

<i>CHAPITRE 9. SOLLICITATIONS COMPOSÉES</i>	- 9.1 -
<i>9.1. Introduction</i>	- 9.1 -
<i>9.2. Critères de résistance</i>	- 9.1 -
<i>9.3. Applications</i>	- 9.4 -
<i>9.3.1. Flexion plane composée (traction (compression) - flexion)</i>	- 9.4 -
<i>9.3.2. Flexion gauche.</i>	- 9.8 -
<i>9.3.3. Torsion - cisaillement</i>	- 9.10 -
<i>9.3.4. Flexion - torsion</i>	- 9.16 -
<i>A) La flexion se fait dans un plan.</i>	- 9.16 -
<i>B) La flexion se fait dans deux plans différents</i>	- 9.18 -
<i>9.3.5. Compression (flambage) - flexion</i>	- 9.21 -

CHAPITRE 9. SOLLICITATIONS COMPOSÉES

9.1. Introduction

Une pièce est très rarement soumise à une sollicitation simple (pure). Dans la plupart des cas, à un effort de traction se rajoute un moment de flexion, ou à ce moment de flexion se superpose un couple de torsion. Il existe même des pièces sur lesquelles agissent ces trois types de sollicitations.

En vertu du principe de superposition des efforts (voir introduction) l'état de contrainte d'une barre rigide se détermine par addition des contraintes provoquées par chacune des types de chargement simple. Il en va de même pour les déformations (déplacements).

Le **principe de superposition** s'applique à tous les cas où les **déformations sont petites** et lorsque le **matériau obéit à la loi de Hooke**.

A ce stade, il est impératif de choisir un **critère de résistance**.

*Définition : un **critère de résistance** est une convention mathématique permettant de combiner des contraintes de natures différentes dans le but d'obtenir une **contrainte équivalente en traction** :*

- **équivalente** : car cette contrainte est sensée représentée à elle seule les effets des contraintes d'origines et de natures différentes;*
- **en traction** : car les caractéristiques du matériau auxquelles sera ensuite comparée cette contrainte équivalente sont toujours obtenues sous sollicitation de traction pure.*

9.2. Critères de résistance

Les différents critères passés en revue ci-dessous ont été développés dans le cas de **l'état plan de contrainte**, c'est-à-dire lorsque quelle que soit la facette prise dans le matériau, les différentes contraintes restent dans un même plan.

A) Critère de la tension principale (Rankine)

Dans cette théorie, on suppose que l'état dangereux d'un corps à l'état de contrainte complexe est défini par la valeur de la contrainte normale maximale. C'est-à-dire, dans le plan :

$$\sigma_{\text{éq}} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \quad (\text{éq. 9.1})$$

<u>Notations</u> :	$\sigma_{\text{éq}}$	contrainte équivalente en traction	N/mm^2
	σ	somme des contraintes normales (traction + flexion)	N/mm^2
	τ	somme des contraintes tangentielles (torsion + cisaillement)	N/mm^2

Cette théorie n'est confirmée dans la pratique que **pour les matériaux fragiles** et suffisamment **homogènes** (verre, gypse, céramiques,...).

Remarque :

Dans le cas du cisaillement pur, l'expression (*éq. 9.1*) se réduit à :

$$\sigma_{\text{éq}} = \tau$$

B) Hypothèse de la déformation maximale (Poncelet, Bach, Saint Venant)

Comme critère de l'état limite on prend la déformation linéaire la plus grande en valeur absolue, ce qui se traduit dans l'état plan de contrainte par :

$$\sigma_{\text{éq}} = (1 - \nu) \frac{\sigma}{2} + (1 + \nu) \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \quad (\text{éq. 9.3})$$

Notation : ν coefficient de poisson -

De nombreux essais ont montré que ce critère ne pouvait être retenu. Il est **actuellement abandonné**. Il était utilisé anciennement pour les aciers sous la forme (avec le coefficient de Poisson : $\nu = 0.3$) :

$$\sigma_{\text{éq}} = 0.35 \sigma + 0.65 \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \quad (\text{éq. 9.5})$$

Remarque :

Dans le cas du cisaillement pur, l'expression se réduit à :

$$\sigma_{\text{éq}} = 1.3 \tau \quad \text{ou} \quad \tau = 0.8 \sigma_{\text{éq}}$$

C) Hypothèse de la tension de cisaillement maximale (Coulomb, Tresca, Guest, Mohr)

On part de l'hypothèse d'après laquelle l'état dangereux d'un corps sollicité est déterminé par la valeur de la contrainte tangentielle maximale. Ce qui s'énonce :

$$\sigma_{\text{éq}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \quad (\text{éq. 9.7})$$

Cette théorie donne des résultats relativement satisfaisants pour **les matériaux ductiles**.

Remarque :

Dans le cas du cisaillement pur, l'expression se réduit à :

$$\sigma_{\text{éq}} = 2 \tau \quad \text{ou} \quad \tau = 0.5 \sigma_{\text{éq}}$$

D) Hypothèse de l'énergie de déformation élastique équivalente (Hencky - von Mises)

On suppose que l'état dangereux d'un corps sollicité est caractérisé par la valeur limite de l'énergie potentielle spécifique accumulée lors de la déformation. Ce qui se traduit par la formulation :

$$\sigma_{\text{éq}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2} \quad (\text{éq. 9.9})$$

Ce quatrième critère de résistance est **bien adapté aux matériaux ductiles**. C'est celui qui est le plus fréquemment utilisé.

Remarque :

Dans le cas du cisaillement pur, l'expression se réduit à :

$$\sigma_{\text{éq}} = \sqrt{3} \tau \quad \text{ou} \quad \tau = 0.58 \sigma_{\text{éq}}$$

E) Conclusions

<i>En résumé</i>		
Matériaux fragiles	⇒ Rankine	$\sigma_{\text{éq}} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2}$
Matériaux ductiles	⇒ von Mises	$\sigma_{\text{éq}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2}$

<u>Notations</u> :	$\sigma_{\text{éq}}$	contrainte équivalente en traction	N/mm^2
	σ	somme des contraintes normales (traction + flexion)	N/mm^2
	τ	somme des contraintes tangentielles (torsion + cisaillement)	N/mm^2

N'oublions pas que l'utilisation d'un critère de résistance suppose que l'on se trouve **en un point précis de la matière**.

Par exemple, nous avons vu en flexion simple que la contrainte normale se situait à la périphérie d'une pièce, tandis que la contrainte tangentielle maximale se situait au centre. Dès lors l'utilisation d'un critère de résistance, en périphérie ou au centre, pour la flexion simple, est non fondée.

Remarque :

Ce ne sera pas le cas si nous utilisons la notion de contrainte tangentielle moyenne (cisaillement technologique).

9.3. Applications

9.3.1. Flexion plane composée (traction (compression) - flexion)

Définition : La **flexion plane composée** est un mode de flexion tel que toute section droite d'une barre est soumise à un **moment fléchissant** (suivant un des axes centraux principaux d'inertie) ainsi qu'à un **effort normal** appliquée au centre de gravité.
Un **effort tranchant** est associé au moment fléchissant.

Un exemple de poutre soumise à flexion composée est donné à la figure ci-dessous.

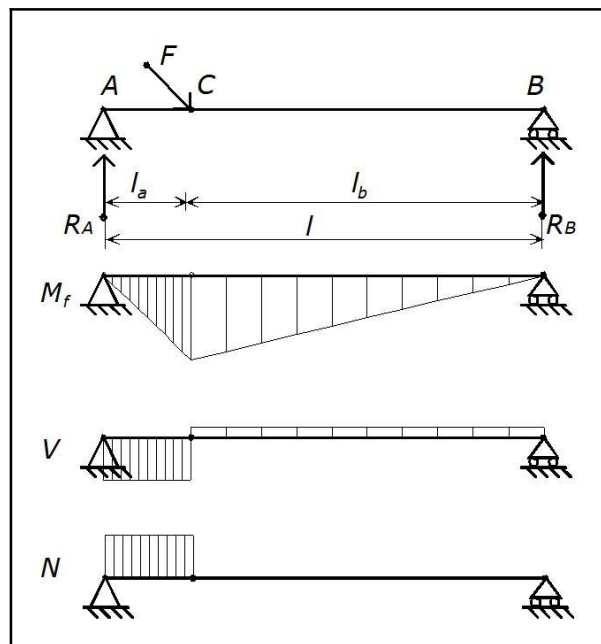


fig. 9.1. - Exemple de flexion composée.

Remarques :

- 1) Dans cet exemple, seule les sections situées sur la distance l_a sont soumises à flexion composée. La nature et la position de chacun des appuis ont leur importance sur le diagramme des N . (On a négligé le poids propre de la poutre pour simplifier.)
- 2) S'il existe de la compression, le développement ci dessous n'est valable que s'il n'existe pas de flambement. Dans le cas contraire se reporter au § 9.3.5..

Si on néglige le cisaillement, la force F engendre uniquement de la *compression* à fibre supérieure et de la *traction* à la fibre inférieure.

C'est pourquoi, dans le cas de la flexion plane composée, nous n'avons pas besoin d'un critère de résistance. En effet, il suffira, pour trouver la tension résultante, de sommer, **avec leur signe respectif**, les diverses contraintes engendrées.

Autrement dit nous aurons dans le cas de la figure ci-dessus :

à la fibre supérieure : $\sigma_B = \sigma_t - \sigma_{fl} = \sigma'' - \sigma'$ et, suivant le cas, nous obtiendrons :

de la compression : si $\sigma' > \sigma''$
 aucune contrainte : si $\sigma' = \sigma''$
 de la traction : si $\sigma' < \sigma''$

à la fibre inférieure : $\sigma_B = \sigma_t + \sigma_{fl} = \sigma'' + \sigma'$ et nous obtiendrons toujours de la traction.

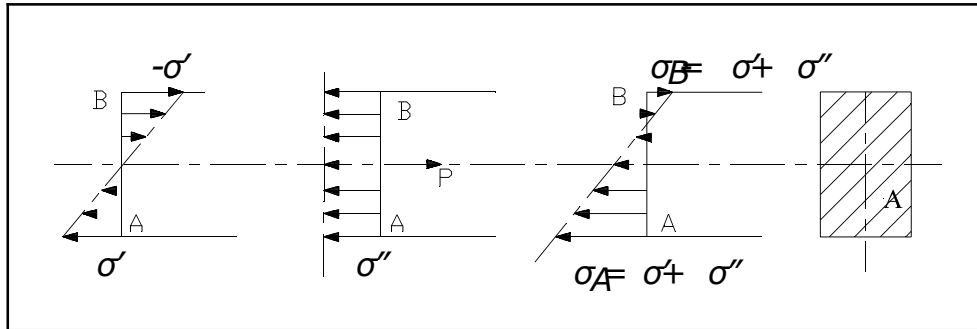


fig. 9.2. - Somme des contraintes σ .

Application 9.1. Une presse de carrossier se compose d'une fourche forgée et d'une vis de manoeuvre. L'effort de serrage $F = 25 \text{ kN}$ suivant l'axe de la vis. Déterminer les contraintes dans la section AA, en K et en J.

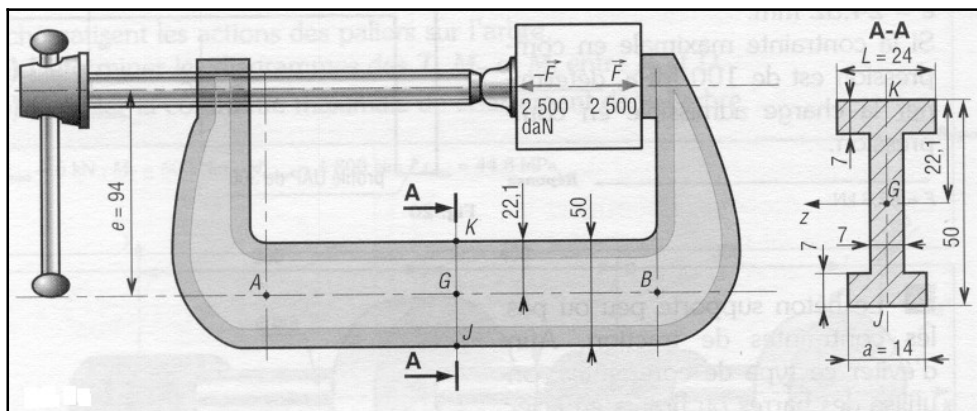


fig. 9.3. - Application 9.1.

Solution :

Pour connaître les différents efforts en AA
 Couper - équilibrer.

Recherche de l'effort de traction N

$$N = F = 25 \text{ kN}$$

Calculons la surface soumise à N

$$A_{AA} = (24 \times 7) + (14 \times 7) + ((50 - 14) \times 7) = 518 \text{ mm}^2$$

Calculons la contrainte de traction σ_{tr}

$$\sigma_{tr} = \frac{N}{A_{AA}} = \frac{25000}{518} = 48.3 \text{ N/mm}^2$$

Recherche du moment fléchissant M_f

$$M_f = F e = 25000 \times 94 = 2.35 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Calculons l'inertie de la section AA

$$I_z = \text{après calculs} = 146887 \text{ mm}^4$$

Calculons la contrainte de flexion σ_{fl}

$$\text{En [K] : Traction} \quad \sigma_{flK} = \frac{M_f}{I_{AA}/v_1} = \frac{2\,350\,000}{146\,887/22.1} = 353.6 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{En [J] : Compression} \quad \sigma_{flJ} = \frac{M_f}{I_{AA}/v_2} = \frac{2\,350\,000}{146\,887/27.9} = 446.4 \text{ N/mm}^2$$

Calcul de la contrainte totale σ

$$\text{En [K] :} \quad \sigma = \sigma_{tr} + \sigma_{flK} = 48.3 + 353.6 = +401.9 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{En [J] :} \quad \sigma = \sigma_{tr} + \sigma_{flJ} = 48.3 - 446.4 = -398.1 \text{ N/mm}^2$$

On peut remarquer que, de par la forme du "I", nous sommes isocontraint.

Application 9.2. Calculez la contrainte maximale existante dans le limon de cet escalier constitué de deux IPN 180. Les dimensions sont données à la figure ci-dessous. Charge à considérer : 5 kN/m^2 de projection horizontale.

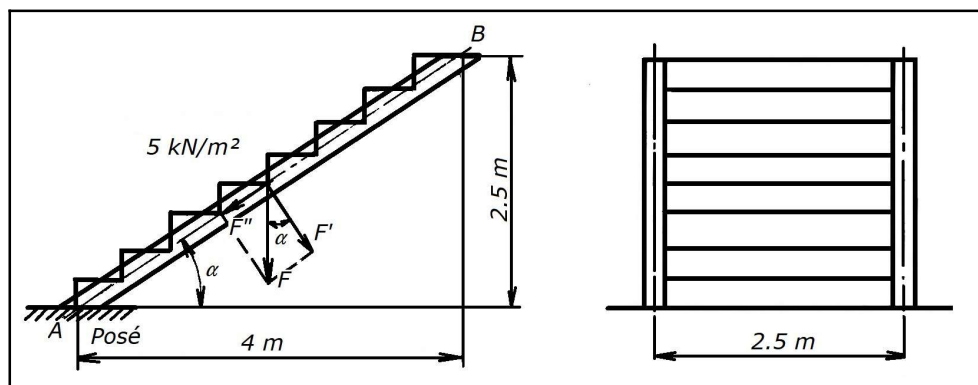


fig. 9.4. - Application 9.2.

Solution :

Recherche de dimensions

$$\text{Angle } \alpha : \quad \tan \alpha = \frac{2.5}{4} = 0.625 \Rightarrow \alpha = 32^\circ$$

$$\text{Longueur } \overline{AB} : \quad \overline{AB} = \frac{4}{\cos 32} = 4.72 \text{ m}$$

Recherche de la charge par limon

$$F = 5000 \times 4 \times \frac{2.5}{2} = 25000 \text{ N}$$

Décomposition de F

$$\begin{cases} F' = F \cos \alpha = 25000 \times \cos 32 = 21200 \text{ N} \\ F'' = F \sin \alpha = 25000 \times \sin 32 = 13250 \text{ N} \end{cases}$$

Caractéristiques du IPN 180 :

$$A = 27.9 \text{ cm}^2; \quad I_{\max} = 1450 \text{ cm}^4; \quad I_{\max}/v = 161 \text{ cm}^3$$

Contrainte de flexion :

$$M_{f \max} = \frac{F l}{8} = \frac{21200 \times 4.72}{8} = 12508 \text{ Nm (Charge répartie)}$$

$$\sigma_f = \frac{M_f}{I_{\max}/v} = \frac{12508000}{161000} = 77.7 \text{ N/mm}^2$$

Contrainte de compression :

$$\sigma_{\text{comp}} = \frac{F''}{A} = \frac{13250}{2790} = 4.75 \text{ N/mm}^2$$

Résultante :

Au milieu :

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_f + \frac{\sigma_{\text{comp}}}{2} = 77.7 + \frac{4.75}{2} = 80.1 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{compression})$$

En A :

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_f + \sigma_{\text{comp}} = 0 (!) + 4.75 = 4.75 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{compression})$$

9.3.2. Flexion gauche

Définition : La **flexion déviée** ou **flexion gauche** est un mode de flexion tel que le plan du moment fléchissant ne coïncide pas avec un des axes centraux principaux d'inertie de la section droite.

Un **effort tranchant** est associé au moment fléchissant.

Les charges ne peuvent entraîner ni effort normal, ni moment de torsion.

D'ordinaire, on réduit la flexion déviée à deux flexions planes; pour cela, les sollicitations agissant dans des plans longitudinaux arbitraires se décomposent en composantes situées dans les plans principaux (z, x) et (z, y).

Dès lors, la résolution est équivalente à "2 fois" ce qui à été fait en flexion simple.

Il faut cependant ne pas oublier de sommer les contraintes obtenues. C'est-à-dire :

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y = \frac{M_{f_x}}{W_x} + \frac{M_{f_y}}{W_y} \quad (\text{éq. 9.40})$$

Notations :

σ_x	contrainte normale suivant l'axe Oz due au moment fléchissant M_x
σ_y	contrainte normale suivant l'axe Oz due au moment fléchissant M_y
W_y	module de résistance à la flexion par rapport à l'axe Ox
W_x	module de résistance à la flexion par rapport à l'axe Oy

Dans la mesure où un effort tranchant est associé au moment fléchissant, il y a apparition de contraintes de cisaillement dans la section droite. Et comme pour les contraintes longitudinales nous effectuerons la somme des contraintes tangentielles dues aux deux moments tranchants indépendamment.

D'où :

$$\tau = \tau_x + \tau_y = k_\tau \frac{V_x}{A_{cis}} + k_\tau \frac{V_y}{A_{cis}} \quad (\text{éq. 9.41})$$

Notations :

τ_x	contrainte tangentielle suivant l'axe Ox due à l'effort tranchant V_x	N/mm^2
τ_y	contrainte tangentielle suivant l'axe Oy due à l'effort tranchant V_y	N/mm^2

Ces contraintes τ sont généralement inférieures aux contraintes normales. On veillera simplement à vérifier si **indépendamment** les contraintes **normales** et **tangentielles** ne dépassent pas les **valeurs admissibles**.

Application 9.3. Une panne de toiture, poutrelle IPN 120 en S235, est soumise à un moment fléchissant maximal de 2 kNm dans le plan vertical (plan de charge). Calculer la contrainte maximale dans la section dangereuse de la poutre.

Catalogue : $I_y = 328 \text{ cm}^4$, $I_z = 21.5 \text{ cm}^4$,
 $W_y = 54.7 \text{ cm}^3$, $W_z = 7.41 \text{ cm}^3$.

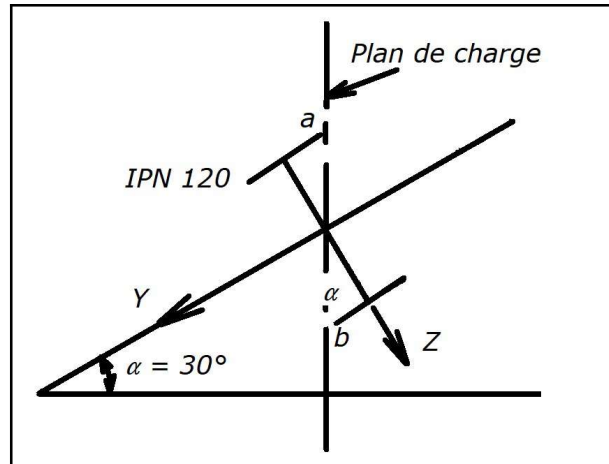


fig. 9.5. - Application 9.3.

Solution :

Recherche des moments fléchissants

Le moment fléchissant donné donne deux composantes suivant l'axe y et l'axe z. Le moment fléchissant correspondant à l'axe y (axe z) est celui qui est perpendiculaire à cet axe y (axe z). Soit :

$$M_{f_y} = M_{f_{\max}} \cos 30 = 2000 \times \cos 30 = 1732 \text{ Nm}$$

$$M_{f_z} = M_{f_{\max}} \sin 30 = 2000 \times \sin 30 = 1000 \text{ Nm}$$

Calcul des contraintes

$$\sigma_y = \frac{M_{f_y}}{W_y} = \frac{1732 \cdot 10^3}{54.7 \cdot 10^3} = 31.7 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_z = \frac{M_{f_z}}{W_z} = \frac{1000 \cdot 10^3}{7.41 \cdot 10^3} = 135.0 \text{ N/mm}^2$$

La contraintes maximale vaut :

$$\sigma_{\max} = \sigma_y + \sigma_z = 31.7 + 135.0 = 166.7 \text{ N/mm}^2$$

Traction en b et compression en a.

Vérification et commentaires

$$\sigma_{\max} = 166.7 < \overset{?}{\sigma_{adm}} = \frac{235}{1.5} = 156.7 \text{ N/mm}^2 \quad KO$$

Cette valeur élevée est encore acceptable, car elle n'intéresse que les seules extrémités a et b des ailes de la poutrelle.

Remarquons l'importance de la contrainte due à la flexion suivant l'axe z (axe faible). Nous savons bien qu'il est illogique de soumettre à la flexion une poutrelle IPN posée "à plat".

9.3.3. Torsion - cisaillement

Application aux calculs des ressorts hélicoïdaux cylindriques

Les formules approximatives pour le calcul des contraintes apparaissant dans les ressorts hélicoïdaux à faible pas se trouvant en compression ou en traction peuvent être établies à partir des efforts internes existant dans la section d'une spire (**fig. 9.6.**), efforts qui remplacent l'influence de la partie inférieure du ressort mentalement sectionnée.

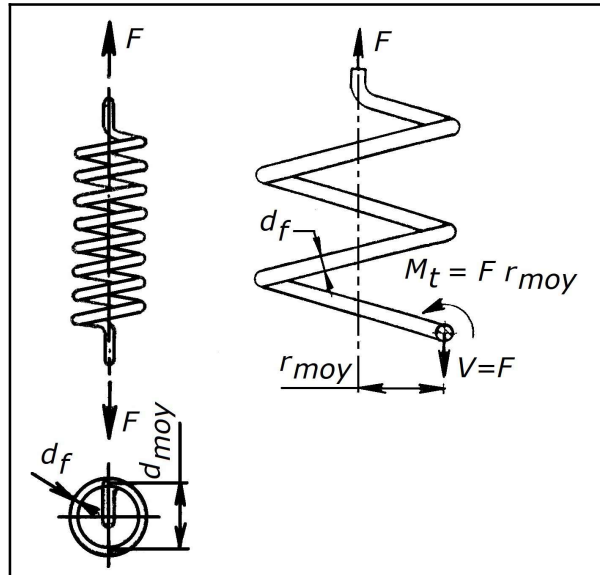


fig. 9.6. - Contraintes dans les ressorts de traction - compression.

Sous l'effet d'une force transversale F et du moment de torsion égal au produit de l'effort de traction par le rayon moyen r_{moy} du ressort : $M_t = F r_{moy}$; dans la section d'une spire apparaissent deux groupes de contraintes tangentielles : les **contraintes dues au cisaillement** qu'on considère, par convention, comme uniformément réparties (cisaillement technologique) et, égales à :

$$\tau_{cis} = \frac{F}{A} = \frac{4 F}{\pi d_f^2} \quad (\text{éq. 9.49})$$

et les **contraintes dues à la torsion** dont la valeur maximale est :

$$\tau_{tor} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{16 F r_{moy}}{\pi d_f^3} = \frac{8 F d_{moy}}{\pi d_f^3} \quad (\text{éq. 9.50})$$

<u>Notations</u> :	F	force appliquée	N
	d_f	diamètre de la section transversale du fil	mm
	d_{moy}	diamètre moyen des spires du ressort	mm
	r_{moy}	rayon moyen des spires du ressort	mm

Remarque :

Si $d_{moy} \approx 6 d_f$, on constate que $\tau_{tor} \approx 12 \tau_{cis}$. Un ressort hélicoïdal à fil rond est donc essentiellement sollicité en torsion.

Les contraintes tangentielles étant constantes sur la section et les contraintes de torsion étant maximales à la périphérie de la section du fil, les contraintes maximales dans le ressort seront situées en périphéries et valent :

$$\tau_{\max} = \tau_{\text{cis}} + \tau_{\text{tor}} = \frac{8 F d_{\text{moy}}}{\pi d_f^3} \left(1 + \frac{d_f}{2 d_{\text{moy}}} \right) \quad (\text{éq. 9.53})$$

En pratique, on réécrit l'équation ci-dessus sous la forme :

$$\tau_{\max} = k_r \frac{8 F d_{\text{moy}}}{\pi d_f^3} \quad (\text{éq. 9.54})$$

avec :

$$k_r = \frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0.615}{m} \quad \text{et} \quad m = \frac{d_{\text{moy}}}{d_f} \quad (\text{éq. 9.55})$$

pour tenir compte aussi bien de l'influence de l'effort tranchant (répartition non uniforme des contraintes de cisaillement), que de la flexion de la tige du ressort, que des déformations longitudinales, que de l'effet de la courbure du fil.

La formule ci-dessus peut se mettre sous forme de tableau :

d_{moy}/d_f	2.5	3	4	5	6	7	8	9	10	12
k_r	1.75	1.58	1.40	1.31	1.25	1.21	1.18	1.16	1.14	1.12

Dans un calcul d'avant-projet de conception, si aucune limitation d'encombrement sur le diamètre moyen n'est imposée, on peut prendre :

$$d_{\text{moy}}/d_{\text{fil}} (>) = 10 \quad (\text{Eviter } d_{\text{moy}}/d_{\text{fil}} < 3 \text{ et } > 20)$$

Remarque :

L'allongement (ou le raccourcissement) du ressort est donné par la formule :

$$\Delta l \approx \frac{8 F d_{\text{moy}}^3 n b_{\text{spires}}}{G d_f^4} = \frac{F}{k_{rr}} \quad (\text{éq. 9.58}) \quad [\text{mm}]$$

Notations :

$n b_{\text{spires}}$	le nombre de spires du ressort	-
G	module d'élasticité transversale	N/mm^2
k_{rr}	rigidité du ressort	N/mm

$$k_{rr} = \frac{G d_f^4}{8 d_{\text{moy}}^3 n b_{\text{spires}}} \quad (\text{éq. 9.59})$$

Cette formule ne tient compte **que** des déformations dues à la **torsion**. Dans le cas des ressorts, ce Δl est aussi appelé "flèche".

L'ensemble des formules pour la conception des ressorts hélicoïdaux se retrouvent dans l'abaque ci-dessous.

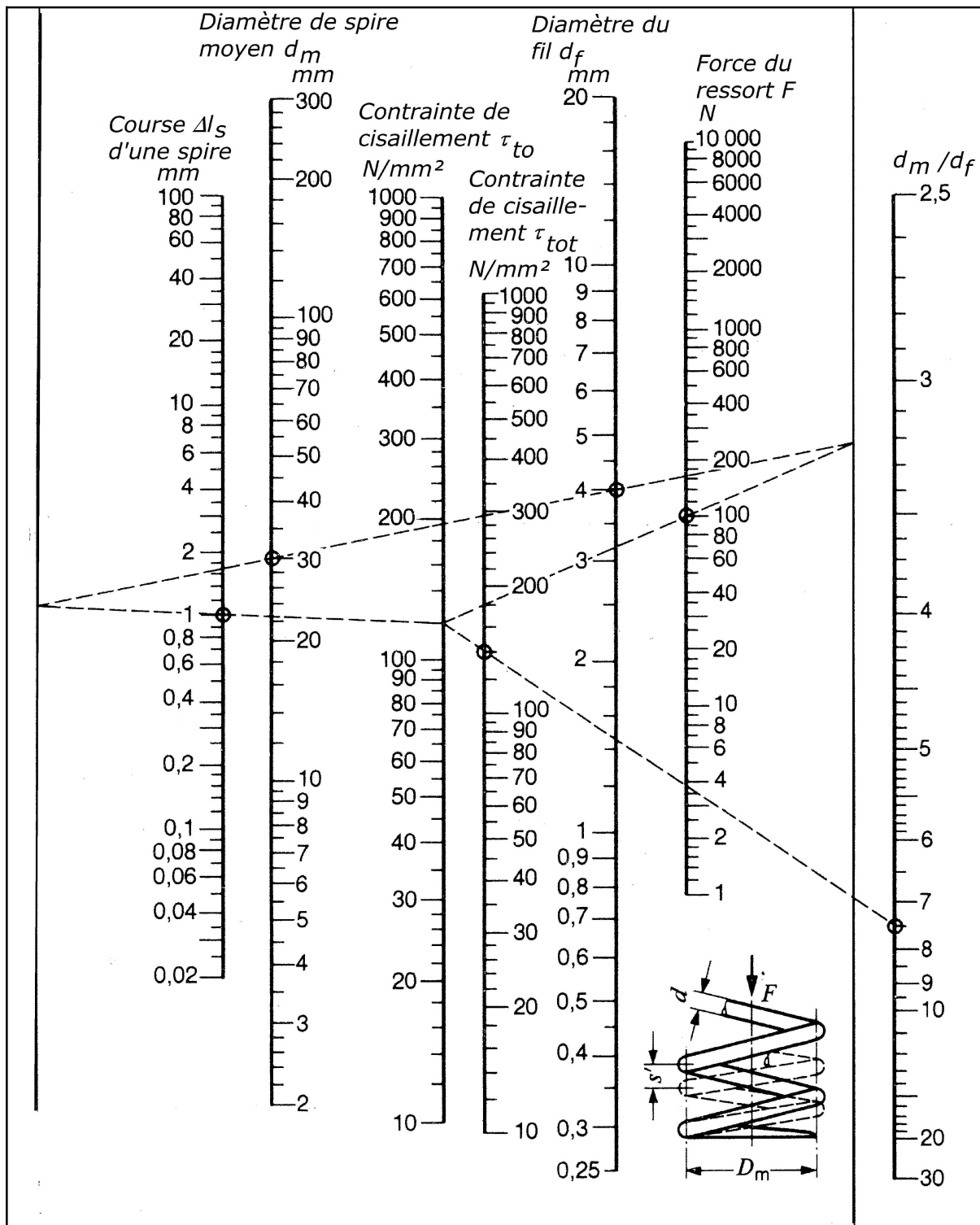


fig. 9.7. - Abaque de calcul des ressorts hélicoïdaux.
 Exemple : données : $d_m = 30\text{mm}$, $d_f = 4\text{mm}$, $F = 100\text{N}$
 résultats : $\tau_{torsion} = 120\text{N/mm}^2$, $\tau_{total} = 140\text{N/mm}^2$, $\Delta l_{spire} = 1.02\text{mm}$.

Application 9.4. Calcul de vérification

Vérifions que le ressort, dont nous possédons les caractéristiques ci-dessous, est correctement dimensionné.

$$\begin{array}{ll} d_f = 10 \text{ mm} & \text{longueur libre} = 500 \text{ mm} \\ d_{\text{moy}} = 150 \text{ mm} & \text{longueur maximale} = 460 \text{ mm} \\ nb_{\text{spires}} = 12 & \text{longueur minimale} = 210 \text{ mm} \\ \text{Acier à ressort :} & R_m = 1225 \text{ N/mm}^2 \quad R_e = 920 \text{ N/mm}^2 \end{array}$$

Solution :

Recherche de la flèche

$$\Delta l = l_{\text{libre}} - l_{\text{min}} = 500 - 210 = 290 \text{ mm}$$

Recherche de l'effort maximum

$$\begin{aligned} \Delta l = \frac{8 F d_{\text{moy}}^3 nb_{\text{spires}}}{G d_f^4} & \Rightarrow F = \frac{\Delta l G d_f^4}{8 d_{\text{moy}}^3 nb_{\text{spires}}} \\ & = \frac{290 \times 80\,000 \times 10^4}{8 \times 150^3 \times 12} = 716 \text{ N} \end{aligned}$$

Recherche des contraintes suivant diverses méthodes

1) Calcul simpliste ne tenant compte que de la torsion ($k_r = 1$)

$$\tau_{\text{max}} = \frac{8 F d_{\text{moy}}}{\pi d_f^3} = \frac{8 \times 716 \times 150}{\pi \times 10^3} = 273.5 \text{ N/mm}^2 \quad [1]$$

2) Calcul tenant compte de la torsion et du cisaillement ($k_r = \left(1 + \frac{d_f}{2 d_{\text{moy}}}\right)$)

$$\tau_{\text{max}} = \frac{8 F d_{\text{moy}}}{\pi d_f^3} \left(1 + \frac{d_f}{2 d_{\text{moy}}}\right) = 273.5 \times \left(1 + \frac{10}{2 \times 150}\right) = 282.6 \text{ N/mm}^2 \quad [2]$$

3) Calcul exact ($k_r = \frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0.615}{m}$)

$$m = \frac{d_{\text{moy}}}{d_{\text{fil}}} = \frac{150}{10} = 15$$

$$k_r = \frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0.615}{m} = \frac{4 \times 15 - 1}{4 \times 15 - 4} + \frac{0.615}{15} = 1.095$$

$$\tau_{\text{max}} = k_r \frac{8 F d_{\text{moy}}}{\pi d_f^3} = 1.095 \times 273.5 = 299.5 \text{ N/mm}^2 \quad [3]$$

Erreur relative entre les différentes formules

$$[1] \text{ et } [2] : \quad \text{erreur} (\%) = \left(1 - \frac{273.5}{282.6}\right) \times 100 = 3.22 \%$$

$$[1] \text{ et } [3] : \quad \text{erreur} (\%) = \left(1 - \frac{273.5}{299.5}\right) \times 100 = 8.68 \%$$

Coefficient de sécurité par rapport à la formule exacte

$$\tau \leq 0.58 \frac{R_e}{S} \Rightarrow S = 0.58 \frac{R_e}{\tau} = 0.58 \times \frac{920}{299.5} = 1.78 \quad OK$$

Application 9.5. Calcul de conception

Calculez les dimensions d'un ressort hélicoïdal travaillant en compression, sachant que :

Charge minimum : 2500 N ; Charge maximum : 4000 N

Rayon de courbure : $r_{moy} = 60 \text{ mm}$

Contrainte admissible en torsion : $\tau_{adm} = 320 \text{ N/mm}^2$

Déformation pour le passage de F_{min} à F_{max} imposée à 50 mm.

Solution :

a) Recherche du diamètre du fil

Il se détermine pour F_{max} par la formule simplifiée ($k_r = 1$) :

$$\tau_{max} = k_r \frac{8 F d_{moy}}{\pi d_f^3}$$

$$\Rightarrow d_f = \sqrt[3]{k_r \frac{8 F d_{moy}}{\pi \tau_{max}}} = \sqrt[3]{1 \times \frac{8 \times 4000 \times (2 \times 60)}{\pi \times 320}} = 15.6 \approx 16 \text{ mm}$$

Comme nous connaissons maintenant le diamètre du fil, vérifions, par la formule exacte si nous ne dépassons pas la contrainte admissible de torsion.

$$m = \frac{d_{moy}}{d_{fil}} = \frac{120}{16} = 7.5$$

$$k_r = \frac{4m - 1}{4m - 4} + \frac{0.615}{m} = \frac{4 \times 7.5 - 1}{4 \times 7.5 - 4} + \frac{0.615}{7.5} = 1.2$$

$$\tau_{max} = k_r \frac{8 F d_{moy}}{\pi d_f^3} = 1.2 \times \frac{8 \times 4000 \times 120}{\pi \times 16^3} = 358.1 \text{ N/mm}^2 > 320 \text{ N/mm}^2 !$$

Il faut donc prendre un fil d'un diamètre supérieur. De ce fait k_r va augmenter, mais, globalement la contrainte diminuera car le diamètre du fil est au dénominateur et à la puissance 3. Si on recommence le calcul avec $d_{fil} = 18 \text{ mm}$, on obtient :

$$m = \frac{d_{moy}}{d_{fil}} = \frac{120}{18} = 6.67$$

$$k_r = \frac{4 \times 6.67 - 1}{4 \times 6.67 - 4} + \frac{0.615}{6.67} = 1.22$$

$$\tau_{max} = 1.22 \times \frac{8 \times 4000 \times 120}{\pi \times 18^3} = 255.7 \text{ N/mm}^2 < 320 \text{ N/mm}^2 \quad OK$$

b) Calcul du nombre de spires

$$\Delta l \approx \frac{8 F d_{\text{moy}}^3 n b_{\text{spires}}}{G d_f^4}$$

Nous ne connaissons ni $n b_{\text{spires}}$, ni la flèche Δl . Aussi, allons-nous d'abord calculer la flèche pour **une spire** et ce pour F_{max} .

$$\frac{\Delta l}{n b_{\text{spires}}} \approx \frac{8 F d_{\text{moy}}^3}{G d_f^4} = \frac{8 \times 4000 \times 120^3}{80000 \times 18^4} = 6.6 \text{ mm}$$

La flèche **par spire** pour F_{min} :

$$\frac{\Delta l}{n b_{\text{spires}}} \approx \frac{8 F d_{\text{moy}}^3}{G d_f^4} = \frac{8 \times 2500 \times 120^3}{80000 \times 18^4} = 4.1 \text{ mm}$$

La mise en charge aplatit donc une spire de :

$$6.6 - 4.1 = 2.5 \text{ mm}$$

Comme la déformation d'ensemble est de 50 mm, il faudra :

$$\frac{50}{2.5} = 20 \text{ spires}$$

c) Pas des spires

$$pas_{\text{spires}} = d_f + \Delta l_{\text{max (pour une spire)}} = 18 + 6.6 = 24.6 \text{ mm} \Rightarrow 28 \text{ mm}$$

d) Hauteur libre du ressort L_0

$$L_0 = n b_{\text{spires}} \cdot pas_{\text{spires}} + 1.5 d_f = 20 \times 26 + 1.5 \times 18 = 547 \approx 550 \text{ mm}$$

e) Vérification au flambage

???

9.3.4. Flexion - torsion

Application aux calculs des arbres

A) La flexion se fait dans un plan

Un cas extrêmement courant en mécanique est le calcul d'arbre de machine. Dans la plupart des cas, l'arbre sera soumis à de la flexion (et donc aussi au cisaillement) et à de la torsion. Le cisaillement étant négligeable, nous nous trouvons devant un cas de sollicitations combinées de flexion et de torsion.

Le problème qui se pose lors de la conception d'arbre de machine est de déterminer son diamètre connaissant les sollicitations auxquelles il est soumis.

Pour cela, nous allons considérer l'arbre comme simplement fléchi sous l'action d'un moment de flexion appelé **moment réduit** (noté M_r) ou **moment de flexion idéal**.

Que vaut ce moment ?

Les arbres de machines étant toujours fabriqués en matériaux ductiles, utilisons le critère de von Mises :

$$\sigma_{\text{éq}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2}$$

Pour la flexion : $\sigma = \frac{M_f}{W_f}$

Pour la torsion : $\tau = \frac{M_t}{W_t}$ avec : $W_t = 2 W_f$ car $I_{\text{polaire}} = 2 I_{\text{flexion}}$

et : $\sigma_{\text{éq}} = \frac{M_r}{W_f}$

Remplaçons dans le critère de von Mises :

$$\frac{M_r}{W_f} = \sqrt{\left(\frac{M_f}{W_f}\right)^2 + 3 \left(\frac{M_t}{2 W_f}\right)^2}$$

et nous trouvons l'expression du **moment réduit** pour **un matériau ductile** :

$$M_r = \sqrt{M_f^2 + 0.75 M_t^2} \quad (\text{éq. 9.93}) \quad (\text{von Mises})$$

Dans le cas qui nous préoccupe, nous devons déterminer le diamètre d de l'arbre. Soit :

$$\sigma_{\text{éq}} = \frac{M_r}{W_f} \leq \sigma_{\text{adm}} \quad \text{avec : } W_f = \frac{\pi d^3}{32} \quad \text{et donc : } \sigma_{\text{adm}} \geq \frac{32 M_r}{\pi d^3}$$

et dans ce cas nous obtenons :

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_r}{\pi \sigma_{\text{adm}}}} \approx 2.17 \sqrt[3]{\frac{M_r}{\sigma_{\text{adm}}}} \quad (\text{éq. 9.96})$$

Remarque :

La contrainte admissible est une contrainte **admissible de flexion** !

A titre de documentation seulement, si au lieu d'utiliser le critère de von Mises, on utilise **Poncelet - Bach** comme c'était l'usage auparavant, on obtient le moment réduit suivant :

$$\frac{M_r}{W_f} = 0.35 \frac{M_f}{W_f} + 0.65 \sqrt{\left(\frac{M_f}{W_f}\right)^2 + 4 \left(\frac{M_t}{2 W_f}\right)^2}$$

et de ce fait : **Poncelet - Bach**

$$M_r = 0.35 M_f + 0.65 \sqrt{M_f^2 + M_t^2} \quad (\text{éq. 9.98})$$

Ce moment réduit se retrouve encore dans certaines notes de calculs.

Si on effectue le même raisonnement avec le critère de **Tresca**, on obtient le moment réduit suivant : **Tresca**

$$M_r = \sqrt{M_f^2 + M_t^2} \quad (\text{éq. 9.99})$$

Application 9.6. Calculez le diamètre de l'arbre ci-contre si le poids du volant est de 30000 N et sachant que la puissance à transmettre est de 50 kW à 100 tr/min. La contrainte admissible de flexion pour l'acier de l'arbre est de 200 N/mm².

Solution :

Détermination des sollicitations

En partant du moteur la portion \overline{AB} de l'arbre est sollicitée en torsion simple par le couple développé par le moteur. La partie \overline{BC} en torsion - flexion, la flexion étant due au poids du volant. La partie \overline{CD} uniquement en flexion.

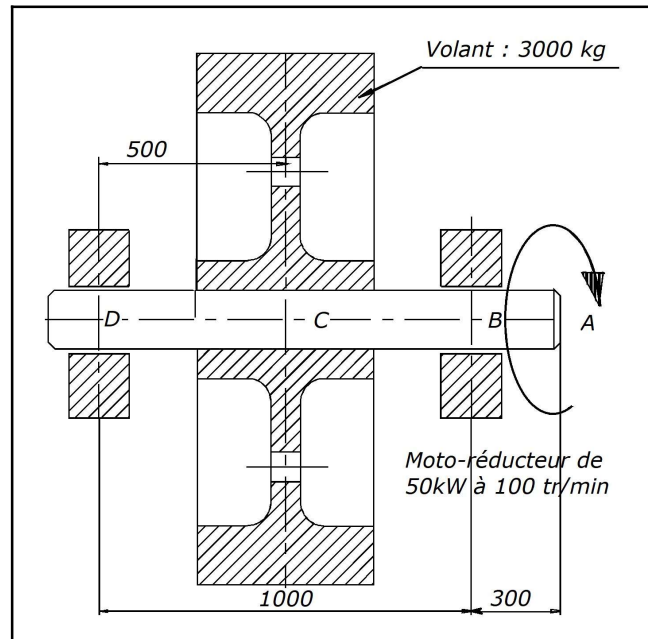


fig. 9.8. - Application 9.6.

Hypothèse

Le poids du volant agissant verticalement. Nous allons considérer que le poids du volant est une charge ponctuelle, et les paliers comme des appuis simples.

L'endroit le plus sollicité étant le milieu C, dimensionnons l'arbre pour cette section dangereuse.

Déterminations des moments

Moment de torsion :

$$M_t = \frac{30 P}{\pi n} = \frac{30}{\pi} \times \frac{50000}{100} = 4775 \text{ Nm}$$

Moment de flexion :

$$M_f = \frac{F l}{4} = \frac{30000 \times 1}{4} = 7500 \text{ Nm}$$

Moment réduit :

$$M_r = \sqrt{M_f^2 + 0.75 M_t^2} = \sqrt{7500^2 + 0.75 \times 4775^2} = 8564.5 \text{ Nm}$$

Diamètre de l'arbre

$$d \geq 2.17 \sqrt[3]{\frac{M_r}{\sigma_{adm}}} = 2.17 \sqrt[3]{\frac{8564.5 \cdot 10^3}{200}} = 75.9 \approx 76 \text{ mm}$$

B) La flexion se fait dans deux plans différents

Dans le cas le plus courant de calcul d'arbre, il arrive que les efforts agissant sur celui-ci ne s'exercent pas uniquement dans un même plan.

Les efforts peuvent être horizontaux, verticaux, obliques et souvent un mélange des trois.

La méthode de résolution dans ce cas est d'effectuer autant de fois le calcul qu'il y a de plans. En pratique cela revient à décomposer toutes les forces dans deux plans perpendiculaires entre eux : un plan horizontal et un plan vertical. On effectue alors le calcul des forces de réactions et des moments fléchissants dans chacun des plans. Ensuite, connaissant ceux-ci, on trouve la résultante (force et moment fléchissant).

Mais, et c'est pourquoi on utilise les plans vertical et horizontal, pour calculer la résultante il suffira de prendre : *la racine carrée de la somme des carrés*. C'est-à-dire :

$$R_A = \sqrt{R_{AV}^2 + R_{AH}^2} \quad (\text{éq. 9.107}) \quad (\text{pour les réactions})$$

et
$$M_{fA} = \sqrt{M_{fV}^2 + M_{fH}^2} \quad (\text{éq. 9.108}) \quad (\text{pour les moments fléchissant})$$

avec : l'indice *V* pour ce qui concerne le plan vertical;
l'indice *H* pour ce qui concerne le plan horizontal.

Application 9.7. Dimensionnez l'arbre ci-dessous, sachant qu'il porte deux poulies dont l'une est soumise à une force de 2000 N verticalement et l'autre à une force de 3000 N horizontalement. La distance entre les deux poulies est de 1 m et la distance inter-palier de 1300 mm. La contrainte admissible de flexion pour l'acier de l'arbre est de 110 N/mm².

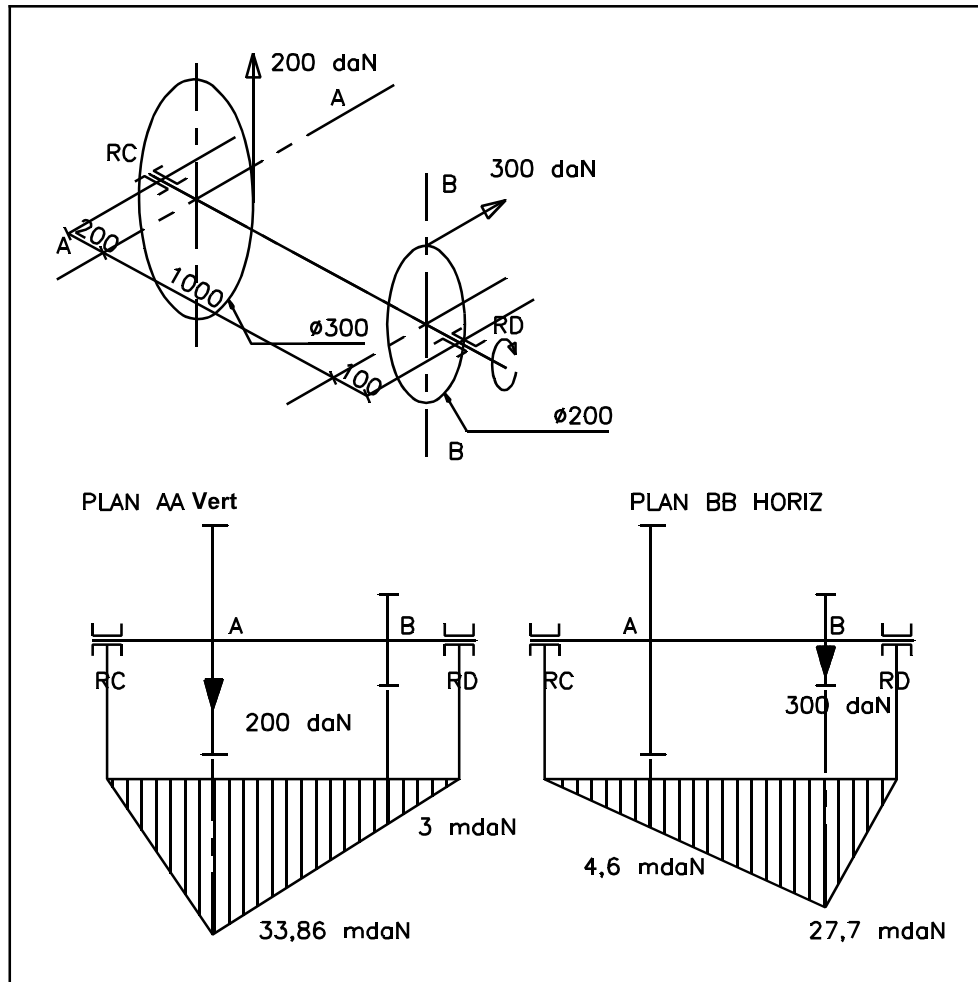


fig. 9.9. - Application 9.7.

Solution :

a) Recherche des réactions d'appuis dans le plan AA

Equilibre de rotation autour de C :

$$- 2000 \times 0.2 + R_{D AA} \times 1.3 = 0 \Rightarrow R_{D AA} = 307.7 \text{ N}$$

Equilibre de rotation autour de D :

$$- R_{C AA} \times 1.3 + 2000 \times 1.1 = 0 \Rightarrow R_{C AA} = 1692.3 \text{ N}$$

b) Recherche des moments fléchissants dans le plan AA

Equilibre de rotation autour de A :

$$M_{f A AA} = R_{C AA} \times 0.2 = 1692.3 \times 0.2 = 338.5 \text{ Nm}$$

Equilibre de rotation autour de B :

$$M_{f B AA} = R_{D AA} \times 0.1 = 307.7 \times 0.1 = 30.8 \text{ Nm}$$

c) Recherche des réactions d'appuis dans le plan BB

Equilibre de rotation autour de C :

$$- 3000 \times 1.2 + R_{D_{BB}} \times 1.3 = 0 \Rightarrow R_{D_{BB}} = 2769.2 \text{ N}$$

Equilibre de rotation autour de D :

$$- R_{C_{BB}} \times 1.3 + 3000 \times 0.1 = 0 \Rightarrow R_{C_{BB}} = 230.8 \text{ N}$$

d) Recherche des moments fléchissants dans le plan BB

Equilibre de rotation autour de A :

$$M_{f_{A_{BB}}} = R_{C_{BB}} \times 0.2 = 230.8 \times 0.2 = 46.2 \text{ Nm}$$

Equilibre de rotation autour de B :

$$M_{f_{B_{BB}}} = R_{D_{BB}} \times 0.1 = 2769.2 \times 0.1 = 276.9 \text{ Nm}$$

e) Recherche du moment de flexion réel (dans ce cas-ci : deux plans perpendiculaires)

$$[\text{en A}] : M_{f_A} = \sqrt{M_{f_{A_{AA}}}^2 + M_{f_{A_{BB}}}^2} = \sqrt{338.5^2 + 46.2^2} = 341.6 \text{ Nm}$$

$$[\text{en B}] : M_{f_B} = \sqrt{M_{f_{B_{AA}}}^2 + M_{f_{B_{BB}}}^2} = \sqrt{30.8^2 + 276.9^2} = 278.6 \text{ Nm}$$

L'endroit le plus sollicité en flexion est en A.

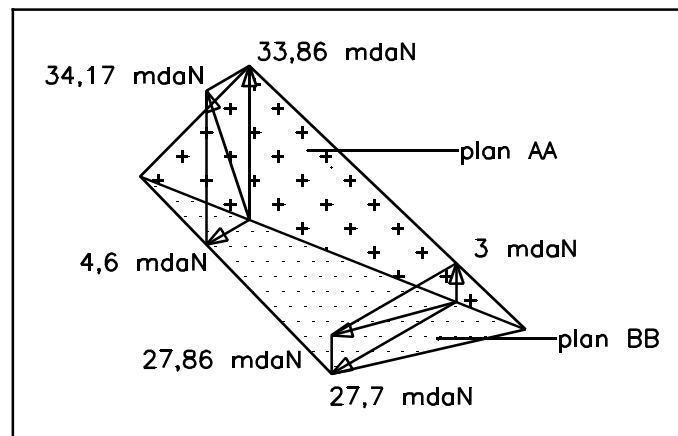


fig. 9.10. - Recherche du moment fléchissant maximum.

f) Recherche du moment de torsion

Entre A et B l'arbre est soumis au moment de torsion M_t :

$$M_t = 2000 \times 0.15 \text{ ou } 3000 \times 0.1 = 300 \text{ Nm}$$

g) Recherche du moment réduit (à l'endroit le plus sollicité c'est-à-dire en A)

$$M_r = \sqrt{M_f^2 + 0.75 M_t^2} = \sqrt{341.6^2 + 0.75 \times 300^2} = 429.2 \text{ Nm}$$

h) Recherche du diamètre de l'arbre

$$d \geq 2.17 \sqrt[3]{\frac{M_r}{\sigma_{adm}}} = 2.17 \sqrt[3]{\frac{429.2 \cdot 10^3}{110}} = 34.2 \approx 36 \text{ mm}$$

9.3.5. Compression (flambage) - flexion

Voir chapitre 8 : Flambement.