure métallique en acier, donc EUROCODE. Comme nous connaissons la poutrelle, il s'agit d'une vérification (recherche de la charge admissible).

La colonne est encastrée aussi bien suivant l'axe y que z, nous pouvons seulement calculer la charge suivant l'axe faible, donc l'axe z.

Les caractéristiques de la poutrelle IPN 160 sont (catalogue) :

$$\begin{aligned} &160 \times 74 \times 6.3 \times 9.5 \\ &A = 22.8 \text{ cm}^2 = 22.8 \cdot 10^2 \text{ mm}^2 \\ &i_z = 1.55 \text{ cm} = 15.5 \text{ mm} \\ &I_z = 54.7 \text{ cm}^4 = 54.7 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \\ &\left. \begin{aligned} h/b &= 160/74 \geq 1.2 \\ t_f &= 9.5 \leq 40 \text{ mm} \end{aligned} \right\} \text{ courbe (b)} \\ &\text{Classe 1} \end{aligned}$$

Recherche de χ

Colonne bi-encastrée (voir **Tab. 8.1.**) :

$$L_{cr,z} = 0.5 \times 4000 = 2000 \text{ mm}$$

Elancement de la colonne :

$$\lambda_z = \frac{L_{cr,z}}{i_z} = \frac{2000}{15.5} = 129.03$$

Elancement réduit, connaissant l'élancement d'Euler (voir **Tab. 8.2.**) :

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_z}{\lambda_1} = \frac{129.03}{93.91} = 1.374$$

Recherche du coefficient de réduction χ :

Courbe (b) (voir **Tab. 8.4.**), au moyen des formules **éq. 8.85.** et **éq. 8.86.** :

$$\chi = 0.393$$

Recherche de la charge admissible

$$N_{bz,Rd} = \frac{\chi_z A f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0.393 \times 22.8 \cdot 10^2 \times 235}{1} = 210569 \text{ N} \approx 210.6 \text{ kN}$$

La charge permanente admissible devient :

$$N_{adm} = \frac{N_{bz,Rd}}{1.35} = \frac{210.6}{1.35} = 156.0 \text{ kN}$$

Calcul de la contrainte

$$\sigma = \frac{N_{adm}}{A} = \frac{156.0 \cdot 10^3}{22.8 \cdot 10^2} = 68.4 \text{ N/mm}^2$$

Ce qui revient à un coefficient de sécurité de :

$$S = \frac{f_y}{\sigma} = \frac{235}{68.4} = 3.4$$

Ce qui est strictement équivalent à :

$$S = 1.35 \left(\frac{\chi_z}{\gamma_1} \right)^{-1} = 1.35 \left(\frac{0.393}{1} \right)^{-1} = 3.4$$

Application 8.5. Une colonne d'une structure métallique est constituée d'une poutrelle HEB (en S355) de 4 m de hauteur et encastrée aux deux extrémités. Déterminez cette poutrelle si celle-ci doit supporter une charge permanente de 1630 kN.

Solution :

Position du problème

Nous avons une structure métallique en acier, donc EUROCODE. Il s'agit de déterminer la section de la poutrelle (conception = recherche de la poutrelle adéquate).

Comme la colonne est bi-encastrée aussi bien suivant l'axe y que suivant l'axe z, nous devons prendre l'axe donnant le moment d'inertie minimum, soit ici l'axe z.

Valeur de l'effort de compression

$$N_{Ed} = 1.35 (\text{charge permanente}) = 1.35 \times 1630 = 2200 \text{ kN}$$

Déterminons un "HEB" de départ par la formule d'Euler de la méthode de "Rankine - Euler"

Colonne bi-encastrée (voir **Tab. 8.2.**) :

$$L_{cr,z} = 1 \times 4000 = 2000 \text{ mm}$$

Prenons un coefficient de sécurité S_{Euler} de 1.5 :

Et, comme première approximation, l'inertie minimale à obtenir sera de :

$$I_z \geq \frac{N_{Ed} S_{Euler} L_{cr,z}^2}{\pi^2 E} = \frac{2200 \cdot 10^3 \times 1.5 \times 2000^2}{\pi^2 \times 210000} = 6368.8 \cdot 10^3 \text{ mm}^4 \approx 636.9 \text{ cm}^4$$

Recherche du "HEB" approprié

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{HEB 160} \quad \Rightarrow \quad & A = 54.3 \text{ cm}^2 = 54.3 \cdot 10^2 \text{ mm}^2 \\ & i_z = 4.05 \text{ cm} = 40.5 \text{ mm} \\ & I_z = 8892 \text{ cm}^4 = 8892 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \\ & h/b = 160/160 \leq 1.2 \\ & t_f = 13 \leq 100 \text{ mm} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \Rightarrow \text{HEB 160} \quad \Rightarrow \quad} \right\} \text{ courbe (c)}$$

Classe 1

Recherche de χ

Colonne bi-encastée (voir **Tab. 8.1.**) :

$$L_{cr,z} = 0.5 \times 4000 = 2000 \text{ mm}$$

Elancement de la colonne :

$$\lambda_z = \frac{L_{cr,z}}{i_z} = \frac{2000}{40.5} = 49.4$$

Elancement réduit, connaissant l'élancement d'Euler (voir **Tab. 8.2.**) :

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_z}{\lambda_1} = \frac{49.4}{76.41} = 0.6463$$

Remarque importante :

On remarque que l'élancement réduit est inférieur à l'unité. Ce qui a pour conséquence que la formule d'Euler n'est pas valable. Il faudrait utiliser la formule de Rankine. Cependant l'application de celle-ci ne permet pas d'avoir directement une solution. Nous utiliserons donc la formule classique de la compression simple pour cette première approximation.

Déterminons un "HEB" de départ par la formule de la "compression simple", avec $S = 1.5$

$$A = \frac{N_{Ed} S}{f_y} = \frac{2200 \cdot 10^3 \times 1.5}{355} = 9296 \text{ mm}^2 \approx 93 \text{ cm}^2$$

Recherche du "HEB" approprié

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{HEB 240} \quad \Rightarrow \quad & A = 106 \text{ cm}^2 = 106 \cdot 10^2 \text{ mm}^2 \\ & i_z = 6.08 \text{ cm} = 60.8 \text{ mm} \\ & h/b = 240/240 \leq 1.2 \\ & t_f = 17.5 \leq 100 \text{ mm} \end{aligned}$$

Classe 1

Recherche de χ

Elancement de la colonne :

$$\lambda_z = \frac{L_{cr,z}}{i_z} = \frac{2000}{60.8} = 32.89$$

Elancement réduit, connaissant l'élancement d'Euler (voir **Tab. 8.2.**) :

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_z}{\lambda_1} = \frac{32.89}{76.81} = 0.4282$$

Recherche du coefficient de réduction χ :

Courbe (c) (voir **Tab. 8.4.**), au moyen des formules **éq. 8.85.** et **éq. 8.86.** :

$$\chi = 0.882$$

Recherche de la charge admissible pondérée de compression

$$N_{bz,Rd} = \frac{\chi_z A f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0.882 \times 106 \cdot 10^2 \times 355}{1} = 3318966 \text{ N} \approx 3319 \text{ kN} \geq 2200 \text{ kN}$$

Ce résultat est, bien sûr correct. Cependant, il est supérieur de plus de 50 % à la charge à supporter. On doit donc envisager une poutrelle de caractéristiques inférieures.

Les caractéristiques de la HEB 220 sont encore fort proche de la HEB 240, on prendra une HEB 200.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{HEB 200} \quad \Rightarrow \quad & A = 78.1 \text{ cm}^2 = 78.1 \cdot 10^2 \text{ mm}^2 \\ & i_z = 5.07 \text{ cm} = 50.7 \text{ mm} \\ & h/b = 200/220 \leq 1.2 \\ & t_f = 15 \leq 100 \text{ mm} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \Rightarrow \text{HEB 200} \quad \Rightarrow \quad} \right\} \text{ courbe (c)}$$

Classe 1

Recherche de χ

Elancement de la colonne :

$$\lambda_z = \frac{L_{cr,z}}{i_z} = \frac{2000}{50.7} = 39.45$$

Elancement réduit, connaissant l'élancement d'Euler (voir **Tab. 8.2.**) :

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_z}{\lambda_1} = \frac{39.45}{76.81} = 0.5136$$

Recherche du coefficient de réduction χ :

Courbe (c) (voir **Tab. 8.4.**), au moyen des formules **éq. 8.85.** et **éq. 8.86.** :

$$\chi = 0.882$$

Recherche de la charge admissible pondérée

$$N_{bz,Rd} = \frac{\chi_z A f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0.882 \times 78.1 \cdot 10^2 \times 355}{1} = 2445389 \text{ N} \approx 2445 \text{ kN} \geq 2200 \text{ kN}$$

Ok : HEB 200

Application 8.6. Une barre de charpente est formée par deux cornières à branches égales accolées “┘┐” en S235. Elle a une longueur de 1.7 m et supporte un effort axial pondéré N_{Ed} de 57.5 kN. Quelles dimensions de cornières faut-il adopter si on considère que la barre est articulée au deux extrémités ?

Solution :

Position du problème

Nous avons une structure métallique en acier, donc EUROCODE. Il s'agit de déterminer la section de la poutrelle (conception = recherche de la poutrelle adéquate).

L'axe faible de cette barre de charpente est ici l'axe y. En effet, pour l'axe y, le moment d'inertie total est 2 x le moment d'inertie d'une seule poutrelle. Pour l'axe z, on doit faire, en plus un transport qui va d'office donner un moment d'inertie supérieur.

Déterminons un "L" de départ par la formule d'Euler de la méthode de "Rankine - Euler"

Colonne bi-articulée (voir **Tab. 8.1.**) :

$$L_{cr,y} = 1 \times 1700 = 1700 \text{ mm}$$

Prenons un coefficient de sécurité S_{Euler} de 1.5 :

Et, comme première approximation, l'inertie minimale à obtenir sera de :

$$I_y \geq \frac{N_{Ed} S_{Euler} L_{cr,y}^2}{\pi^2 E} = \frac{57500 \times 1.5 \times 1700^2}{\pi^2 \times 210000} = 120.310^3 \text{ mm}^4 \approx 12 \text{ cm}^4$$

C'est l'inertie minimale à obtenir pour les 2 cornières.

L'inertie minimales de 2 cornières accolées est celle par rapport à un axe horizontal, passant par leur centre de gravité, et dans ce cas l'inertie d'une cornière est la moitié du total, soit 6 cm^4 .

Recherche du "L" approprié

$$\Rightarrow \text{"L"} \text{ de } 45 \times 45 \times 4 \Rightarrow A = 3.49 \text{ cm}^2 = 3.49 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$$

$$i_y = 1.36 \text{ cm} = 13.6 \text{ mm}$$

$$I_y = 6.43 \text{ cm}^4 = 6.43 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Classe 3 : vérification :

$$\begin{cases} h/t = 45/4 = 11.25 \leq 15 \varepsilon = 15 \times \sqrt{235/f_y} = 15 \quad \text{OK} \\ (b+h)/(2t) = 90/8 = 11.25 \leq 11.5 \varepsilon = 11.5 \quad \text{OK} \end{cases}$$

Recherche de χ

Élancement de la colonne (complète avec les "L" accolés) :

Remarque importante :

Pour le rayon de giration de 2 cornières "L" **il ne faut pas** prendre 2 fois le rayon de giration d'une seule cornière "L" ! En effet :

$$i_{y(2L)} = \sqrt{\frac{2 I_y}{2 A}} = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = i_{y(L)}$$

D'où :

$$\lambda_y = \frac{L_{cr,y}}{i_y} = \frac{2250}{13.6} = 165.44$$

Élancement réduit, connaissant l'élancement d'Euler (voir **Tab. 8.2.**) :

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_y}{\lambda_1} = \frac{165.44}{93.91} = 1.762$$

Recherche du coefficient de réduction χ :

Courbe (b) (voir **Tab. 8.4.**), au moyen des formules **éq. 8.85.** et **éq. 8.86.** :

$$\chi = 0.262$$

Recherche de la charge admissible pondérée

$$N_{by,Rd} = \frac{\chi_y A f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0.262 \times (2 \times 349) \times 235}{1} = 42976 \text{ N} \approx 43.0 \text{ kN} \geq 57.5 \text{ kN} \quad \text{KO}$$

Ce résultat n'est pas correct.

Re - calcul avec un "L" de 45 x 45 x 6

$$\Rightarrow \text{"L"} \text{ de } 45 \times 45 \times 6 \Rightarrow A = 5.09 \text{ cm}^2 = 5.09 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$$

$$i_y = 1.34 \text{ cm} = 13.4 \text{ mm}$$

$$I_y = 9.16 \text{ cm}^4 = 9.16 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Classe 3

D'où :

$$\lambda_y = \frac{L_{cr,y}}{i_y} = \frac{2250}{13.4} = 167.91$$

Elancement réduit, connaissant l'élancement d'Euler (voir **Tab. 8.2**) :

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_y}{\lambda_1} = \frac{167.91}{93.91} = 1.788$$

Recherche du coefficient de réduction χ :

Courbe (b) (voir **Tab. 8.4**), au moyen des formules **éq. 8.85** et **éq. 8.86** :

$$\chi = 0.255$$

Recherche de la charge admissible pondérée

$$N_{by,Rd} = \frac{\chi_y A f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0.255 \times (2 \times 509) \times 235}{1} = 61004 \text{ N} \approx 61.0 \text{ kN} \geq 57.5 \text{ kN} \quad \text{OK}$$

Ok : deux "L" 45 x 45 x 6.

Application 8.7. Une colonne constituée d'un IPN 280, en S235, a une hauteur de 6 m. Il est entretoisée à mi-hauteur dans le sens du moment d'inertie le plus faible. Quelle charge permanente peut-elle supporter, en supposant que les extrémités sont articulées ?

Solution :

Position du problème

Nous avons une structure métallique en acier, donc EUROCODE. Comme nous connaissons la poutrelle, il s'agit d'une vérification (recherche de la charge admissible).

La colonne est articulée aussi bien suivant l'axe y que z . Seulement, les longueurs (de flambement) sont différentes suivant les 2 axes. A priori, on ne connaît donc pas l'axe de flambement le plus défavorable. Il faudrait dès lors vérifier aussi bien suivant l'axe y que z .

Cependant, le flambement s'effectuera suivant l'axe ayant l'élancement le plus grand.

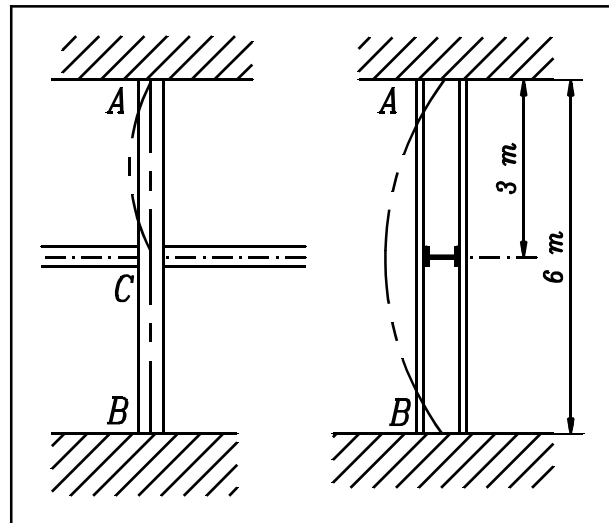


fig. 8.10. - Application 8.7.

Les caractéristiques de la poutrelle IPN 280 sont (catalogue) :

$$280 \times 119 \times 10.1 \times 15.2$$

$$A = 61.0 \text{ cm}^2 = 61.0 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$$

$$i_y = 11.1 \text{ cm} = 111 \text{ mm}$$

$$i_z = 2.45 \text{ cm} = 24.5 \text{ mm}$$

$$I_y = 7590 \text{ cm}^4 = 7590 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 364 \text{ cm}^4 = 364 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\left. \begin{array}{l} h/b = 280/119 \geq 1.2 \\ t_f = 15.2 \leq 40 \text{ mm} \end{array} \right\} \text{ courbe (b)}$$

Classe 1

Recherche de l'élancement le plus grand

a) Elancement suivant l'axe z (axe faible)

Colonne bi-articulée (voir **Tab. 8.1.**) :

$$L_{cr,z} = 1 \times 3000 = 3000 \text{ mm}$$

$$\lambda_z = \frac{L_{cr,z}}{i_z} = \frac{3000}{24.5} = 122.45$$

b) Elancement suivant l'axe y (axe fort)

Colonne bi-articulée :

$$L_{cr,y} = 1 \times 6000 = 6000 \text{ mm}$$

$$\lambda_y = \frac{L_{cr,y}}{i_y} = \frac{6000}{111} = 54.05$$

Recherche de χ (suivant l'axe z)

Elancement réduit, connaissant l'élancement d'Euler (voir **Tab. 8.2.**) :

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_z}{\lambda_1} = \frac{122.45}{93.91} = 1.304$$

Courbe (b) (voir **Tab. 8.4.**), au moyen des formules **éq. 8.85.** et **éq. 8.86.** :

$$\chi = 0.425$$

Recherche de la charge admissible

$$N_{bz,Rd} = \frac{\chi_z A f_z}{\gamma_{M1}} = \frac{0.425 \times 61.0 \cdot 10^2 \times 235}{1} = 609\,238 \text{ N} \approx 609.2 \text{ kN}$$

La charge permanente admissible devient :

$$N_{adm} = \frac{N_{bz,Rd}}{1.35} = \frac{609.2}{1.35} = 451.3 \text{ kN}$$

8.8.3. Note concernant les fontes

L'EUROCODE 3 ne traite pas les fontes. On peut cependant utiliser la méthode EUROCODE en adaptant le coefficient α afin de déterminer le facteur de réduction χ . En fait, la fonte, dans la méthode "classique" (ancienne), le facteur χ est égal à : $\chi = 1 / \left(1 + \bar{\lambda}^2 \right)$ (Rankine). Si on veut adopter la méthode EUROCODE pour la fonte, il faut prendre $\alpha = (0.8) \dots 1 \dots (1.2)$ pour ensuite calculer χ .

Application 8.8. Reprenons le problème de l'**Application 8.1.** Quelle sera la charge admissible permanente (suivant un calcul EUROCODE) que l'on pourra appliquer sur une colonne en fonte de diamètre 120 mm et de 2 m de longueur ? Les extrémités sont articulées. Quel est le coefficient de sécurité appliqué par rapport à la limite élastique ?

Les caractéristiques de cette fonte (MES 45-7) sont :

$$R_m = 450 \text{ N/mm}^2 ; R_e = f_y = 255 \text{ N/mm}^2 ; E = 180\,000 \text{ N/mm}^2 .$$

Solution :

Position du problème

Comme la colonne est cylindrique, tous les axes sont des ACPI et donc il n'y a pas "d'axe faible".

Caractéristiques de la colonne :

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 120^2}{4} = 11310 \text{ mm}^2$$

La colonne étant un cylindre les inerties seront égales quel que soit l'axe considéré et le rayon de giration vaudra :

$$i_g = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64} / \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{d}{4} = 30 \text{ mm}$$

Recherche de χ

Colonne bi-articulée :

$$L_{cr} = 1 \times 2\,000 = 2\,000 \text{ mm}$$

Elancement de la colonne :

$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i_g} = \frac{2\,000}{30} = 66.67$$

Elancement réduit :

$$\lambda_{lim \text{ Euler}} = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} = \pi \times \sqrt{\frac{180\,000}{255}} = 83.47$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_{col}}{\lambda_{lim \text{ Euler}}} = \frac{66.67}{83.47} = 0.799$$

Recherche du coefficient de réduction χ :

Prenons $\alpha = 1$ et au moyen des formules **éq. 8.85.** et **éq. 8.86.** nous trouvons :

$$\chi = 0.526$$

Recherche de la charge admissible

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0.526 \times 11310 \times 255}{1} = 1517\,010 \text{ N} \approx 1517 \text{ kN}$$

(A comparer avec les 1760 kN obtenu par avant)

La charge permanente admissible devient :

$$N_{adm} = \frac{N_{b,Rd}}{1.35} = \frac{1517}{1.35} = 1123 \text{ kN}$$

Calcul de la contrainte

$$\sigma = \frac{N_{adm}}{A} = \frac{1123 \cdot 10^3}{11310} = 99.3 \text{ N/mm}^2$$

Ce qui revient à un coefficient de sécurité de :

$$S = \frac{f_y}{\sigma} = \frac{255}{99.3} = 2.6$$

Ce qui est strictement équivalent à :

$$S = 1.35 \left(\frac{\chi}{\gamma_1} \right)^{-1} = 1.35 \left(\frac{0.526}{1} \right)^{-1} = 2.6$$

8.9. Flambage - Flexion

8.9.1. Théorie - Equation

Il s'agit, dans ce cas, d'une poutre idéale rectiligne, soumise simultanément à un effort normal N et à un moment fléchissant M_0 .

En comparaison au flambement simple, il y a dans ce cas une amplification de la déformée et donc des contraintes de flexion et de compression.

Si les déformations sont faibles devant les dimensions de la section, les contraintes dans la barre peuvent être déterminées par le principe de l'indépendance de l'effet des forces, c'est-à-dire isolément pour la charge longitudinale qui provoque le flambement d'après la formule :

$$\sigma_1 = \frac{N}{A}$$

et isolément pour la charge transversale qui provoque la flexion d'après la formule :

$$\sigma_2 = \pm \frac{M_0}{W_x}$$

où M_0 est le moment fléchissant dû seulement à la charge transversale et W_x le module de résistance à la flexion de la poutre dans le sens de la flexion.

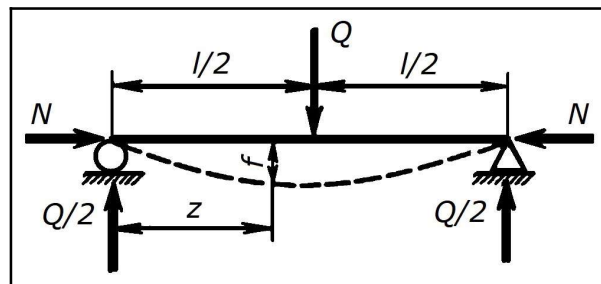


fig. 8.11. - Cas de flexion - flambement.

Les contraintes globales sont données par la formule bien connue :

$$\sigma = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_0}{W_x}$$

Pourtant, avec la croissance de l'élanement de la barre on ne peut déjà plus négliger l'influence de la flèche sur la croissance du moment fléchissant sous l'action de la force normale.

En pratique, on multipliera le moment dû à la charge transversale Q par un facteur d'amplification r , facteur fonction du genre d'appuis ainsi que du chargement transversal.

Dès lors, la formule concernant la contrainte devient :

$$\sigma_{comp} = \frac{N}{A} + \frac{M_0}{W_x} r \quad (\text{éq. 8.204.})$$

Les résultats, concernant le facteur r , pour les cas usuels, ainsi que les flèches maximales, sont rassemblés dans le tableau ci-après :

★ **Coefficients d'amplification des moments r et flèche correspondante maximale.** (*Annexe 1 : Tableau 8.7. - Coefficients d'amplification des moments r et flèche correspondante*)

maximale.)

Cette dernière formule (éq. 8.204.) entraîne que les contraintes augmentent plus vite que les charges. En effet, si on admet que la croissance des charges transversale et axiale est proportionnelle à celle de l'un quelconque paramètre, disons, de S fois, alors f_0 augmente également de S fois, et le dernier terme de la formule éq. 8.204. augmente non pas proportionnellement à S , mais bien plus vite. C'est pourquoi dans le cas de flambement avec flexion simple le calcul à la résistance ne peut pas se faire d'après les contraintes admissibles. Il doit se faire d'après les *charges limites*, en déterminant les valeurs des forces qui poussent la contrainte au point dangereux de la section droite jusqu'à la limite d'écoulement. En divisant cette valeur par le coefficient de sécurité imposé, on trouve la charge admissible.

En vérifiant la barre à la résistance, on détermine le coefficient de sécurité réel et on le compare à sa valeur imposée. Le calcul du coefficient de sécurité réel se fait en admettant que la formule éq. 8.204. soit valable jusqu'au début de l'écoulement, et au cours de l'augmentation des forces extérieures la relation entre les charges transversale et longitudinale ne change pas. (La sollicitation de cette forme est dite simple.) En vertu de la formule éq. 8.204., ces prémisses permettent d'écrire :

$$R_e = \frac{N S}{A} + \frac{M_0 S}{W_x} r \quad (\text{éq. 8.205.})$$

où S est le nombre qui montre de combien de fois doivent augmenter les forces extérieures pour que les contraintes au point dangereux deviennent égales à la limite élastique; autrement dit, c'est le coefficient de sécurité réel suivant les charges.

Et, dans ce cas, r se retrouve bien aussi dans le **Tableau 8.7.** mais, cette fois-ci, en remplaçant t par t' :

$$t' = \sqrt{\frac{N S l}{E I 2}} \quad (\text{éq. 8.206.})$$

Le coefficient de sécurité S se détermine en appliquant cette formule par approximations successives.

En étudiant diverses variations types du moment M_0 on établit, théoriquement, que l'influence de N sur la valeur de M_0 , peut se traduire en faisant apparaître un *coefficient multiplicateur moyen* ayant pour valeur :

$$r = 1 + \frac{N}{N_{crit Euler} - N} \quad (\text{éq. 8.207.})$$

Avec : $N_{crit Euler} = \frac{\pi^2 E I}{l_f^2}$ la charge critique d'Euler de la poutre.

8.9.2. Principe de superposition

Le **Tableau 8.7.** Montre que, si la force de compression N reste constante, t à une valeur fixe. Comme l'équation différentielle qui a permis d'établir les différentes formules est linéaire, la somme de 2 de ses solutions (à N constant) est encore une solution. Il s'ensuit que, en

additionnant les solutions pour 2 poutres identiques comprimées axialement par la *même* charge N et sollicitées transversalement par des charges y produisant des moments M_{01} et M_{02} respectivement, on obtient la solution pour la poutre sollicitée par la charge N par :

$$\sigma_{comp} = \frac{N}{A} + \frac{M_{0\max}}{W_x} = \frac{N}{A} + \frac{(M_{01} r_1 + M_{02} r_2)}{W_x} \quad (\text{éq. 8.209.})$$

Ce principe peut être considéré comme *un principe de superposition généralisé*.

Ainsi, par exemple, dans le cas représenté ci-dessous, on trouvera à l'aide des formules du **Tableau 8.7.** lignes b et c1 :

$$M_{0\max} = \left(Q \frac{l}{4} \right) \left(\frac{\tan t}{t} \right) + (M_0) \left(\frac{1}{\cos t} \right)$$

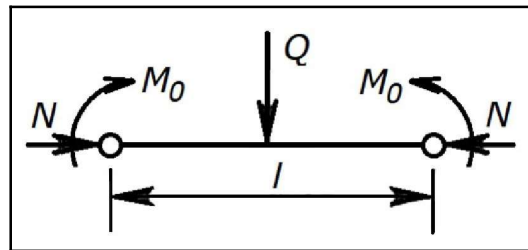


fig. 8.12. - Exemple du principe de superposition.

Application 8.9. Un profilé HEB 300 en S235, encastré en A et libre de se déplacer en B dans le plan (x, y) supporte une charge excentrée F de 300 kN (excentration $e = 300$ mm). Déterminez la contrainte de compression maximale dans la colonne. Quelle est la charge maximale tolérable et le coefficient de sécurité adopté ? Quelle est dès lors la flèche prise par l'extrémité libre ?

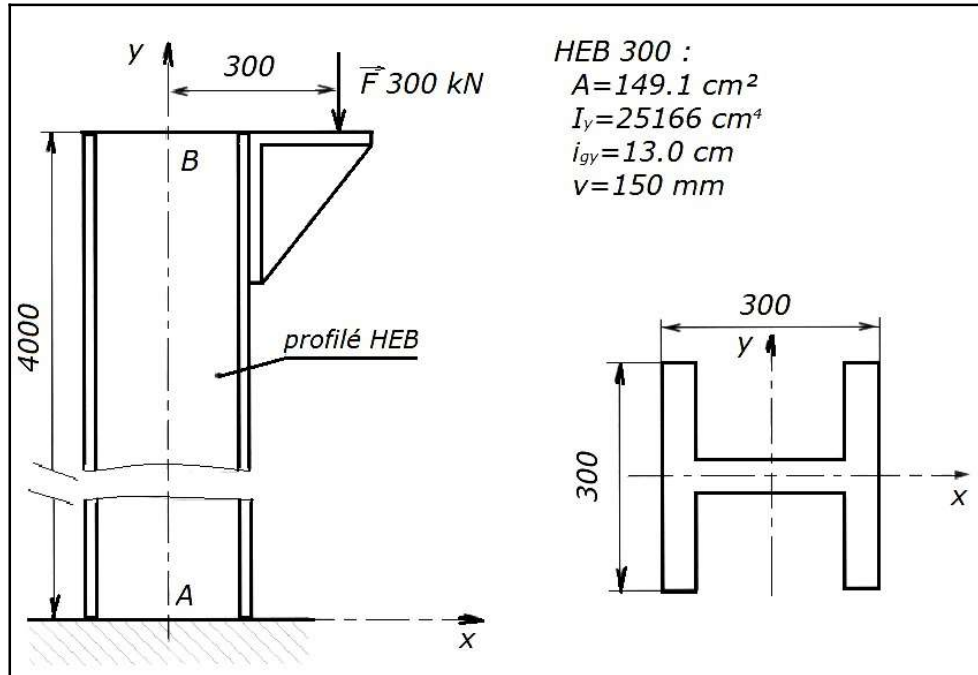


fig. 8.13. - Application 8.9.

Solution :

Nous sommes bien ici dans le cas d'une charge excentrée : c'est le cas *d* du **Tableau 8.7.**

a) *Contrainte maximum*

La contrainte maximale, à l'encastrement, est donnée par la formule :

$$\sigma_{comp} = \frac{N}{A} + \frac{N e}{(I_y/v)} r$$

Remarque :

Le flambement s'effectuera suivant l'axe y.

Avec :

$$r = \frac{1}{\cos(k l)}$$

$$k l = \sqrt{\frac{N}{E I_y}} l = \sqrt{\frac{300000}{210000 \times 25166 \cdot 10^4}} \times 4000 = 0.3014$$

$$\Rightarrow \cos(k l) = 0.9549$$

Et donc :

$$\sigma_{comp} = \frac{300000}{149.1 \cdot 10^2} + \frac{300000 \times 300}{(25166 \cdot 10^4 / 150)} \times \frac{1}{0.9549} = 76.3 \text{ N/mm}^2$$

Calculons cette contrainte de compression avec r approximé. Soit :

$$1 + \frac{N}{N_{crit Euler} - N}$$

Dans notre cas, $N_{crit Euler}$ vaut, avec la longueur de flambement :

$$l_f = k_f l = 2 \times 4 = 8 \text{ m}$$

$$N_{crit Euler} = \pi^2 \frac{E I_y}{l_f^2} = \pi^2 \frac{210\,000 \times 251\,661\,10^4}{8\,000^2} = 8\,149\,918.4 \text{ N}$$

D'où :

$$r = 1 + \frac{300\,000}{8\,149\,918.4 - 300\,000} = 1.038$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \sigma_{comp} &= \frac{300\,000}{149.110^2} + \frac{300\,000 \times 300}{(251\,661\,10^4 / 150)} \times 1.038 \\ &= 75.8 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Quasiment le même résultat.

b) Coefficient de sécurité

La charge maximale admissible doit être calculée à partir de la formule **éq. 8.205**, et non à partir du rapport R_e/σ , car il n'y a pas linéarité de la relation entre la contrainte σ et la force N et avec

$$N S = N_{max}$$

$$R_e = \frac{N_{max}}{149.110^2} + \frac{N_{max} \times 300}{(251\,661\,10^4 / 150)} \times \frac{1}{\cos(k' l)}$$

$$k' l = \sqrt{\frac{N_{max}}{E I_y}} l = \sqrt{\frac{N_{max}}{210\,000 \times 251\,661\,10^4}} \times 4\,000$$

$$\text{avec : } R_e = 235 \text{ N/mm}^2$$

Notre inconnue est alors N_{max} .

$$\text{Après calcul, par itération successive, on obtient : } N_{max} = 863.5 \text{ kN}$$

$$\text{et le coefficient de sécurité } S \text{ est égal à : } S = 863.5/300 = 2.88$$

c) Vérification au flambement dans le plan xx

Il existe aussi un risque de flambement dans le plan perpendiculaire à celui que nous avons calculé. Il s'agit, dans ce cas, de flambement simple. Utilisons la méthode EUROCODE. Il s'agit d'une vérification (recherche de la charge admissible).

Les caractéristiques de la poutrelle HEB 300 sont (catalogue) :

$$i_z = 7.58 \text{ cm} = 75.8 \text{ mm}$$

$$I_z = 8543 \text{ cm}^4 = 8543 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\left. \begin{aligned} h/b &= 300/300 \leq 1.2 \\ t_f &= 19 \leq 100 \text{ mm} \end{aligned} \right\} \text{ courbe (c)}$$

Recherche de χ

Colonne simplement encastrée (voir **Tab. 8.1**) :

$$L_{cr,z} = 2 \times 4\,000 = 8\,000 \text{ mm}$$

Elancement de la colonne :

$$\lambda_z = \frac{L_{cr,z}}{i_z} = \frac{8000}{75.8} = 105.54$$

Elancement réduit, connaissant l'élancement d'Euler (voir **Tab. 8.2.**) :

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_z}{\lambda_1} = \frac{105.54}{93.91} = 1.124$$

Recherche du coefficient de réduction χ :

Courbe (c) (voir **Tab. 8.4.**), au moyen des formules **éq. 8.85.** et **éq. 8.86.** :

$$\chi = 0.472$$

Recherche de la charge admissible

$$N_{bz, Rd} = \frac{\chi_z A f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0.472 \times 149.110^2 \times 235}{1} = 1653817 \text{ N} \approx 1654 \text{ kN}$$

La charge permanente admissible devient :

$$N_{adm} = \frac{N_{bz, Rd}}{1.35} = \frac{1654}{1.35} = 1225 \text{ kN}$$

Largement supérieur aux 300 kN. Il n'y aura pas de flambement dans ce plan là.

d) *Flèche maximale*

La flèche maximale à l'extrémité libre est donné par la formule suivante :

$$f_{\max} = e \frac{1 - \cos(k l)}{\cos(k l)} = 300 \times \frac{1 - 0.9549}{0.9549} = 14.2 \text{ mm}$$

Ce qui correspond à une flèche de $\frac{l}{282}$.

8.9.3. Noyau central

Dans le cas d'une charge excentrée, du genre de la figure ci-dessous :

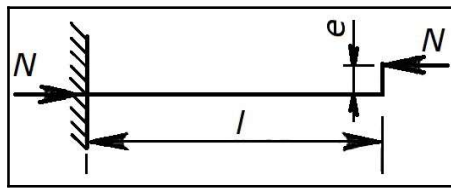


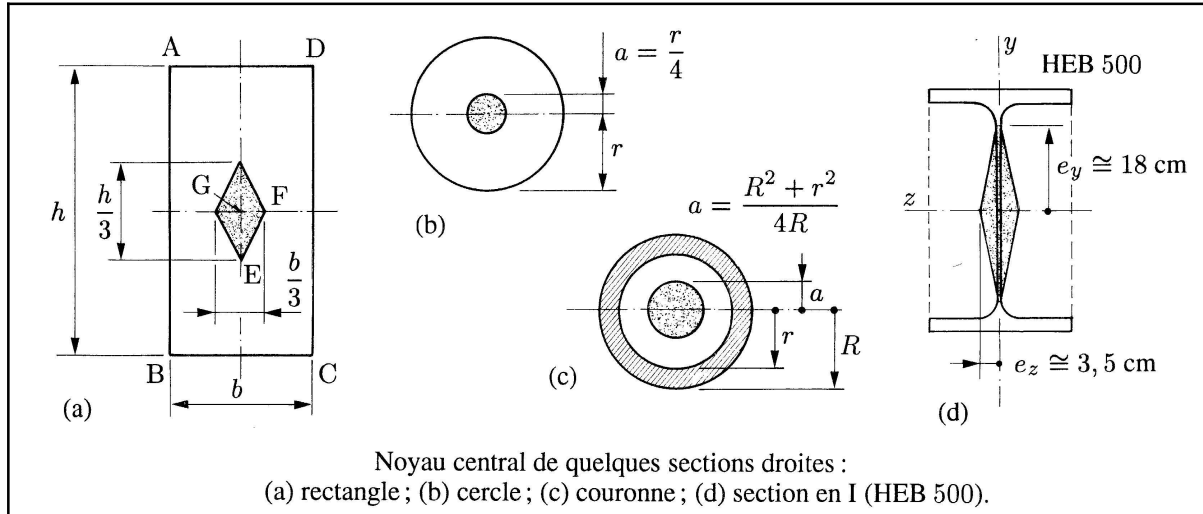
fig. 8.14. - Charge excentrée.

nous pourrions intuitivement dire que si la charge est "suffisamment" centrée nous n'aurons pas de charge "excentrée" (évidemment...).

C'est pourquoi, il faut définir la zone dans laquelle nous avons une charge que l'on peut considérer comme centrée.

Le **noyau central** est une partie de la section qui jouit de la propriété suivante :
Toute force parallèle à l'axe dont la direction passe à l'intérieur du noyau central, donne lieu dans toute la section à une compression pure.

Le noyau central intervient surtout dans le calcul de la maçonnerie qui ne résiste qu'à la compression.



Noyau central de quelques sections droites :
(a) rectangle ; (b) cercle ; (c) couronne ; (d) section en I (HEB 500).

fig. 8.15. - Noyaux central de quelques sections.

1) Rectangle (voir fig. 8.15. (a))

Les diagonales du noyau central sont les côtés divisé par 3.

2) Carré

Comme dans ce cas $h = b$, nous avons un carré dont la diagonale est égale à $C/3$.

3) Carré creux

La diagonale vaut : $\frac{C}{3} \left(1 + \left(\frac{C_i}{C} \right)^2 \right)$ avec C_i le côté intérieur.

4) Cercle (voir **fig. 8.15. (b)**)

Le noyau central est une circonférence concentrique de rayon égale à : $r_{NC} = \frac{d}{8}$

5) Cercle creux (tube) (voir **fig. 8.15. (c)**)

Le noyau central est une circonférence concentrique de rayon égale à :

$$r_{NC} = \frac{d}{8} \left(1 + \left(\frac{d_i}{d} \right)^2 \right) = 0.125 d \left(1 + \left(\frac{d_i}{d} \right)^2 \right) \text{ avec } d_i \text{ le diamètre}$$

intérieur.

6) Poutrelle "I" (voir **fig. 8.15. (d)**)

La grandeur des 2 diagonales du noyau central valent respectivement :

$$2 r_{NCx} = 2 \frac{I_x/v}{A} \quad \text{et} \quad 2 r_{NCy} = 2 \frac{I_y/v'}{A}$$

7) Poutrelle "U" (voir **fig. 8.16.**)

$$r_{NCz} = \frac{I_z/v}{A}; \quad r_{NCy1} = \frac{I_y/y_s}{A}; \quad r_{NCy2} = \frac{I_y/y_2}{A}$$

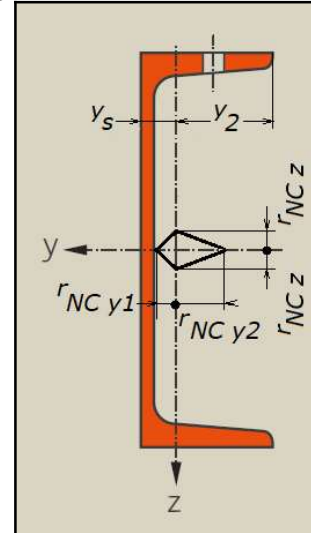


fig. 8.16. - Poutrelle "U"..

Application 8.10. A titre d'exercice, exploitons ces informations sur un exemple simple. Soit une colonne de section circulaire pleine de rayon r_0 , réalisée dans un matériau incapable de reprendre des contraintes de traction (en briques par ex.). Une section ss de cette colonne est sollicitée par un moment de flexion M_f et par un effort de compression centré N , comme indiqué sur le schéma ci-contre. On demande de calculer le rayon r_0 en fonction de M_f et N pour qu'il n'y ait traction nulle part dans la section.

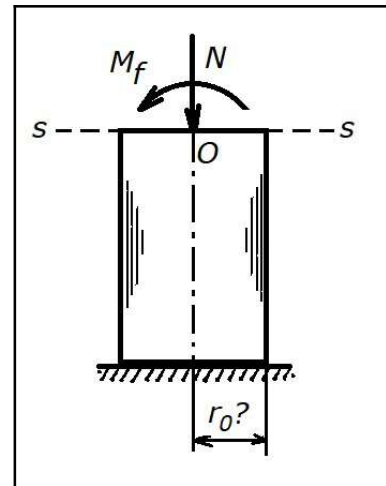


fig. 8.17. - Application 8.10.

Solution :

Propriétés du noyau central

Pour que le but assigné soit atteint, il faut que l'effort N agisse sur ss avec une excentricité e telle que le point d'application de N tombe dans le noyau central de la section. Cela se traduit par l'inégalité :

$$M_f = N e \Rightarrow e = \frac{M_f}{N} \leq \frac{r_0}{4}$$

puisque le noyau central possède un diamètre égal à $r_0/2$. D'où :

$$r_{0 \min} \geq \frac{4 M_f}{N}$$

c'est le rayon minimum qu'il convient de donner à la colonne pour qu'il n'y ait aucune fissure dans la section ss .

8.10. Déversement

8.10.1. Introduction

Les poutres étroites sont sensibles à un phénomène de déformation appelé *déversement*. Le déversement est un phénomène d'instabilité structurelle affectant les poutres fléchies (souvent en I ou H) qui, sous une charge critique, subissent une déformation latérale et une torsion. La semelle comprimée flambe horizontalement, entraînant une rotation de la section.

Les vérifications au déversement sont complexes, même pour des profilés simples.

On peut, cependant, en tirer une règle quantitative simple. Soit, si l est la portée de la poutre, le déversement n'est pas à craindre si :

$$\frac{lh}{bt_f} \leq 600 \quad (\text{éq. 8.250.})$$

<u>Notations</u> :	h	hauteur de la poutrelle	mm
	b	largeur de la poutrelle	mm
	t_f	épaisseur de la semelle	mm

Si le déversement est à craindre, on peut :

- ▶ réduire la longueur libre latérale;
- ▶ encastrier latéralement les extrémités;
- ▶ prévoir des points d'appuis latéraux supplémentaires;
- ▶ augmenter le moment d'inertie I_y de la section et la résistance à la torsion de la section.

{Réf.15}

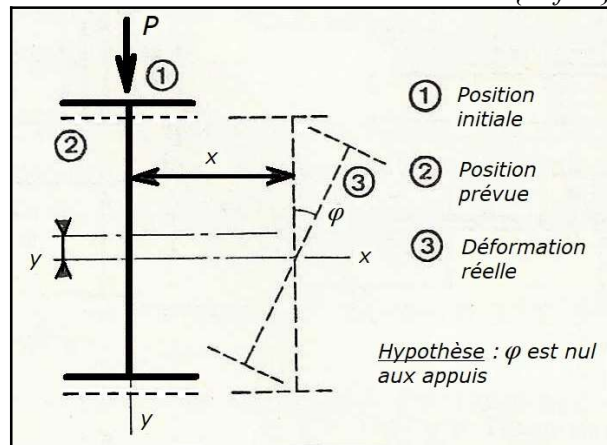


fig. 8.18. - Déversement.

Application 8.11. Vérifions le déversement pour la poutre IPE 180 trouvée lors de l' **Application 7.9**.

Solution :

Vérification simplifiée

Dans le cas de cette application, nous avons trouvé une IPE 180, avec les dimensions suivantes :
 $l = 5000 \text{ mm}$; $h = 180 \text{ mm}$; $b = 100 \text{ mm}$; $t_f = 8.5 \text{ mm}$.

Et donc :

$$\frac{lh}{bt_f} = \frac{5000 \times 180}{100 \times 8.5} = 1059 \leq 600 \quad KO$$

Il faut dans ce cas prendre certaines précautions pour éviter le déversement de cette poutre.